УДК 519.859
DOI: 10.15587/2312-8372.2014.34633

Євсеєва Л. Г.

ЗАСОБИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ В ІНТЕРВАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

Статтю присвячено розробці сучасних конструктивних засобів побудови математичних моделей геометричних об'єктів і відношень геометричних об'єктів інтервальних просторів та їх застосуванню при побудові інтервальних математичних моделей оптимізаційних задач геометричного проектування в інтервальному просторі. Отримані нові науково обґрунтовані розробки в теорії геометричного проектування і інтервальної геометрії забезпечують вирішення важливої прикладної проблеми урахування похибок в геометричному проектуванні.

Ключові слова: *геометричне проектування, інтервальна геометрія, інтервальна математична модель оптимізаційної задачі розміщення.*

1. Вступ

Теорія дослідження операцій, інформатика, комп'ютерні науки, інтервальний аналіз, менеджмент, математика — наукові інструменти, що мають важливе методологічне значення для моделювання реальних технологічних і економічних процесів при створенні технічних систем, зв'язаних з обробкою складної геометричної інформації.

Теорія геометричного проектування вивчає фундаментальні та прикладні проблеми, спрямовані на реалізацію ідеї математичного моделювання процесу розміщення реальних об'єктів з урахуванням технологічних обмежень та створення ефективних методів оптимізації цього процесу у відповідності до обраного критерію якості.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Цим дослідженням присвячені роботи професора Стояна Ю. Г. та його учнів [1–6], а також багатьох іноземних науковців, а саме: Dowsland K., Bennell J., Kendall G., Milenkovic M., Daniels K., Oliverra J., Birgin E., Wascher G., Scheithauer G. [7–11].

Аналіз проведених на цей час наукових досліджень щодо методології математичного моделювання і розв'язання задач розміщення та підходів до прийняття рішень в умовах інтервальної невизначеності дозволяє зробити висновок, що при моделюванні і розв'язанні оптимізаційних задач розміщення, як правило, використовується ідеалізоване подання математичних моделей матеріальних об'єктів, коли похибки вихідних даних та параметрів розміщення не враховуються.

Тому наукову значущість набуває проблема створення методології математичного моделювання оптимізаційних задач геометричного проектування з урахуванням похибок, що потребує визначення та розробки сучасних конструктивних засобів моделювання геометричних об'єктів, що розміщуються, та взаємодій на основі використання інтервальної геометрії.

Нинішній час характеризується збільшенням числа галузей застосування методів інтервального аналізу для розв'язання прикладних задач. Дослідженням в цій науковій царині присвячено роботи таких закордонних авторів, як Moore R., Kaucher E., Марков С. М., Alefeld G., Herzberger J., Ratschek H., Rokne J., Калмиков С. А., Добронець Б. С., Шокін Ю. І., Юлдашев З. Х., Шарий С. П. [12–17] та ін.

З метою здійснення єдиного підходу до вирішення проблеми урахування похибок при розв'язанні зазначеного класу задач в 1992 році на основі двох наукових напрямків, що паралельно розвиваються, — геометричного проектування й інтервального аналізу, Ю. Г. Стояном закладено основи нового наукового напряму — інтервальної геометрії [18–23].

Таким чином, актуальним є подальший розвиток теорії інтервальної геометрії — інтервальне математичне моделювання і розробка методів розв'язання оптимізаційних задач, розміщення геометричних об'єктів, як невід'ємна частина теорії геометричного проектування з урахуванням похибок потребує подальшого розвитку.

Створення ефективних методів розв'язання наукових і практичних оптимізаційних задач з урахуванням похибок вихідних даних потребує розробки загальних принципів інтервального математичного моделювання, тобто моделювання на основі використання інтервальної геометрії.

3. Ціль та задачі дослідження

Проведені дослідження ставили за мету здійснити подальший розвиток теорії інтервальної геометрії та теорії геометричного проектування щодо розробки конструктивних засобів математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення в інтервальних просторах на основі принципово нового підходу до математичного моделювання і розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися такі наукові задачі:

— розробити конструктивні засоби математичного моделювання геометричних об'єктів в інтервальних просторах на основі використання основних положень інтервальної геометрії;

— розробити конструктивні засоби математичного моделювання відношень (інтервального включення, неперетинання, розташування на мінімально та максимально допустимих відстанях) інтервальних геометричних об'єктів на основі введення поняття інтервального Ф-відображення;

— побудувати інтервальну математичну модель основної оптимізаційної задачі розміщення інтервальних геометричних об'єктів, множина реалізацій якої покриває клас оптимізаційних задач розміщення з урахуванням похибок.

4. Результати дослідження щодо подальшого розвитку інтервальної геометрії

Створення ефективних методів розв'язання наукових і практичних оптимізаційних задач з урахуванням похибок вихідних даних потребує розробки загальних принципів інтервального математичного моделювання, тобто моделювання на основі використання теорії інтервальної геометрії [18], яка потребує подальшого розвитку.

4.1. Тривимірний інтервальний простір. Розглянемо трьохвимірний інтервальний простір:

$$\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

де $\langle U_i\rangle = (\langle X_i\rangle, \langle Y_i\rangle, \langle Z_i\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\langle X_i\rangle = \langle x_i, \nu_{x_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Y_i\rangle = \langle y_i, \nu_{y_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Z_i\rangle = \langle z_i, \nu_{z_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — розширений простір центрованих інтервалів [19]:

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \{\langle x, v_x\rangle \mid x = \frac{c+d}{2},\ v_x = \frac{d-c}{2},\ \forall c,d \in R^1\}.$$

Ґрунтуючись на відомостях про $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, визначено операції на $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Введемо в $\mathbf{I}_s^3(R)$ евклідову метрику:

$$\rho(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \langle \rho, 0\rangle, \tag{1}$$

$$\rho(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = ((x_2 - x_1)^2 + (v_{x_2} - v_{x_1})^2 + (y_2 - y_1)^2 + (v_{y_2} - v_{y_1})^2 + (z_2 - z_1)^2 + (v_{z_2} - v_{z_1})^2)^{1/2},$$

яка дозволяє використовувати особливі властивості інтервального метричного простору при реалізації математичних моделей оптимізаційних задач розміщення.

Для аналітичного опису інтервальної межі інтервального об'єкта використовуємо побудовані орієнтовані інтервальні рівняння інтервальних квазиповерхонь, які беруть участь у її формуванні.

4.2. Побудовані орієнтовані інтервальні рівняння інтервальних квазиповерхонь. Означення 1. Інтервальною квазилінійною гіперповерхнею в просторі $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ назвемо множину точок $\langle U\rangle = (\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle Z\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, інтервальні координати задовольняють рівняння:

$$\langle A\rangle * \langle X\rangle + \langle B\rangle * \langle Y\rangle + \langle C\rangle * \langle Z\rangle + \langle D\rangle = \mathbf{0}, \tag{2}$$

де $\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle \notin \mathbf{I}_{s3}\mathbf{R}$ одночасно.

Означення 2. Інтервальною псевдоповерхнею назвемо:

$$\varphi(a \cdot \langle X\rangle) + \langle B\rangle * \langle Y\rangle + \langle C\rangle * \langle Z\rangle + \langle D\rangle = \mathbf{0}, \tag{3}$$

де $\langle D\rangle = \langle d, \nu_d\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\nu_d = -a \cdot \nu_x - b \cdot \nu_y - c \cdot \nu_z$, $a,b,c \in R^1$, а оператор:

$$\varphi(\lambda \cdot \langle X\rangle) = \begin{cases} \lambda \cdot \langle X\rangle, & \text{якщо } \lambda \geq 0, \\ \lambda \cdot \overline{\langle X\rangle}, & \text{якщо } \lambda < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$\overline{\langle X\rangle} = \overline{\langle x, \nu_x\rangle} = \langle x, -\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — спряження елемента $\langle X\rangle = \langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$.

Означення 3. Інтервальною циліндричною поверхнею назвемо множину точок $\langle U\rangle \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, інтервальні координати задовольняють рівняння:

$$(\langle X\rangle - \overline{\langle X_0\rangle})^2 + (\langle Y\rangle - \overline{\langle Y_0\rangle})^2 + \langle 0, \nu_{z_0}\rangle^2 - \overline{\langle R\rangle^2} = \mathbf{0},$$

де $\langle U_0\rangle = (\langle X_0\rangle, \langle Y_0\rangle, \langle 0, \nu_{z_0}\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ і $\langle R\rangle$ — центр симетрії основи і відповідно радіус інтервального циліндра, ν_{z_0} — похибка полюса циліндра вздовж вісі $\langle \mathrm{O}\rangle\langle Z\rangle$, квадрат інтервального числа:

$$\langle X\rangle^2 = \begin{cases} \langle x^2 + \nu_x^2, 2 \cdot |x| \cdot \nu_x\rangle, & \langle X\rangle \in \mathbf{I}_{s1} \cup \mathbf{I}_{s2}, \\ \langle (x + |\nu_x|) \cdot x, (x + |\nu_x|) \cdot \nu_x\rangle, & \langle X\rangle \in \mathbf{I}_{s3}^+, \\ \langle (x - |\nu_x|) \cdot x, (x - |\nu_x|) \cdot \nu_x\rangle, & \langle X'\rangle \in \mathbf{I}_{s3}^-. \end{cases}$$

Означення 4. Інтервальною циліндричною поверхнею назвемо множину точок $\langle U\rangle \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, координати яких задовольняють рівняння:

$$(\langle X\rangle - \overline{\langle X_0\rangle})^2 + (\langle Y\rangle - \overline{\langle Y_0\rangle})^2 + \langle 0, \nu_{z_0}\rangle^2 - \overline{\langle R\rangle^2} = \mathbf{0},$$

де $\langle U_0\rangle = (\langle X_0\rangle, \langle Y_0\rangle, \langle 0, \nu_{z_0}\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ і $\langle R\rangle$ — інтервальний центр симетрії основи і радіус інтервального циліндра відповідно, ν_{z_0} — похибка полюса циліндра вздовж вісі $\langle \mathrm{O}\rangle\langle Z\rangle$, квадрат інтервального числа.

Означення 5. Інтервальною тороїдальною поверхнею назвемо поверхню, яка задається інтервальним рівнянням:

$$(\mathbf{f}(\langle U\rangle) - \overline{\langle A\rangle})^2 + \langle Z\rangle^2 - \overline{\langle R\rangle^2} = \mathbf{0},$$

$$\sqrt{(\mathbf{f}(\langle U\rangle) - \overline{\langle A\rangle})^2 + \langle Z\rangle^2} - \overline{\langle R\rangle} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{f}(\langle U\rangle) = \sqrt{\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2},$$

де $\overline{\langle X\rangle} = \overline{\langle x, \nu_x\rangle} = \langle x, -\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — елемент, спряжений до елемента $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Означення 6. Інтервальна ламана описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \langle X\rangle - \overline{\langle X^0\rangle} = \mathbf{A}_1 * \langle T\rangle, \\ \langle Y\rangle - \overline{\langle Y^0\rangle} = \mathbf{A}_2 * \langle T\rangle, \\ \langle Z\rangle - \overline{\langle Z^0\rangle} = \mathbf{A}_3 * \langle T\rangle, \end{cases}$$

де $\langle T\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ назвемо інтервальним параметром інтервальної ламаної, $*$ — символ операції інтервального

 ISSN 2226-3780

множення, $\mathbf{A}_i \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_3 = \{1,2,3\}$ — інтервальні координати інтервальної направленої множини:

— вектора $\mathbf{A}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1,\overset{\Rightarrow}{\mathbf{A}_2},\mathbf{A}_3)$,

— псевдовектора $\mathbf{A}_p(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1,\overset{\Rightarrow_p}{\mathbf{A}_2},\mathbf{A}_3)_p$,

— інтервальної направленої сім'ї множин:

$\mathbf{A}_b(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1,\overset{\Rightarrow_b}{\mathbf{A}_2},\mathbf{A}_3)_b$.

Означення 7. Інтервальна пряма як частинний випадок інтервальної ламаної задається рівняннями:

$$\begin{cases} \langle X\rangle - \overline{\langle X^0\rangle} = \varphi(m\cdot\langle T\rangle), \\ \langle Y\rangle - \overline{\langle Y^0\rangle} = \varphi(n\cdot\langle T\rangle), \\ \langle Z\rangle - \overline{\langle Z^0\rangle} = \varphi(p\cdot\langle T\rangle), \end{cases}$$

де $\vec{s} = (m,n,p)$ — напрямний вектор інтервальної прямої, $\langle T\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — інтервальний параметр прямої.

Тут і надалі $\langle A\rangle,\langle B\rangle,\langle C\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle D\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — відповідно інтервальні коефіцієнти і інтервальна константа, що беруть участь у формуванні інтервальних рівнянь, $\langle U\rangle \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ — інтервальна змінна.

Конкретний вигляд інтервальних рівнянь інтервальних квазиповерхонь визначається відповідно до розбиття простору $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ виду:

$$\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k,\ \Omega_k = \mathbf{J}_{\alpha_1} \cup \mathbf{J}_{\alpha_2} \cup \mathbf{J}_{\alpha_3}, \tag{5}$$

де

$$\mathbf{J}_{\alpha_i} \in \{\mathbf{I}_{s1},\mathbf{I}_{s2},\mathbf{I}_{s3}^+,\mathbf{I}_{s3}^-\},\quad \alpha_i \in J_3, i \in J_3,$$

$$N = 4^3 = 64,\quad \mathbf{I}_{s3} = \mathbf{I}_{s3}^+ \cup \mathbf{I}_{s3}^-,$$

$$\mathbf{I}_{s1} = \operatorname{int}\mathbf{I}_{s1} = \{\langle x,\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid x - |\nu_x| > 0\},$$

$$\mathbf{I}_{s2} = \operatorname{int}\mathbf{I}_{s2} = \{\langle x,\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid x - |\nu_x| < 0\},$$

$$\mathbf{I}_{s3} = cl\,\mathbf{I}_{s3} = \{\langle x,\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid (x - |\nu_x| \le 0) \wedge (x + |\nu_x| \ge 0)\},$$

$$\mathbf{I}_{s3}^+ = \{\langle x,\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_{s3} \mid \nu_x \ge 0\},\quad \mathbf{I}_{s3}^- = \{\langle x,\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_{s3} \mid \nu_x < 0\},$$

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \mathbf{I}_{s1} \cup \mathbf{I}_{s2} \cup \mathbf{I}_{s3}.$$

Вважаємо, що $\langle A\rangle,\langle B\rangle,\langle C\rangle \in \mathbf{I}_{s1} \cup \mathbf{I}_{s2} \cup \{0\}$.

Означення 8. Орієнтованим інтервальним рівнянням інтервальної поверхні $\mathbf{i} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ назвемо рівняння $\psi(\langle U\rangle) = \mathbf{0}$, $\langle U\rangle \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, якщо інтервальне відображення $\psi: \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ є неперервним, визначеним усюди в $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, і, окрім того, виконується умова $\psi(\langle U_1\rangle) * \psi(\langle U_2\rangle) < \mathbf{0}$, $\forall\langle U_1\rangle \in \Gamma_1$, $\forall\langle U_2\rangle \in \Gamma_2$.

Таким чином, рівняння будь-якої інтервальної гіперплощини $\Pi \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ є орієнтованим інтервальним рівнянням, тому що автором здійснена перевірка аксіом евклідової геометрії у тривимірному інтервальному просторі. Одна з аксіом порядку формулюється таким чином: інтервальна гіперплощина $\Pi \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ розбиває інтервальний трьохвимірний простір $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ на дві частини (напівпростори) так, що якщо U_1 і U_2 — дві точки одного інтервального напівпростору, то інтервальний відрізок $[U_1,U_2]$ не перетинається з інтервальною гіперплощиною Π, якщо ж точки U_1 і U_2 належать різним напівпросторам, то $[U_1,U_2]$ перетинається з інтервальною гіперплощиною Π.

4.3. Багатовимірний інтервальний простір. Інтервальні поверхні. Викладення багатьох питань, пов'язаних із моделюванням оптимізаційних задач геометричного проектування в багатовимірних інтервальних просторах привело до необхідності визначення інтервальних направлених множин в n-вимірному інтервальному просторі, інтервальних поверхонь. Досліджуються їх властивості.

Введено поняття інтервальної квазілінійної поверхні $\widehat{\Pi} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, що реалізується таким квазілінійним інтервальним рівнянням:

$$\sum_{j=1}^{n} \langle A_j\rangle * \langle X_j\rangle + \langle C\rangle = \mathbf{0}, \tag{6}$$

де $\langle U\rangle = (\langle X_1\rangle,...,\langle X_n\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $\langle X_j\rangle = \langle x_j,\nu_{x_j}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle A_j\rangle = \langle a_j,\nu_{a_j}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $J_n = \{1,2,...,n\}$, $\langle C\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, *операції інтервального множення* $\langle A\rangle * \langle X\rangle$ елемента $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ на інтервальне число $\langle A\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, на основі якого визначені поняття багатовимірних інтервальних квазілінійних поверхонь.

Конкретний вид інтервального рівняння (6) визначається розбитям виду:

$$\mathbf{I}_s^n\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k,\quad \Omega_k = J_1 \times \mathbf{J}_2 \times ... \times \mathbf{J}_n,$$

де $\mathbf{J}_i \in \{\mathbf{I}_{s_1},\mathbf{I}_{s_2},\mathbf{I}_{s_3}^+,\mathbf{I}_{s_3}^-\}, i \in J_N$, $N = 4^n$, інтервальні множини $\mathbf{I}_{s_i}, i = 1,2,3$, аналогічним до розбиття (5), і тим, які значення приймають інтервальні коефіцієнти $\langle A_i\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_n$.

Інтервальна пряма $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ подається як перетин $n-1$ інтервальних гіперплощин, і описується системою:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{ij}\cdot\langle X_j\rangle) + \langle C_i\rangle = \mathbf{0},\ i \in J_{n-1}, \tag{7}$$

де $\langle U\rangle \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $a_{ij} \in R^1$, $i \in J_{n-1}$, $j \in J_n$, $\langle C_i\rangle = \langle c_i,\nu_{c_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $X = (\langle X_1\rangle,\ldots,\langle X_n\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, вигляд оператора $\varphi(\lambda\langle X\rangle)$ визначається співвідношенням (4).

Якщо інтервальна пряма $\mathbf{L}$ проходить через точку $\langle U_0\rangle = (\langle X_1^0\rangle,...,\langle X_n^0\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, її можна подати рівнянням у параметричній формі:

$$\langle X_i\rangle = \langle X_i^0\rangle + \langle A_i\rangle * \langle T\rangle, i \in J_{n-1},$$

де $\langle U\rangle = (\langle X_1\rangle,...,\langle X_n\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, а $\langle T\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — інтервальний параметр.

Напрямок на $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ відповідає неперервній зміні інтервального параметра $\langle T\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ в (6), тобто якщо точці $\langle U_0\rangle \in \mathbf{L}$ поставимо у відповідність значення інтервального параметра $\langle T_0\rangle = \langle t_0,\nu_{t_0}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, то для будь-яких $\langle T_1\rangle,\langle T_2\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, що задовольняють умові $\langle T_1\rangle < \langle T_0\rangle < \langle T_2\rangle$, знайдуться відповідні точки $\langle U_i\rangle \in \mathbf{L}$, $i = 1,2$ такі, що $\langle U_1\rangle <_{\mathbf{L}} \langle U_0\rangle <_{\mathbf{L}} \langle U_2\rangle$ або $\langle U_2\rangle <_{\mathbf{L}} \langle U_0\rangle <_{\mathbf{L}} \langle U_1\rangle$.

Доведено, що через дві точки $\langle U_i\rangle = (\langle x_1^i,\nu_{x_1^i}\rangle,..., \langle x_n^i,\nu_{x_n^i}\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $i = 1,2$, можна провести:

— інтервальну пряму $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, якщо $\nu_{x_i^1} = \nu_{x_i^2}$, $\forall i \in J_n$;

— інтервальну псевдопряму $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, якщо існує така індексна підмножина $J = \{\alpha_1,...,\alpha_k\} \subset J_n$, $k \in J_{n-1}$, що $\nu_{x_i^1} \ne \nu_{x_i^2}$, $\forall i \in J$, і $\nu_{x_i} = \nu_{x_i^0}$, $\forall i \in J_n / J$:

— направлену інтервальну підмножину $\mathbf{L}_b \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, якщо $\nu_{x_i^1} \neq \nu_{x_i^2}$, $\forall i \in J_n$.

Таким чином, маємо:

$$\mathbf{A}_b = \{\langle U\rangle \in \mathbf{L}_b \,|\, \langle U_1\rangle \leq_{\mathbf{L}_b} \langle U\rangle \leq_{\mathbf{L}_b} \langle U_2\rangle\},$$

$$\mathbf{A} = \langle U_1\rangle \overset{\Rightarrow}{\rangle\langle} U_2\rangle = \{\langle U\rangle \in \mathbf{L} \,|\, \langle U_1\rangle <_{\mathbf{L}} \langle U\rangle <_{\mathbf{L}} \langle U_2\rangle\},$$

$$\mathbf{A}_p = \langle U_1\rangle \overset{\Rightarrow p}{\rangle\langle} U_2\rangle = \{\langle U\rangle \in \mathbf{L}_p \,|\, \langle U_1\rangle \leq_{\mathbf{L}_p} \langle U\rangle \leq_{\mathbf{L}_p} \langle U_2\rangle\}.$$

4.4. Багатовимірні метричні інтервальний простори. Розглянемо метричний інтервальний простір $(\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}, \rho)$. Пропонуються інтервальні відображення, які задовольняють умовам метрики інтервальних просторів:

1) евклідова метрика:

$$\rho(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \rho^2(\langle X_j^1\rangle, \langle X_j^2\rangle)} \in R^1, \qquad (8)$$

де

$$\rho(\langle A\rangle, \langle B\rangle) = \sqrt{(b-a)^2 + (\nu_b - \nu_a)^2} \in R^1,$$
$$\langle A\rangle = \langle a, \nu_a\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \quad \langle B\rangle = \langle b, \nu_b\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$
$$\langle U_i\rangle = (\langle X_1^i\rangle, ..., \langle X_n^i\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}, \quad \langle X_j^i\rangle = \langle x_j^i, \nu_{x_j}^i\rangle,$$
$$j \in J_n, \quad i = 1,2.$$

2) інтервальне відображення $\mu : \Omega \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ виду:

$$\mu(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mu^2(\langle X_j^1\rangle, \langle X_j^2\rangle)}, \qquad (9)$$

де

$$\langle U_i\rangle = (\langle X_1^i\rangle, ..., \langle X_n^i\rangle) \in \Omega, \quad \langle X_j^i\rangle = \langle x_j^i, \nu_{x_j}^i\rangle,$$
$$\forall j \in J_n, \quad i = 1,2,$$

$\mu : \mathbf{I}_s\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — інтервальна метрика на $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$:

$$\mu(\langle A\rangle, \langle B\rangle) = \begin{cases} \left|\langle A\rangle - \overline{\langle B\rangle}\right|, \text{ якщо } \nu_\alpha - \nu_\beta \geq 0, \\ \overline{\left|\langle A\rangle - \overline{\langle B\rangle}\right|}, \text{ якщо } \nu_\alpha - \nu_\beta < 0, \end{cases}$$

або

$$\mu(\langle A\rangle, \langle B\rangle) = \langle |a-b|, |\nu_a - \nu_b|\rangle, \quad \langle A\rangle = \langle a, \nu_a\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$
$$\langle B\rangle = \langle b, \nu_b\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}.$$

Після перетворень маємо:

$$\mu(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \langle W\rangle = \langle w, \nu_w\rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left\langle \sqrt{d+\nu_d} + \sqrt{d-\nu_d}, \sqrt{d+\nu_d} - \sqrt{d-\nu_d} \right\rangle,$$

$$d = \sum_{j=1}^{n} ((x_j)^2 + (\nu_{x_j})^2), \quad \nu_d = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \nu_{x_j},$$

$$w = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j + \nu_{x_j})^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \nu_{x_j})^2} \right),$$

$$\nu_w = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j + \nu_{x_j})^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \nu_{x_j})^2} \right),$$

при виконанні умови: $\langle X_j\rangle \in \mathbf{I}_{s1}^+$, $\forall j \in J_n$.

4.5. Побудова інтервальних геометричних об'єктів як математичних моделей геометричних об'єктів евклідова простору з урахуванням похибок. Математичне моделювання в геометричному проектуванні з урахуванням похибок вихідних даних (метричних характеристик та параметрів розміщення) на основі використання інтервальної геометрії назвемо інтервальним математичним моделюванням, а відповідну математичну модель геометричного об'єкту — інтервальним геометричним об'єктом.

Виходячи з гомеоморфізму просторів R^2 і $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ та встановленою на цій основі бієкції виду: $(\alpha, \nu_\alpha) \leftrightarrow \langle \alpha, \nu_\alpha\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ між вихідними даними оптимізаційної задачі і елементами $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ виконане математичне моделювання геометричного об'єкта з урахуванням похибок вихідних даних, а саме: за математичну модель геометричного об'єкту $T \subset R^n$ з метричними характеристиками виду і параметрами розміщення, метричні характеристики і параметри розміщення геометричних об'єктів яких задано з похибками, приймаємо інтервальний геометричний об'єкт:

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^p\mathbf{R}, \quad \mathbf{I}_s^p\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{I}_s\mathbf{R} \times ... \times \mathbf{I}_s\mathbf{R}}_{p},$$

який визначається кортежем інтервальної інформації:

$$\mathbf{g_T} = (\mathbf{T}, \mathbf{m}, (\langle U\rangle, \langle\Theta\rangle)), \quad \mathbf{m} = (\langle A_1\rangle, ..., \langle A_k\rangle),$$
$$\langle A_j\rangle = \langle a_j, \nu_{a_j}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \quad \langle U\rangle = (\langle X_1\rangle, ..., \langle X_n\rangle),$$
$$\langle\Theta\rangle = (\langle\Theta_1\rangle, ..., \langle\Theta_k\rangle), \quad \langle\Theta_j\rangle = \langle\theta_j, \nu_{\theta_j}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$
$$\langle U\rangle = \langle U_0\rangle \overset{\Rightarrow b}{\rangle\langle} U\rangle = ((\langle X_1\rangle, ..., \langle X_n\rangle), (\langle\Theta_1\rangle, ..., \langle\Theta_k\rangle)) \in \mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R},$$
$$\langle X_i\rangle = \langle x_i, \nu_{x_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \quad i, j \in J_n.$$

Нехай при розміщенні об'єкта $\mathbf{T}$ використовується його трансляція на інтервальну направлену множину $\langle U_i\rangle \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ і поворот навколо свого інтервального полюса на інтервальний кут $\langle\Theta_i\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$. Позначимо інтервальний об'єкт $\mathbf{T}$, заданий у власній інтервальній системі координат і трансльований на інтервальну направлену множину $\langle U_i\rangle = (\langle X_i\rangle, \langle Y_i\rangle, \langle Z_i\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, через $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \,|\, \mathbf{X} = \langle U_i\rangle + \mathbf{Y}, \ \mathbf{Y} \in \mathbf{T}_i\}$.

Означення 9. Інтервальним об'єктом $\mathbf{T}(\langle U\rangle) \subset (\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}, \rho)$ назвемо точкову інтервальну множину, яку можна подати у вигляді:

$$\mathbf{T}(\langle U\rangle) = \mathbf{fr}\mathbf{T} \cup (\mathbf{I}_s^n\mathbf{R} \setminus \mathrm{cl}\,\mathbf{T}),$$

де $\mathrm{int}\,\mathbf{T}$, $\mathrm{cl}\,\mathbf{T}$ — топологічні внутрішність та замикання відповідно, $\mathbf{fr}\,\mathbf{T}(\langle U\rangle)$ — інтервальна межа, $\langle U\rangle = (\langle X_1\rangle, ..., \langle X_n\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ — параметри розміщення.

Замикання $\mathbf{T}^*$ доповнення $\mathbf{T}$ до інтервального простору $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ можна подати як $\mathbf{T}_1^* = \mathrm{int}\,(\mathbf{I}_s^n\mathbf{R} \setminus \mathbf{T}_1) \cup \mathbf{fr}\,\mathbf{T}_1$.

Для аналітичного опису інтервальної межі інтервального об'єкта використовуємо побудовані орієнтовані інтервальні рівняння інтервальних квазіповерхонь, які беруть участь у її формуванні.

Тоді кортеж геометричної інформації, що індукує однозначно інтервальний об'єкт $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, можна подати як $\mathbf{g_T} = (\Upsilon, M, (\langle U\rangle, \langle\Theta\rangle))$, де $\Upsilon, M, (\langle U\rangle, \langle\Theta\rangle)$ — просторова форма, метричні характеристики і параметри розміщення $\mathbf{T}$.

Приклад 1. Інтервальне відображення $\mathbf{f}: \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ виду:

$$\mathbf{f}(\langle U_i\rangle) = \max_{k=1,2,\ldots,6} \mathbf{f}_k(\langle U_0\rangle), \quad i \in \{0\} \cup J_n,$$

$$\mathbf{f}_1(\langle U_i\rangle) = (\langle X\rangle - \langle \overline{X_0}\rangle) - \overline{\langle A\rangle},$$

$$\mathbf{f}_2(\langle U_i\rangle) = -\overline{(\langle X\rangle - \langle \overline{X_0}\rangle)} - \overline{\langle A\rangle},$$

$$\mathbf{f}_3(\langle U_i\rangle) = \overline{(\langle Y\rangle - \langle \overline{Y_0}\rangle)} - \overline{\langle B\rangle},$$

$$\mathbf{f}_4(\langle U_i\rangle) = -\overline{(\langle Y\rangle - \langle \overline{Y_0}\rangle)} - \overline{\langle B\rangle},$$

$$\mathbf{f}_5(\langle U_i\rangle) = (\langle Z\rangle - \langle \overline{Z_0}\rangle) - \overline{\langle C\rangle},$$

$$\mathbf{f}_6(\langle U_i\rangle) = -\overline{(\langle Z\rangle - \langle \overline{Z_0}\rangle)} - \overline{\langle C\rangle},$$

надає можливість моделювати інтервальний паралелепіпед $\mathbf{P} \subset \mathbf{I}_\mu^n\mathbf{R}$.

Для орієнтованого інтервального об'єкта $\mathbf{T}$ маємо $\mathbf{g_T} = (\Upsilon, M, (\langle U\rangle, \langle 0, \nu_\Theta\rangle))$.

Так, кортеж геометричної інформації інтервального паралелепіпеда $\mathbf{P} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ має вигляд:

$$\mathbf{g_P} = \{\mathbf{P}, (\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle), (\langle X_0\rangle, \langle Y_0\rangle, \langle Z_0\rangle)\},$$

інтервального m-кутника $\mathbf{K} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$:

$$\mathbf{g_K} = \{\mathbf{K}, (\langle V_1\rangle, \ldots, \langle V_m\rangle), ((\langle X_0\rangle, \langle Y_0\rangle), \langle\Theta_0\rangle)\},$$

де $\langle V_i\rangle = (\langle X_i\rangle, \langle Y_i\rangle)$ — його i-та вершина у власній інтервальній системі координат, $\langle\Theta_0\rangle = (\langle\theta_0, \nu_{\theta_0}\rangle) \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — інтервальний кут повороту навколо власного полюса.

Для аналітичного опису інтервальної межі $\mathbf{fr}\,\mathbf{T}$ використовуємо орієнтовані рівняння інтервальних поверхонь, які беруть участь у її формуванні.

Означення 10. Інтервальний рух інтервального об'єкта $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ полягає в тому, що кожній точці $\langle U\rangle = (\langle X\rangle, \langle Y\rangle) \in \mathbf{T}$ ставиться у відповідність точка $\langle U'\rangle = (\langle X'\rangle, \langle Y'\rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ як результат елементарного інтервального відображення:

$$\begin{cases} \langle X'\rangle = \langle X\rangle * \cos\langle\Theta\rangle - \overline{\langle Y\rangle * \sin\langle\Theta\rangle} + \langle X_0\rangle, \\ \langle Y'\rangle = \langle X\rangle * \sin\langle\Theta\rangle + \langle Y\rangle * \cos\langle\Theta\rangle + \langle Y_0\rangle, \end{cases} \tag{10}$$

де $\langle U_0\rangle = (\langle X_0\rangle, \langle Y_0\rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$, $\langle\Theta\rangle = \langle\theta, \nu_\theta\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — інтервальний кут, $\theta \in R^1$, $\nu_\theta \in R^+$.

Означення 11. Інтервальне обертання інтервального об'єкту $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ навколо свого полюса на інтервальний кут $\langle\Theta\rangle = \langle\theta, \nu_\theta\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ в $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ полягає в тому, що кожній точці $\langle U\rangle = (\langle X\rangle, \langle Y\rangle) \in \mathbf{T}$ ставиться у відповідність деяка точка $\langle U''\rangle = (\langle X''\rangle, \langle Y''\rangle) \in \mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ як результат елементарного інтервального відображення (11) при $\langle X_0\rangle = \langle Y_0\rangle = \mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$.

Означення 12. Якщо в кортежі геометричної інформації про об'єкт $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ параметр $\langle\Theta\rangle = \langle\theta, \nu_\theta\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ є інтервальною константою, $\mathbf{T}$ назвемо інтервально орієнтованим інтервальним об'єктом. Тоді рух об'єкта $\mathbf{T}$ полягає тільки в трансляції на інтервальну направлену множину $\langle U_0\rangle = (\langle X_0\rangle, \langle Y_0\rangle)$, а саме $\langle X'\rangle = \langle X\rangle - \overline{\langle X_0\rangle}$, $\langle Y'\rangle = \langle Y\rangle - \overline{\langle Y_0\rangle}$, $\langle\theta, \nu_\theta\rangle = \mathbf{0}$.

Означення 13. Інтервальне відображення $\Phi: \mathbf{I}_s^{m \cdot n}\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ називається інтервальним Φ-відображенням об'єктів $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle) \subset \mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$ $i = 1,2$, якщо воно задовольняє умовам:

$$\Phi(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) > \mathbf{0}, \text{ якщо } \mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle) \cap \mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) = \varnothing,$$

$$\Phi(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \mathbf{0}, \text{ якщо}$$

$$\begin{cases} \operatorname{int}\mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle) \cap \operatorname{int}\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) = \varnothing, \\ \mathbf{fr}\mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle) \cap \mathbf{fr}\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) \neq \varnothing, \end{cases} \tag{11}$$

$$\Phi(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) < \mathbf{0}, \text{ якщо } \operatorname{int}\mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle) \cap \operatorname{int}\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) \neq \varnothing,$$

де $\langle U_i\rangle = (\langle X_1^i\rangle, \ldots, \langle X_n^i\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $\langle X_j^i\rangle = \langle x_j^i, \nu_{x_j^i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $j \in J_k$, $i = 1,2$.

Отже, умову взаємного інтервального неперетинання об'єктів $\mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ і $\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ можна подати у вигляді інтервальної нерівності $\Phi(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) > \mathbf{0}$, інтервального дотикання — $\Phi(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \mathbf{0}$. Умова інтервальної належності $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_1$, згідно введеного поняття інтервальної належності елементів, може бути подана як еквівалентна їй умова неперетинання інтервальних об'єктів $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2^*$, та моделюється інтервальною нерівністю $\Phi(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) > \mathbf{0}$, де Φ — інтервальне об'єктів $\mathbf{T}_1^*(\langle U_1\rangle)$ і $\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle)$.

Нехай ρ — метрика інтервального простору $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$. Інтервальна відстань між інтервальними геометричними об'єктами $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $i = 1,2$, визначається:

$$\rho\,(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = \min_{\langle V_1\rangle \in \mathbf{T}_1, \langle V_2\rangle \in \mathbf{T}_2} \rho\,(\langle V_1\rangle, \langle V_2\rangle),$$

де мінімум розуміємо у відповідності до відношення порядку в просторі $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ (при умові, що вони не перетинаються).

Означення 14. Нормалізованим інтервальним Φ-відображенням об'єктів $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $i = 1,2$, при умові:

$$\operatorname{int}\mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle) \cap \operatorname{int}\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) = \varnothing,$$

назвемо таке інтервальне Φ-відображення $\tilde{\Phi}$, яке в точці $(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = (\langle X_1^1\rangle, \ldots, \langle X_n^2\rangle) \in \mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R}$ набуває значення $\rho(\mathbf{T}_1(\langle U_1\rangle), \mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle))$.

Зауважимо, в евклідовому просторі означення 13 та 14 співпадають з означеннями Ф-функції та нормалізованої Ф-функції, започаткованими Стояном Ю. Г. [19].

Приклад 2. Для інтервального об'єкта $\mathbf{S}_1^*(\langle U_1\rangle) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ та інтервального тора $\mathbf{T}_2(\langle U_2\rangle) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, метричні характеристики яких $\mathbf{m}_1 = (\langle R_1\rangle)$, $\mathbf{m}_2 = (\langle A\rangle, \langle R_2\rangle)$ відповідно, при умовах $\langle A\rangle \geq \langle R_2\rangle$ і $\langle A\rangle + \langle R_2\rangle \leq \langle R_1\rangle$ маємо нормалізоване інтервальне Φ-відображення виду:

$$\tilde{\Phi}(\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle) = \tilde{\chi}(\langle U_2\rangle - \overline{\langle U_1\rangle}) = \tilde{\chi}(\langle U\rangle),$$

$$\tilde{\chi}(\langle U\rangle) = \langle R\rangle - \overline{\sqrt{(\mathbf{f}(\langle U\rangle) - \overline{\langle A\rangle})^2 + \langle Z\rangle^2}},$$

$$\mathbf{f}(\langle U\rangle) = \sqrt{\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2}, \quad \langle U\rangle = \langle U_2\rangle - \langle \overline{U_1}\rangle.$$

Поняття нормалізованого інтервального Φ -відображення об'єктів надає можливість моделювати розташування інтервальних об'єктів $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle)\subset\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, $i=1,2$, на певній відстані, зокрема, на мінімальному (ρ^-) та максимальному (ρ^+) допустимих інтервальних відстанях моделюється інтервальною нерівністю:

$$\rho^- \le \tilde{\Phi}(\langle U_1\rangle,\langle U_2\rangle) \le \rho^+.$$

Таким чином, поняття інтервального Φ-відображення є фундаментальною основою інтервального математичного моделювання в геометричному проектуванні, а побудовані інтервальні Φ-відображення базових інтервальних об'єктів дають можливість подати інтервальну математичну модель оптимізаційної задачі розміщення як математичну модель задачі математичного програмування в інтервальних просторах.

4.6. Побудова інтервальної математичної моделі оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів. Введені поняття дозволяють сформулювати основну оптимізаційну інтервальну задачу геометричного проектування у такій постановці.

В інтервальному просторі $\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$ дано сім'ю інтервальних геометричних об'єктів $\mathbf{T}_i\subset\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, $i\in J_n$, і область $\Omega\subset\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, такі, що:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{g}_{\mathbf{T}_i}=(\mathbf{T}_i,\mathbf{m}_i,(\langle U_i\rangle,\langle\Theta_i\rangle)),\quad \mathbf{g}_\Omega=(\Omega,\mathbf{m}_0,(\langle U_0\rangle,\langle\Theta_0\rangle)),\\
&\mathbf{m}_i=(\langle A_1^i\rangle,\langle A_2^i\rangle,\ldots,\langle A_{k_i}^i\rangle),\\
&\langle A_j^i\rangle=\langle a_j^i,\nu_{a_j^i}\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}, j\in J_{k_i},\quad i\in\{0\}\cup J_n,\\
&\langle U_i\rangle=\langle U_0\rangle\overset{\Rightarrow b}{\langle U_i\rangle}=(\langle X_1^i\rangle,\ldots,\langle X_n^i\rangle)\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},\\
&\langle X_j^i\rangle=\langle x_j^i,\nu_{x_j^i}\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},\\
&j\in J_{k_i},\quad i\in J_n. \qquad (14)\\
&\langle\Theta_i\rangle=\langle\Theta_0\rangle\overset{\Rightarrow b}{\langle\Theta_i\rangle}=(\langle\Theta_1^i\rangle,\ldots,\langle\Theta_n^i\rangle)\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},\\
&\langle\Theta_j^i\rangle=\langle\theta_j^i,\nu_{\theta_j^i}\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},\quad j\in J_{k_i},\quad i\in J_n.
\end{aligned}$$

Нехай при розміщенні об'єкта $\mathbf{T}_i$ використовується його трансляція на інтервальну направлену сім'ю $\langle U_i\rangle\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ і обертання навколо власного полюса на інтервальний кут $\langle\Theta_i\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$. Тоді вектор параметрів розміщення має вигляд $(\langle U_i\rangle,\langle\Theta_i\rangle)\in\mathbf{I}_s^{n+1}\mathbf{R}$. Позначимо $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle)\subset\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i\in J_n$, $\Omega(\langle U_0\rangle)\subset\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Необхідно упакувати інтервальні геометричні об'єкти $\mathbf{T}_i$, $i\in J_n$, в інтервальну область Ω, тобто знайти інтервальну направлену множину параметрів розміщення $(\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle)=(\langle U_1\rangle,\ldots,\langle U_n\rangle,\langle\Theta_1\rangle,\ldots,\langle\Theta_n\rangle)\subset\mathbf{I}_s^{2mn}\mathbf{R}$, таку, щоб усі $\mathbf{T}_i$ належали області Ω (у відповідності до поняття інтервальної належності елементів інтервальних просторів) без взаємних перетинів, і при цьому інтервальний критерій якості $\kappa^*(\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle)$ розміщення приймав найкраще значення, яке розуміємо у відповідності до відношення порядку, введеного в просторі $(\mathbf{I}_s\mathbf{R},\rho)$.

Виходячи з основних положень теорії геометричного проектування, інтервальної геометрії та сформульованих задач дослідження, одержали інтервальну математичну модель основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення:

$$\inf_{\langle U\rangle\in\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^q\mathbf{R}}\mathbf{F}(\langle U\rangle), \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}
&(\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle,\langle H\rangle)=\\
&=(\langle U_1\rangle,\ldots,\langle U_n\rangle,\langle\Theta_1\rangle,\ldots,\langle\Theta_n\rangle,\langle H\rangle)\in\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R},
\end{aligned}$$

де $\mathbf{F}:\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — інтервальне відображення (інтервальний критерій якості розміщення), $\mathbf{D}$ — інтервальна область допустимих значень, яка описується системою виду:

$$\begin{cases}
\tilde{\Phi}_{0i}(\langle U_0\rangle,\langle U_i\rangle)\ge\rho_0,\ i\in J_n,\\
\tilde{\Phi}_{ij}(\langle U_i\rangle,\langle U_j\rangle)-\overline{\rho_{ij}^-}\ge\mathbf{0},\\
-\overline{\tilde{\Phi}_{ij}(\langle U_i\rangle,\langle U_j\rangle)}+\rho_{ij}^+\ge\mathbf{0},\ i,j\in J_n,\ i<j,
\end{cases} \qquad (13)$$

$\forall i\in\{0\}\cup J_n$, $\forall j\in J_n$, $J_n=\{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{0}=\langle 0,0\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}$ — інтервальний простір з метрикою ρ, $\langle U_i\rangle=(\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle,\langle Z_i\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i\in J_n$, ρ_{ij}^-, ρ_{ij}^+, ρ_{0i}^-, ρ_{0i}^+ — мінімальні і максимальні допустимі інтервальні відстані між об'єктами, що розмішуються, об'єктами і областю розміщення відповідно, де $\tilde{\Phi}_{0i}(\langle U_0\rangle,\langle U_i\rangle)$ і $\tilde{\Phi}_{ij}(\langle U_i\rangle,\langle U_j\rangle)$ є нормалізовані інтервальні Φ -відображення інтервальних об'єктів і області розміщення та пар інтервальних об'єктів, χ — інтервальний критерій якості розміщення.

В ідеалізованому випадку інтервальна математична модель (12)–(13) співпадає з математичною моделлю оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів в евклідових просторах.

5. Обговорення результатів дослідження конструктивних засобів математичного моделювання

Результати дослідження є подальшим розвитком теорії інтервальної геометрії та створення на цій основі загального підходу до математичного моделювання та розв'язання задач розміщення в інтервальних просторах.

Розроблено нові конструктивні засоби моделювання основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення, що є теоретичною основою методології розв'язання наукових та прикладних задач розміщення з урахуванням похибок метричних характеристик і параметри розміщення, в тому числі:

Розроблено конструктивні засоби математичного моделювання поверхонь евклідових просторів з урахуванням похибок в інтервальних просторах як подальший розвиток інтервальної геометрії:

— вперше визначено основні квазиповерхні в інтервальних метричних просторах;

— побудовано нові інтервальні метричні простори, доведено відповідні твердження.

Розроблено конструктивні засоби математичного моделювання геометричних об'єктів евклідових просторів, метричні характеристики і параметри розміщення яких задано з похибками, у вигляді інтервальних геометричних об'єктів. Ці засоби на відміну від існуючих дозволяють в аналітичному вигляді подати геометричний об'єкт з похибками як множину інтервального простору.

Розроблено конструктивні засоби математичного моделювання відношень інтервальних геометричних об'єктів як подальший розвиток методу Φ*-функцій Стояна, в тому числі:*

— вперше введено поняття інтервального Φ-відображення і нормалізованого інтервального Φ-відображення як ефективний засіб математичного моделювання відношень інтервального вкладення, інтервального неперетинання, розташування на мінімально та максимально допустимих інтервальних відстанях інтервальних об'єктів;

— вперше побудовано повні класи інтервальних Φ-відображень базових інтервальних геометричних об'єктів;

— вперше побудовано повні класи нормалізованих інтервальних Φ-відображень для базових інтервальних геометричних об'єктів.

На базі розроблених в даному дослідженні засобів математичного моделювання в інтервальних просторах побудовано інтервальні математичні моделі та розв'язано такі наукові та прикладні інтервальні оптимізаційні задачі розміщення:

— інтервальних паралелепіпедів у інтервальному паралелепіпеді (в тому числі, комбінаторна задача розміщення інтервальних паралелепіпедів, задача кольорового упакування інтервальних паралелепіпедів із зонами заборони) [24];

— інтервальних кругів у інтервальній смузі [25];

— інтервальних многокутників з поворотами у інтервальну смугу [26];

— інтервальних циліндрів в інтервальній призмі [27];

— інтервальних куль в інтервальну циліндричну область (мінімізації висоти) [28];

— інтервальних куль в інтервальну циліндричну область [29];

— опуклих інтервальних многогранників в інтервальний паралелепіпед [30].

Практичне значення результатів дослідження. Створено програмні продукти, що реалізують розроблені засоби математичного моделювання та розраховані на розв'язання двовимірних та трьохвимірних задач упакування в різних галузях науки та техніки:

— «Packing of Interval Parallelepipeds» [31],

— «Packing of Interval Polygons» [32],

— «Імітаційне моделювання властивостей сплава» [33].

Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Результати дисертаційної роботи були використані на Полтавському державному підприємстві «Виробниче об'єднання «Знамено», на державному науково-виробничому підприємстві «Демітекс» (м. Полтава) при вирішенні проблеми упакування виготовленої продукції.

6. Висновки

Математичне моделювання в геометричному проектуванні з урахуванням похибок вихідних даних (метричних характеристик та параметрів розміщення) на основі використання інтервальної геометрії назвемо інтервальним математичним моделюванням, а відповідну математичну модель оптимізаційної задачі геометричного проектування — інтервальною математичною моделлю задачі оптимізації.

Вирішені такі наукові задачі:

— розроблено конструктивні засоби математичного моделювання геометричних об'єктів в інтервальних просторах на основі використання основних положень інтервальної геометрії, а саме: побудовано метричні інтервальні простори, інтервальні квазілінійні поверхні трьохвимірного та багатовимірного інтервальних просторів;

— розроблено конструктивні засоби математичного моделювання відношень інтервальних геометричних об'єктів на основі введення поняття інтервального Φ-відображення та нормалізованого інтервального Φ-відображення;

— наведено приклади рівнянь інтервальних поверхонь, інтервальних Φ-відображень, які ґрунтуються на проведених теоретичних дослідженнях і використані при побудові інтервальних математичних моделей задач розміщення [24–29].

Література

1. Стоян, Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. — Киев: Наукова думка, 1986. — 268 с.
2. Стоян, Ю. Г. Полный класс Φ-функций для базовых двумерных Φ-объектов [Текст] / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Н. И. Чернов, А. В. Панкратов // Доповіді НАН України. Сер. А. — 2010. — № 12. — С. 25–30.
3. Stoyan, Yu. G. Local Optimization Method in Placement Problems of Polygons [Text] / Yu. G. Stoyan, A. V. Pankratov // Доповіді НАН України. Сер. А. — 2001. — № 9. — С. 98–103.
4. Stoyan, Y. Construction of a Φ-function for two convex polytopes [Text] / Y. Stoyan, J. Terno, M. Gil, T. Romanova, G. Scheithauer // Applicationes Mathematicae. — 2002. — Vol. 29, № 2. — P. 199–218. doi:10.4064/am29-2-6
5. Stoyan, Y. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip [Text] / Y. Stoyan, G. Yas'kov // European Journal of Operational Research. — 2004. — Vol. 156, № 3. — P. 590–600. doi:10.1016/s0377-2217(03)00137-1
6. Stoyan, Y. Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints [Text] / Y. Stoyan, G. Yaskov // International Transactions in Operational Research. — 1998. — Vol. 5, № 1. — P. 45–57. doi:10.1016/s0969-6016(98)00003-3
7. Milenkovic, V. Two approximate Minkowski sum algorithms [Text] / V. Milenkovic, E. Sacks // International Journal of Computational Geometry & Applications. — 2010. — Vol. 20, № 04. — P. 485–509. doi:10.1142/s0218195910003402
8. Bennell, J. A. The geometry of nesting problems: A tutorial [Text] / J. A. Bennell, J. F. Oliveira // European Journal of Operational Research. — 2008. — Vol. 184, № 2. — P. 397–415. doi:10.1016/j.ejor.2006.11.038
9. Birgin, E. G. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach [Text] / E. G. Birgin, J. M. Martínez, D. P. Ronconi // European Journal of Operational Research. — 2005. — Vol. 160, № 1. — P. 19–33. doi:10.1016/j.ejor.2003.06.018
10. Milenkovic, V. J. Translational polygon containment and minimal enclosure using mathematical programming [Text] / V. J. Milenkovic, K. Daniels // International Transactions in Operational Research. — 1999. — Vol. 6, № 5. — P. 525–554. doi:10.1111/j.1475-3995.1999.tb00171.x
11. Bennell, J. Tools of mathematical modeling of arbitrary object packing problems [Text] / J. Bennell, G. Scheithauer, Y. Stoyan, T. Romanova // Annals of Operations Research. — 2008. — Vol. 179, № 1. — P. 343–368. doi:10.1007/s10479-008-0456-5
12. Moore, R. E. Interval analysis [Text] / R. E. Moore. — N.Y.: Prentice-Hall, 1966. — 400 p.
13. Kaucher, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space IR [Text] / E. Kaucher // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). Computing Supplementum. — 1980. — Vol. 2. — P. 33–49. doi:10.1007/978-3-7091-8577-3_3
14. Калмыков, С. А. Методы интервального анализа [Текст] / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. — Новосибирск: Наука, 1986. — 224 с.
15. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. — М.: Мир, 1987. — 356 с.

16. Markov, S. M. Extended interval arithmetic involving infinite intervals [Text] / S. M. Markov // Mathematica Balkanika. — 1992. — № 6. — P. 269–304.
17. Shary, S. P. Solving the tolerance problem for interval linear equations [Text] / S. P. Shary // Interval Computations. — 1994. — № 2. — P. 6–26.
18. Стоян, Ю. Г. Введення в інтервальну геометрію [Текст]: навч. посіб. / Ю. Г. Стоян. — Х.: ХНУРЕ, 2006. — 98 с.
19. Стоян, Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов [Текст] / Ю. Г. Стоян // Доклады НАН Украины. Сер. А. — 1996. — № 7. — С. 23–25.
20. Стоян, Ю. Г. Интервальные отображения [Текст] / Ю. Г. Стоян // Доповіді НАН України. — 1996. — № 10. — С. 57–63.
21. Стоян, Ю. Г. Account of errors in optimization placement problem [Text] / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова // Проблемы машиностроения. — 1998. — Т. 1, № 2. — С. 31–41.
22. Романова, Т. Е. Интервальное пространство $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ [Текст] / Т. Е. Романова // Доклады НАН Украины. — 2000. — № 9. — С. 36–41.
23. Stoyan, Y. Ф-function for complex 2D objects [Text] / Y. Stoyan, M. Gil, J. Terno, G. Scheithauer // 4OR QUarterly JoUrnal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. — 2004. — Т. 2, № 1. — P. 69–84.
24. Евсеева, Л. Г. Математическая модель и метод решения задачи упаковки интервальных параллелепипедов [Текст] / Л. Г. Евсеева // Доклады НАН Украины. — 2008. — № 2. — С. 48–53.
25. Евсеева, Л. Г. Задача упаковки интервальных кругов [Текст] / Л. Г. Евсеева, Г. Н. Яськов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2008. — № 1/4(31). — С. 25–29.
26. Евсеева, Л. Г. Задача упаковки интервальных многоугольников [Текст]: тези доповідей XI міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем», Україна, Дніпропетровськ, 2013 р. / Л. Г. Евсеева, Ю. Ю. Глушко. — Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 2013. — С. 274–275.
27. Евсеева, Л. Г. Задача упаковки интервальных цилиндров в интервальную призму [Текст] / Л. Г. Евсеева, А. Н. Чугай // Системи управління, навігації та зв'язку. — Київ, 2007. — С. 121–128.
28. Евсеева, Л. Г. Задача упаковки большого числа интервальных шаров в интервальную цилиндрическую область [Текст] / Л. Г. Евсеева, Г. Н. Яськов // Прикладная геометрия и инженерная графика. — К.: КНУБА, 2010. — Вып. 85. — С. 306–312.
29. Евсеева, Л. Г. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии [Текст] / Л. Г. Евсеева, Г. Н. Яськов // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2010. — № 7(48). — С. 95–98.
30. Інтервальне математичне моделювання оптимізаційної задачі пакування многогранників [Текст]: матеріали Третьої міжнар. науково-технічної конференції «Комп'ютерна математика в інженерії, науці та освіті», (CMSEE-2009), Україна, Полтава, 2009 р. — Полтава: Полтавський національній технічний університет ім. Ю.Кондратюка, 2009. — С. 40–41.
31. А. с. № 24827 Україна. Комп'ютерна програма «Packing of Interval Parallelepipeds» / Стоян Ю. Г., Панкратов О. В., Євсеєва Л. Г. — заявл. 01.04.08; опубл. 25.06.08.
32. А с. № 25506 Україна. Комп'ютерна програма «Packing of Interval Polygons» / Панкратов О. В., Євсеєва Л. Г. — заявл. 12.07.08; опубл. 28.08.08.
33. А. с. № 27362 Україна. Комп'ютерна програма «Имитационное моделирование свойств сплава» / Стоян Ю. Г., Євсеєва Л. Г., Яськов Г. Н. — заявл. 30.12.08; опубл. 23.01.09.

СРЕДСТВА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Статья посвящена разработке современных конструктивных средств построения математических моделей геометрических объектов и отношений геометрических объектов интервальных пространств и их применению при построении интервальных математических моделей оптимизационных задач геометрического проектирования в интервальном пространстве. Полученные новые научно обоснованные разработки в теории геометрического проектирования и интервальной геометрии обеспечивают решение важной прикладной проблемы учета погрешностей в геометрическом проектировании.

Ключевые слова: геометрическое проектирование, интервальная геометрия, интервальная математическая модель оптимизационной задачи размещения.

Євсеєва Людмила Григорівна, *кандидат фізико-математичних наук, доцент, Полтавське вище міжрегіональне професійне училище, Україна,* ***e-mail: lg.yevseeva@gmail.com***.

Евсеева Людмила Григорьевна, *кандидат физико-математических наук, доцент, Полтавское высшее межрегиональное профессиональное училище, Украина.*

Yevseeva Lyudmila, *Poltava interregional higher vocational school, Ukraine,* ***e-mail: lg.yevseeva@gmail.com***