12. Кунгурцев, А. Методика проведения обучения основам проектирования программных систем в виде ролевых компьютерных игр [Текст]: сб. докл. / А. Кунгурцев, А. Блажко, С. Марулин // Годишник на технически университет София. — 2010. — Том 1. — С. 123–126.
13. Кунгурцев, А. Б. Модель процесса определения требований к программному продукту [Текст] / А. Б. Кунгурцев, С. А. Калинина, Н. А. Новикова // Вісник ноціонального технічного університету «ХПІ». Новые решения в современных технологиях. — 2013. — № 38(1011). — С. 55–58.
14. Hangos, K. M. Process Modelling and Model Analysis [Text] / K. M. Hangos, Ia. T. Cameron. — New York: Academic Press, 2001. — T. 4. — 543 p.
15. Kruchten, P. The Rational Unified Process: An Introduction [Text] / P. Kruchten. — Ed. 3. — Boston: Addison Wesley, 2003. — 351 p.
16. Белоусов, А. И. Дискретная математика [Текст] / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев. — Москва: МГТУ им. Баумана, 2006. — Т. XIX. — 743 с.
17. Enderton, H. B. Elements of Set Theory [Text] / H. B. Enderton. — New York: Academic Press, Inc, 1977. — 280 p.
18. Rogers, Y. Interaction Design: Beyond Human — Computer Interaction [Text] / Y. Rogers, H. Sharp, J. Preece. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2011. — 602 p.

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ РОБОТИ УЧНЯ З МОДЕЛЛЮ ВИЯВЛЕННЯ ВИМОГ ДО ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

У статті автори ставлять задачу моделювання процесу виявлення вимог до програмного забезпечення. Опираючись на раніше розроблену математичну модель, автори наводять алгоритм роботи учня з моделлю. Передбачається використовувати модель в навчанні аналітиків сфери інформаційних технологій, тому значна увага в статті приділена механізму оцінювання дій і якості знань учня.

Ключові слова: модель виявлення вимог, алгоритм роботи учня, предметна область, оцінка знань.

Кунгурцев Алексей Борисович, *кандидат технических наук, профессор кафедры системного программного обеспечения, Одесский национальный политехнический университет, Украина,* ***e-mail: abkun@te.net.ua****.*

Калинина София Александровна, *кафедра системного программного обеспечения, Одесский национальный политехнический университет, Украина,* ***e-mail: kalininasofiya@gmail.com****.*

Кунгурцев Олексій Борисович, *кандидат технічних наук, професор кафедри системного програмного забезпечення, Одеський національний політехнічний університет, Україна.*

Калініна Софія Олександрівна, *кафедра системного програмного забезпечення, Одеський національний політехнічний університет, Україна.*

Kungurtsev Aleksey, *Odessa National Polytechnic University, Ukraine,* ***e-mail: abkun@te.net.ua****.*

Kalinina Sofiia, *Odessa National Polytechnic University, Ukraine,* ***e-mail: kalininasofiya@gmail.com***

УДК 004.01:519.8
DOI: 10.15587/2312-8372.2014.33786

Слесаренко А. П., Несторенко А. В.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ С УЧЕТОМ СКИДОК

Исследованы причины низкой эффективности математической модели складской логистики с учетом скидок. Построена уточненная модель управления запасами с разным уровнем цен для информационной системы логистики предприятия. Разработаны алгоритмы определения оптимального размера партии завоза и оптимального количества транспортных средств для ее доставки в этой ситуации.

Ключевые слова: *информационная система, логистика, математические модели, скидки, оптимизация, управления запасами.*

1. Введение

Кроме того, что процессы складской логистики промышленных предприятий имеют нелинейную структуру, они, зачастую, описываются кусочно-непрерывными или дискретными функциями. Это вызвано спецификой параметров, описывающих логистические потоки. В частности, к ним относятся: цена, имеющая несколько уровней; вместимость транспортного средства; их количество и т. д. Поэтому для эффективной логистики требуется создание эффективной информационной системы, основанной на принятии оптимальных управленческих решений при различных вариантах значений параметров описываемых процессов. Следовательно, возникает необходимость разработки математических моделей складской логистики. На данный момент [1] собрано более трехсот оптимизационных моделей управления запасами [2]. Их внедрение на предприятиях требует применения информационных технологий их поддержки [3]. Одной из основных является модель с учетом скидок (с несколькими уровнями цен) [4]. Но, на практике они используются достаточно редко в связи с их низкой адекватностью реальным логистическим процессам [5–7]. В случае принятия скидки, увеличивается размер партии поставки, что может потребовать увеличения числа транспортных средств, и приводит к задаче определения их оптимального количества.

Следовательно, построение математических моделей управления запасами с высокой степенью адекватности с учетом скидок является актуальной проблемой при создании эффективной информационной системы логистики промышленного предприятия.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

За время, прошедшее с момента, когда в 1934 году Р. Вильсон определил связь между материальными и финансовыми потоками складской логистики, в результате чего и была построена оптимизационная модель EOQ (англ. the basic economic order quantity model) [8], был создан комплекс моделей управления запасами для различных вариантов функционирования логистических процессов. Но, по мнению ряда исследователей [9–11], «можно утверждать, что рассматриваемый инструментарий (в т. ч. все модификации формулы Вильсона) имеет негативную репутацию среди специалистов. Его считают чисто теоретическим, неприемлемым для практики» [12].

Одним из основных обстоятельств такого отношения к моделям управления запасами считается тот факт, что «результат расчета имеет существенное отклонение от принятых на практике партий заказов» [12]. Следовательно, необходимо определить и устранить причины низкой адекватности математических моделей управления запасами.

В [13] предложено при построении моделей управления запасами использовать «учет временной стоимости денег (издержек/доходов)», учитывая моменты входа-выхода финансовых потоков в логистической системе. Для упрощения модели (на самом деле — усложнения применения и анализа, приведшего к снижению адекватности реальным логистическим процессам) за моменты входа-выхода финансовых потоков были взяты середины интервала повторного заказа. При этом использовалась схема начисления простых процентов, которая адекватно работает только в краткосрочном периоде планирования логистического процесса.

В [14] предложено при построении моделей управления запасами приводить все финансовые потоки к одному моменту времени, учитывая все их моменты входа-выхода в логистической системе (не усредняя их), с использованием схемы начисления сложного процента. Учитывая этот подход, в [14] построена измененная модель EOQ и аналитически обоснована возможность доставки партии продукции несколькими транспортными средствами.

Следовательно, возникает дальнейшая задача построения измененной модели управления запасами с учетом скидок, базирующейся на новой модели EOQ.

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является повышение адекватности математических моделей управления запасами с учетом скидок для увеличения эффективности информационной системы логистики предприятия.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

— определить причины низкой адекватности математических моделей управления запасами с учетом скидок;
— устранить эти причины и построить новые математические модели управления запасами с учетом скидок;
— определить условия применения этих моделей на практике.

4. Анализ построения модели управления запасами с учетом скидок

Одной из основных экономико-математических моделей в управлении запасами, построенных на базе модели EOQ, является модель управления запасами с учетом скидок (англ. EOQ with discounts), которая характеризуются следующими допущениями:

— интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной;
— заказ доставляется со склада, на котором хранится ранее произведенный товар;
— время поставки заказа является известной и постоянной величиной;
— каждый заказ поставляется в виде одной партии;
— затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа;
— затраты на хранение запаса пропорциональны его размеру;
— отсутствие запаса (дефицит) является недопустимым.

Введем следующую систему обозначений:

T — горизонт планирования (дн.);
D — спрос за период T (ед./Т);
c_S — стоимость подачи одного заказа (€);
c_1 — стоимость хранения единицы товара за период T (€/ед.);
t_S — время между выполнениями заказов (дн.);
μ — ежедневный спрос (ед./дн.);
p — закупочная цена (€/ед.);
r — процентная ставка в день;
q — объем заказа (ед.);
TC — общие затраты за период T (€);
R — наценка на единицу товара;
Π — прибыль за период T (€/ед.).

Постановка задачи: известна следующая информация о цене:

$$p=\begin{cases} p_1, q\in[0;q_1), \\ p_2, q\in[q_1;q_2), \\ \dots \\ p_m, q\in[q_{m-1};\infty), \end{cases} \qquad (1)$$

при этом $p_1>p_2>\dots>p_m$.

Определить время между поставками t_S (дн.) (объем партии поставки q (ед.)), чтобы общие издержки TC на доставку товара, хранение и закупку с учетом скидок за период T были минимальны при полном удовлетворении спроса за этот период.

Функция общих издержек является кусочно-непрерывной с разрывами первого рода типа «скачек» и имеет вид [15]:

$$TC(q)=\begin{cases} \dfrac{c_S D}{q}+\dfrac{1}{2}c_{11}Tq+p_1 D,\ q\in[0;q_1), \\ \dfrac{c_S D}{q}+\dfrac{1}{2}c_{12}Tq+p_2 D,\ q\in[q_1;q_2), \\ \dots \\ \dfrac{c_S D}{q}+\dfrac{1}{2}c_{1m}Tq+p_m D,\ q\in[q_{m-1};\infty), \end{cases} \qquad (2)$$

где $c_{1i}, i=\overline{1,m}$ — стоимость хранения единицы товара за период T, соответствующая закупочной цене $p_i, i=\overline{1,m}$.

Оптимальный объем поставки q_0 будет равен объему, при котором функция общих издержек (2) достигает наименьшего значения. В случае нескольких уровней цен, для минимизации вычислений, разработан алгоритм определения оптимального объема поставки [15].

При этом стоимость закупки за период T (третье слагаемое в (2)) находилась как сумма стоимостей закупок за каждый период t_S:

$$pD = pq + pq + \ldots + pq, n = D/q, \quad (3)$$

т. е. при суммировании не приводились к одному моменту времени. Такой способ определения стоимости закупки правильный только в случае оплаты всей потребленной продукции D в момент T (выплаты «постнумерандо»). Чаще используется принцип оплаты «пренумерандо», т. е. сразу же в момент поставки соответствующей партии товара. В этом случае суммы денег, относящихся к разным моментам времени, необходимо привести к одному моменту с учетом временной стоимости денег:

$$pq(1+r)^{nt_S} + pq(1+r)^{(n-1)t_S} + \ldots + pq(1+r)^{t_S} = = pq\frac{(1+r)^T - 1}{(1+r)^{t_S} - 1}. \quad (4)$$

Кроме того, после проведенного анализа построения базовой модели EOQ, были сделаны следующие замечания [14]:

— в модели общие издержки за период t_S находились как сумма стоимости доставки, относящейся к началу цикла, и стоимости хранения, относящейся к концу цикла, т. е. при суммировании не приводились к одному моменту времени;

— в модели общие издержки за период T рассчитывались как произведение стоимости доставки и хранения партии размера q за один цикл на количество циклов n за период T, и не учитывалось, что эти суммы относились к разным моментам времени, т. е. при суммировании не приводились к одному моменту времени.

5. Измененные модели управления запасами с учетом скидок

5.1. Построение новой модели с учетом скидок. Учитывая замечания к построению модели с учетом скидок, приведя все суммы, относящиеся к разным моментам времени, к моменту T, получим измененную модель (для удобства построения, анализа и применения перейдем от задачи минимизации издержек к задаче максимизации прибыли).

Обозначим:

$$t_{S1} = \frac{q_1}{\mu}, \quad t_{S2} = \frac{q_2}{\mu}, \quad \ldots, \quad t_{S(n-1)} = \frac{q_{n-1}}{\mu}. \quad (5)$$

Функция прибыли будет иметь вид [13]:

$$\Pi(t_S) = \begin{cases} ((1+r)^T - 1)\left(\frac{p\mu(1+R)}{\ln(1+r)} - (c_S + p_1\mu t_S)\frac{(1+r)^{t_S}}{(1+r)^{t_S} - 1}\right), \ t_S \in [0; t_{S1}), \\ \left((1+r)^T - 1)(\frac{p\mu(1+R)}{\ln(1+r)} - (c_S + p_2\mu t_S)\frac{(1+r)^{t_S}}{(1+r)^{t_S} - 1}\right), \ t_S \in [t_{S1}; t_{S2}), \\ \ldots \\ ((1+r)^T - 1)\left(\frac{p\mu(1+R)}{\ln(1+r)} - (c_S + p_m\mu t_S)\frac{(1+r)^{t_S}}{(1+r)^{t_S} - 1}\right), \ t_S \in [t_{S(m-1)}; \infty). \end{cases} \quad (6)$$

Алгоритм определения оптимального времени между завозами (объема поставки) с учетом скидок.

1. При цене $p = p_m$ находим оптимальное время между завозами по формуле Вильсона:

$$t_{S0m} = \sqrt{\frac{2c_S}{rp_m\mu}}.$$

Если $t_{S(m-1)} \le t_{S0m}$, решение $t_{S0} = t_{S0m}$.

В противном случае находится $\Pi(t_{S(m-1)})$ по формуле (6).

2. При цене $p = p_{m-1}$ находим оптимальное время между завозами по формуле Вильсона:

$$t_{S0(m-1)} = \sqrt{\frac{2c_S}{rp_{m-1}\mu}}.$$

Если $t_{S(m-2)} \le t_{S0(m-1)} < t_{S(m-1)}$, находим $\Pi(t_{S0(m-1)})$ по формуле (6).

Если $\Pi(t_{S0(m-1)}) \ge \Pi(t_{S(m-1)})$, решение $t_{S0} = t_{S0(m-1)}$, в противном случае решение $t_{S0} = t_{S(m-1)}$.

В противном случае находится $\Pi(t_{S(m-2)})$ по формуле (6).

3. И т. д. до определения t_{S0}.

Вывод. В результате применения измененной модели управления запасами с учетом скидок решение об оптимальном размере партии завоза (оптимальном времени между поставками) может, как совпадать, так и отличаться от решения, полученного в классической модели (рис. 1, 2).

При этом общие издержки (прибыль) за период планирования имеют существенные различия.

Рис. 1. График прибыли предприятия $\Pi(t_S)$ в случае реагирования на скидку

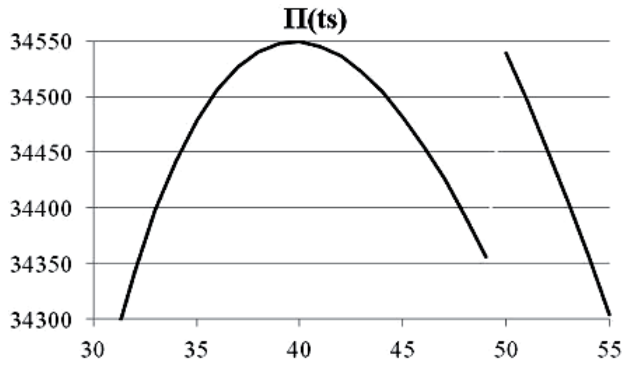

Рис. 2. График прибыли предприятия $\Pi(t_S)$ в случае игнорирования скидки

5.2. Построение модели управления запасами с учетом скидок и со стоимостью доставки, зависящей от объема партии. Стоимость доставки партии продукции c_S складывается из постоянной c_{S0} (стоимость инициализации доставки) и условно-переменной составляющей, зависящей от стоимости доставки единицы продукции c_{S1} и объема партии q при некоторых условиях.

В случае доставки партии продукции k транспортными средствами вместимостью V_S, стоимость доставки определяется следующим образом:

$$c_S = c_{S0} + kc_{S1}V_S \ge c_{S0} + c_{S1}\mu t_S. \qquad (7)$$

Неравенство возникает из-за неполной загрузки одного транспортного средства.

Алгоритм определения оптимального времени между завозами (объема поставки) с учетом скидок и со стоимостью доставки, зависящей от объема партии.

1-й шаг. При цене $p = p_m$ находим время между заказами t^*_{Sm} по формуле:

$$t^*_{Sm} = \sqrt{\frac{2c_S}{r(c_{S1}+p_m)\mu}}. \qquad (8)$$

Если $t_{S(m-1)} \le t^*_{Sm}$, то:

— находим возможное количество необходимых транспортных средств (целое число k_m из неравенства (9)):

$$\frac{\mu t^*_{Sm}}{V_S} - 1 \le k_m < \frac{\mu t^*_{Sm}}{V_S}. \qquad (9)$$

— находим время между заказами t^{**}_{Sm} по формуле:

$$t^{**}_{Sm} = \sqrt{\frac{2(c_{S0}+(k_m+1)c_{S1}V_S)}{rp_m\mu}}. \qquad (10)$$

Если $t^{**}_{Sm} > \dfrac{(k_m+1)V_S}{\mu}$, рассчитываем прибыль $\Pi_m(l)$ по формуле:

$$\Pi_m(l) = ((1+r)^T - 1)\times \left(\frac{p\mu(1+R)}{\ln(1+r)} - (c_{S0} + l(c_{S1}+p_m)V_S)\frac{(1+r)^{\frac{V_S}{\mu}l}}{(1+r)^{\frac{V_S}{\mu}l} - 1}\right),$$
$$l = k_m,\ k_m+1. \qquad (11)$$

Если $\Pi_m(k_m) > \Pi_m(k_m+1)$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k_m$, в противном случае $k_0 = k_m + 1$. Оптимальный объем заказа $q_0 = k_0 V_S$, оптимальное время между заказами $t_{S0} = k_0\dfrac{V_S}{\mu}$.

Если $t^{**}_{Sm} \le \dfrac{(k_m+1)V_S}{\mu}$, рассчитываем прибыль $\Pi_m(k_m)$ по формуле (11) и $\Pi(t^{**}_{Sm})$ по формуле:

$$\Pi(t^{**}_{Sm}) = ((1+r)^T - 1)\left(\frac{p\mu(1+R)}{\ln(1+r)} - (c_{S0} + (k_m+1)c_{S1}V_S + p_m\mu t^{**}_{Sm})\frac{(1+r)^{t^{**}_{Sm}}}{(1+r)^{t^{**}_{Sm}} - 1}\right). \qquad (12)$$

Если $\Pi_m(k_m) > \Pi(t^{**}_{Sm})$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k_m$, оптимальный объем заказа $q_0 = k_0V_S$, оптимальное время между заказами $t_{S0} = k_0\dfrac{V_S}{\mu}$, в противном случае $k_0 = k_m + 1$, $t_{S0} = t^{**}_{Sm}$, $q_0 = \mu t^{**}_{Sm}$.

Если $t^*_{Sm} < t_{S(m-1)}$, то:

— находим возможное количество необходимых транспортных средств (целое число k^*_{m-1} из неравенства (13)).

$$\frac{\mu t_{S(m-1)}}{V_S} - 1 \le k^*_{m-1} < \frac{\mu t_{S(m-1)}}{V_S}; \qquad (13)$$

— рассчитываем прибыль $\Pi_m(k^*_{m-1}+1)$ по формуле (11).

2-й шаг. При цене $p = p_{m-1}$ находим время между заказами $t^*_{S(m-1)}$ по формуле (8).

Если $t_{S(m-2)} \le t^*_{S(m-1)}$, то:

— находим возможное количество необходимых транспортных средств (целое число k_{m-1} из неравенства (9));

— находим время между заказами $t^{**}_{S(m-1)}$ по формуле (10).

Если $t^{**}_{S(m-1)} > \dfrac{(k_{m-1}+1)V_S}{\mu}$, рассчитываем прибыль $\Pi_{m-1}(l)$ по формуле (11).

Если $\Pi_m(k^*_{m-1}+1) = \max(\Pi_m(k^*_{m-1}+1),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}+1))$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k^*_{m-1}+1$ (рис. 3); если $\Pi_{m-1}(k_{m-1}) = \max(\Pi_m(k^*_{m-1}+1),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}+1))$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k_{m-1}$; если $\Pi_{m-1}(k_{m-1}+1) = \max(\Pi_m(k^*_{m-1}+1), \Pi_{m-1}(k_{m-1}), \Pi_{m-1}(k_{m-1}+1))$,

 ISSN 2226-3780

оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k_{m-1} + 1$ (рис. 4). Оптимальный объем заказа $q_0 = k_0 V_S$, оптимальное время между заказами $t_{S0} = k_0 \frac{V_S}{\mu}$.

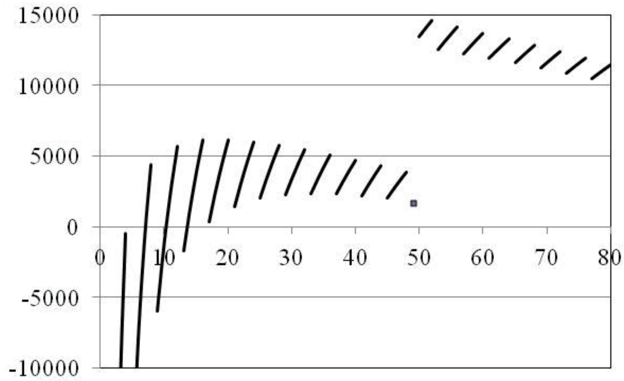

Рис. 3. График прибыли предприятия $\Pi(t_S)$ в случае реагирования на скидку при стоимости доставки, зависящей от объема партии

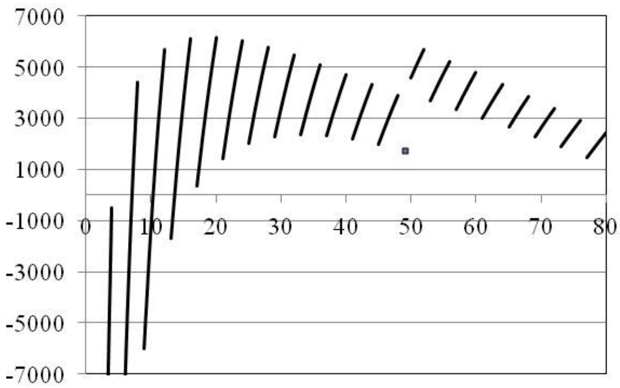

Рис. 4. График прибыли предприятия $\Pi(t_S)$ в случае игнорирования скидки при стоимости доставки, зависящей от объема партии

Если $t^{**}_{S(m-1)} \le \frac{(k_{m-1}+1)V_S}{\mu}$, рассчитываем прибыль $\Pi_{m-1}(k_{m-1})$ по формуле (11) и $\Pi(t^{**}_{S(m-1)})$ по формуле (12).

Если $\Pi_m(k^*_{m-1}+1) = \max(\Pi_m(k^*_{m-1}+1),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}),\ \Pi(t^{**}_{S(m-1)}))$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k^*_{m-1}+1$; если $\Pi_{m-1}(k_{m-1}) = \max(\Pi_m(k^*_{m-1}+1),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}),\ \Pi(t^{**}_{S(m-1)}))$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k_{m-1}$. Оптимальный объем заказа $q_0 = k_0 V_S$, оптимальное время между заказами $t_{S0} = k_0 \frac{V_S}{\mu}$. Если $\Pi(t^{**}_{S(m-1)}) = \max(\Pi_m(k^*_{m-1}+1),\ \Pi_{m-1}(k_{m-1}),\ \Pi(t^{**}_{S(m-1)}))$, оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k_{m-1}+1$, $t_{S0} = t^{**}_{S(m-1)}$, $q_0 = \mu t^{**}_{S(m-1)}$.

Если $t^*_{S(m-1)} < t_{S(m-2)}$, то:

— находим возможное количество необходимых транспортных средств (целое число k^*_{m-2} из неравенства (13));

— рассчитываем прибыль $\Pi_{m-1}(k^*_{m-2}+1)$ по формуле (11).

Если $\Pi_m(k^*_{m-1}+1) > \Pi_{m-1}(k^*_{m-2}+1)$, то оптимальное количество транспортных средств $k_0 = k^*_{m-1}+1$, оптимальный объем заказа $q_0 = k_0 V_S$, оптимальное время между заказами $t_{S0} = k_0 \frac{V_S}{\mu}$, в противном случае продолжаем действия аналогичные 2-му шагу до определения оптимального количества транспортных средств, объема заказа и времени между заказами.

6. Анализ результатов применения моделей с учетом скидок

6.1. Сравнительный анализ классической и измененной модели с учетом скидок. Спрос на продукцию равномерно распределен в течении $T = 360$ дн. со средним ежедневным спросом $\mu = 25$ ед./дн., стоимость доставки партии товара $c_S = 400$ €, закупочная цена $p_1 = 20$ €/ед., наценка на единицу товара 20 % ($R = 0{,}2$), процентная ставка 0,1 % в день ($r = 0{,}001$). При закупке партии продукции не менее $q_1 = 1250$ ед. предоставляется скидка: а) 5 %, б) 0,1 %. Найти оптимальные характеристики логистического процесса: время между заказами, объем заказа, прибыль за период T.

Решение, полученное при использовании классической модели (2):

а) $p_2 = 19$ €/ед., $c_{11} = 7{,}2$ €/ед. в год, $c_{12} = 6{,}84$ €/ед. в год.

1. При цене $p_2 = 19$ €/ед., находим оптимальный объем завоза:

$$q_{02} = \sqrt{\frac{2*400*25*360}{6{,}84}} = 1026 \ \text{(ед.)}.$$

Так как 1026 < 1250, находим:

$$TC(1250) = \frac{400*25*360}{1250} + \frac{1}{2}*6{,}84*1250 + 19*25*360 = 178155 \ (€).$$

2. При цене $p_1 = 20$ €/ед., находим оптимальный объем завоза:

$$q_{01} = \sqrt{\frac{2*400*25*360}{7{,}2}} = 1000 \ \text{(ед.)}.$$

Так как $1000 < 1250$, находим:

$$TC(1000) = \frac{400*25*360}{1000} + \frac{1}{2}*7{,}2*1000 + 20*25*360 = 187200 \ (€).$$

После сравнения $TC(1000) > TC(1250)$, принимается решение:

$$q_0 = 1250 \ \text{(ед.)}, \ t_{S0} = 50 \ \text{(дн.)},$$

$$TC_0 = 178155 \ (€),$$

$$\Pi_0 = 216000 - 178155 = 37845 \ (€).$$

То есть, необходимо воспользоваться скидкой в 5 % и привозить за один раз 1250 ед. товара на 50 дн. При этом за 360 дн. издержки составят 178155 €, прибыль — 37845 €.

Решение, полученное при использовании измененной модели (6):

а) $p_2 = 19$ €/ед., $t_{S1} = 50$ дн.

1. При цене $p_2 = 19$ €/ед., находим оптимальное время между завозами:

$$t_{S02} = \sqrt{\frac{2*400}{0{,}001*19*25}} = 41 \text{ (дн.)}.$$

Так как 41 < 50, находим:

$$\Pi(50) = ((1{,}001)^{360} - 1)\times \times\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)} - (400 + 19*25*50)\frac{(1{,}001)^{50}}{(1{,}001)^{50} - 1}\right) = 45284 \text{ (€)}.$$

При цене $p_1 = 20$ €/ед., находим оптимальное время между завозами:

$$t_{S01} = \sqrt{\frac{2*400}{0{,}001*20*25}} = 40 \text{ (дн.)}.$$

Так как 40 < 50, находим:

$$\Pi(40) = ((1{,}001)^{360} - 1)\times \times\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)} - (400 + 20*25*40)\frac{(1{,}001)^{40}}{(1{,}001)^{40} - 1}\right) = 34549 \text{ (€)}.$$

После сравнения $\Pi(50) > \Pi(40)$, принимается решение:

$$q_0 = 1250 \text{ (ед.)},\ t_{S0} = 50 \text{ (дн.)},\ \Pi_0 = 45284 \text{ (€)}.$$

То есть, необходимо воспользоваться скидкой в 5 % и привозить за один раз 1250 ед. товара на 50 дн. При этом за 360 дн. прибыль составит 45284 €.

Вывод. Оптимальные решения классической и измененной модели управления запасами с учетом скидок совпадают, но прибыль во втором случае больше на 7439 € (19,7 %).

б) $p_2 = 19{,}98$ €/ед., $c_{11} = 7{,}2$ €/ед. в год, $c_{12} = 7{,}19$ €/ед. в год.

1. При цене $p_2 = 19{,}98$ €/ед., находим оптимальный объем завоза:

$$q_{02} = \sqrt{\frac{2*400*25*360}{7{,}19}} = 1001 \text{ (ед.)}.$$

Так как 1001 < 1250, находим:

$$TC(1250) = \frac{400*25*360}{1250} + \frac{1}{2}*7{,}19*1250 + 19{,}98*25*360 = 187195 \text{ (€)}.$$

2. При цене $p_1 = 20$ €/ед., находим оптимальный объем завоза:

$$q_{01} = \sqrt{\frac{2*400*25*360}{7{,}2}} = 1000 \text{ (ед.)}.$$

Так как 1000 < 1250, находим:

$$TC(1000) = \frac{400*25*360}{1000} + \frac{1}{2}*7{,}2*1000 + 20*25*360 = 187200 \text{ (€)}.$$

После сравнения $TC(1000) > TC(1250)$, принимается решение:

$$q_0 = 1250 \text{ (ед.)},\ t_{S0} = 50 \text{ (дн.)},\ TC_0 = 187195 \text{ (€)},$$

$$\Pi_0 = 216000 - 187195 = 28805 \text{ (€)}.$$

То есть, необходимо воспользоваться скидкой в 0,1 % и привозить за один раз 1250 ед. товара на 50 дн. При этом за 360 дн. издержки составят 187195 €, прибыль — 28805 € (рис. 1).

Решение, полученное при использовании измененной модели (6):

б) $p_2 = 19{,}98$ €/ед., $t_{S1} = 50$ дн.

1. При цене $p_2 = 19{,}98$ €/ед., находим оптимальное время между завозами:

$$t_{S02} = \sqrt{\frac{2*400}{0{,}001*19{,}98*25}} = 40 \text{ (дн.)}.$$

Так как 40 < 50, находим:

$$\Pi(50) = ((1{,}001)^{360} - 1)\times\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)} - (400 + 19{,}98*25*50)\frac{(1{,}001)^{50}}{(1{,}001)^{50} - 1}\right) = 34539 \text{ (€)}.$$

2. При цене $p_1 = 20$ €/ед., находим оптимальное время между завозами:

$$t_{S01} = \sqrt{\frac{2*400}{0{,}001*20*25}} = 40 \text{ (дн.)}.$$

Так как 40 < 50, находим:

$$\Pi(40) = ((1{,}001)^{360} - 1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)} - (400 + 20*25*40)\frac{(1{,}001)^{40}}{(1{,}001)^{40} - 1}\right) = 34549 \text{ (€)}.$$

После сравнения $\Pi(50) < \Pi(40)$, принимается решение:

$$q_0 = 1000 \text{ (ед.)},\ t_{S0} = 40 \text{ (дн.)},\ \Pi_0 = 34549 \text{ (€)}.$$

 ISSN 2226-3780

То есть, необходимо не пользоваться скидкой в 0,1 %, а привозить за один раз 1000 ед. товара на 40 дн. При этом за 360 дн. прибыль составит 34549 € (рис. 2).

Вывод. Оптимальные решения классической и измененной модели управления запасами с учетом скидок не совпадают и прибыль во втором случае больше на 5744 € (20 %).

6.2. Анализ результатов применения модели управления запасами с учетом скидок и со стоимостью доставки, зависящей от объема партии. Спрос на продукцию равномерно распределен в течение $T=360$ дн. со средним ежедневным спросом $\mu=25$ ед./дн., стоимость инициализации $c_{S0}=100$ €, стоимость доставки единицы продукции $c_{S1}=3$ €/ед., вместимость транспортного средства $V_S=100$ ед., закупочная цена $p_1=20$ €/ед., наценка на единицу товара 20 % $(R=0{,}2)$, процентная ставка 0,1 % в день $(r=0{,}001)$. При закупке партии продукции не менее $q_1=1250$ ед. предоставляется скидка: а) 5 %, б) 1 %. Найти оптимальные характеристики логистического процесса: время между заказами, объем заказа, количество транспортных средств, прибыль за период T.

Решение, полученное при использовании модели (8–13).

а) **1-й шаг.** При цене $p_2=19$ €/ед. находим время между заказами:

$$t^*_{S2}=\sqrt{\frac{2*100}{0{,}001*(3+19)*25}}=19 \quad (\text{дн.}).$$

Так как 19 < 50, то находим возможное количество необходимых транспортных средств. Из неравенства $\frac{25*50}{100}-1\le k_1^*<\frac{25*50}{100}$ следует, что $k_1^*=12$. Рассчитываем прибыль:

$$\Pi_2(k_1^*+1)=\Pi_2(13)=((1{,}001)^{360}-1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)}-\right.$$
$$\left.-(100+13*22*100)\frac{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*13}}{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*13}-1}\right)=14563.$$

2-й шаг. При цене $p_1=20$ €/ед находим время между заказами:

$$t^*_{S1}=\sqrt{\frac{2*100}{0{,}001*(3+20)*25}}=18{,}65 \quad (\text{дн.}).$$

Так как 0 < 18, то находим возможное количество необходимых транспортных средств. Из неравенства $\frac{25*18{,}65}{100}-1\le k_1<\frac{25*18{,}65}{100}$ следует, что $k_1=4$. Находим время между заказами:

$$t^{**}_{S1}=\sqrt{\frac{2*(100+(4+1)*3*100)}{0{,}001*20*25}}=80 \quad (\text{дн.}).$$

Так как $80>(4+1)*100/25=20$, то рассчитываем прибыли:

$$\Pi_1(4)=((1{,}001)^{360}-1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)}-\right.$$
$$\left.-(100+4*23*100)\frac{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*4}}{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*4}-1}\right)=6105,$$

$$\Pi_1(5)=((1{,}001)^{360}-1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)}-\right.$$
$$\left.-(100+5*23*100)\frac{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*5}}{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*5}-1}\right)=6146.$$

Так как:

$$\Pi_2(13)=\max(\Pi_2(13),\Pi_1(4),\Pi_1(5))=$$
$$=\max(14563,6105,6146),$$

то оптимальное количество транспортных средств $k_0=13$, оптимальный объем заказа $q_0=13*100=1300$ (ед.), оптимальное время между заказами $t_{S0}=13*100/25=52$ (дн.). При этом за 360 дн. прибыль составит 14563 € (рис. 3).

б) **1-й шаг.** При цене $p_2=19{,}80$ €/ед. находим время между заказами:

$$t^*_{S2}=\sqrt{\frac{2*100}{0{,}001*(3+19{,}8)*25}}=18 \quad (\text{дн.}).$$

Так как 18 < 50, то находим возможное количество необходимых транспортных средств. Из неравенства $\frac{25*50}{100}-1\le k_1^*<\frac{25*50}{100}$ следует, что $k_1^*=12$. Рассчитываем прибыль:

$$\Pi_2(k_1^*+1)=\Pi_2(13)=((1{,}001)^{360}-1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)}-\right.$$
$$\left.-(100+13*22{,}8*100)\frac{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*13}}{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*13}-1}\right)=5670.$$

2-й шаг. При цене $p_1=20$ €/ед находим время между заказами:

$$t^*_{S1}=\sqrt{\frac{2*100}{0{,}001*(3+20)*25}}=18{,}65 \quad (\text{дн.}).$$

Так как 0 < 18, то находим возможное количество необходимых транспортных средств. Из неравенства $\frac{25*18{,}65}{100}-1\le k_1<\frac{25*18{,}65}{100}$ следует, что $k_1=4$. Находим время между заказами:

$$t^{**}_{S1}=\sqrt{\frac{2*(100+(4+1)*3*100)}{0{,}001*20*25}}=80 \quad (\text{дн.}).$$

Так как $80 > (4+1)*100/25 = 20$, то рассчитываем прибыли:

$$\Pi_1(4) = ((1{,}001)^{360} - 1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)} - \right.$$
$$\left. - (100 + 4*23*100)\frac{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*4}}{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*4} - 1}\right) = 6105,$$

$$\Pi_1(5) = ((1{,}001)^{360} - 1)\left(\frac{20*25*1{,}2}{\ln(1{,}001)} - \right.$$
$$\left. - (100 + 5*23*100)\frac{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*5}}{(1{,}001)^{\frac{100}{25}*5} - 1}\right) = 6146.$$

Так как:

$$\Pi_1(5) = \max(\Pi_2(13), \Pi_1(4), \Pi_1(5)) =$$
$$= \max(5670, 6105, 6146),$$

то оптимальное количество транспортных средств $k_0 = 5$, оптимальный объем заказа $q_0 = 5*100 = 500$ (ед.), оптимальное время между заказами $t_{S0} = 5*100/25 = 20$ (дн.). При этом за 360 дн. прибыль составит 6146 € (рис. 4).

7. Выводы

В работе рассмотрены проблемы низкой адекватности модели управления запасами с учетом скидок, построенной на базе модели EOQ. Проведенный анализ этой модели выявил, что при ее построении не учитывалось, что суммы денег относились к разным моментам времени, т. е. при суммировании не приводились к одному моменту времени. Это и является одной из основных причин низкой адекватности существующей модели реальным логистическим процессам.

Предложена измененная модель управления запасами с учетом скидок, показано, что оптимальные параметры логистической системы, полученные на основании этой модели, могут существенно отличатся от оптимальных решений классической модели.

В работе предложен алгоритм, позволяющий за минимальное количество операций определить оптимальный объем партии, время между поставками, количество транспортных средств при наличии нескольких уровней цен на продукцию.

Проведен сравнительный анализ результатов существующей модели управления запасами с учетом скидок и ее измененных вариантов, показаны различия в принятии решений, основанных на применении этих моделей.

Построенные математические модели логистических процессов могут быть использованы для создания эффективной информационной системы поддержки принятия решений в складской логистике.

Литература

1. Тектов, Д. А. Динамические и статистические модели управления запасами в розничной торговле [Текст]: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13 / Д. А. Тектов; С.-Петерб. гос. политехнический ун-т. — СПб, 2003. — 159 с.
2. Алесинская, Т. В. Экономико-математические методы и модели [Текст] / Т. В. Алесинская. — Таганрог: ТРТУ, 2002. — 153 с.
3. Lotfi, V. Decision support systems for production and operations management (DSSPOM) [Text] / V. Lotfi, C. C. Pegels. — Ed. 2. — Boston: Richard D. Irwin, Inc., 1991. — 359 p.
4. Соляник, Л. Г. Оптимізація параметрів управління товарно-матеріальними запасами на промисловому підприємстві [Текст] / Л. Г. Соляник // The Economic Messenger of the NMU. — 2006. — № 1. — С. 16–24.
5. Дзюба, С. А. Управление запасами: верна ли формула Вильсона? [Текст] / С. А. Дзюба // Менеджмент в России и за рубежом. — 2011. — № 4. — С. 3–12.
6. Стерлигова, А. Н. О сугубой практичности формулы Вильсона [Текст] / А. Н. Стерлигова // Логистика & система. — 2005. — № 4. — С. 42–52.
7. Стерлигова, А. Н. О сугубой практичности формулы Вильсона [Текст] / А. Н. Стерлигова // Логистика & система. — 2005. — № 5. — С. 56–61.
8. Wilson, R. H. A Scientific Routine for Stock Control [Text] / R. H. Wilson // Harvard Business Review. — 1934. — № 13. — P. 116–128.
9. Мещанкин, А. Умеете ли вы применять формулу Вильсона? [Текст] / А. Мещанкин // Логистика & система. — 2005. — № 2. — С. 37–42.
10. Лукинский, В. С. Варианты решения логистической задачи определения оптимального размера заказа [Текст] / В. С. Лукинский, И. А. Цвиринько // Организация международных и внутренних перевозок с применением принципов логистики. — СПб.: СПбГИЭУ, 2001. — 228 с.
11. Гамкрелидзе, Л. И. Логистика. Теория и практика [Текст]: учеб. пособ. / Л. И. Гамкрелидзе, Е. Л. Гамкрелидзе. — М.: МГИУ, 2009. — 279 с.
12. Стерлигова, А. Н. Оптимальный размер заказа или Загадочная формула Вильсона [Текст] / А. Н. Стерлигова, И. Семенова // Логистика & система. — 2005. — № 2. — С. 64–69.
13. Бродецкий, Г. Л. Управление запасами [Текст] / Г. Л. Бродецкий. — М.: «Эксмо», 2007. — 281 с.
14. Слесаренко, А. П. Разработка аналитических моделей оптимизации запасов информационной системы логистики предприятия [Текст] / А. П. Слесаренко, А. В. Несторенко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2014. — № 5/3(71). — С. 61–66. doi:10.15587/1729-4061.2014.27746
15. Эддоус, М. Методы принятия решений [Текст]: пер. с англ. / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. — М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. — 590 с.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ ПІДПРИЄМСТВ З УРАХУВАННЯМ ЗНИЖОК

Досліджено причини низької ефективності математичної моделі складської логістики з урахуванням знижок. Побудована уточнена модель управління запасами з різним рівнем цін для інформаційної системи логістики підприємства. Розроблені алгоритми визначення оптимального розміру партії завезення та оптимальної кількості транспортних засобів для її доставки в цій ситуації.

Ключові слова: інформаційна система, логістика, математичні моделі, знижки, оптимізація, управління запасами.

Слесаренко Анатолий Павлович, *доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, отдел моделирования и идентификации тепловых процессов, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина.*

Несторенко Александр Васильевич, *кандидат экономических наук, доцент, кафедра экономики предприятия и экономической теории, Бердянский государственный педагогический университет, Украина,* ***e-mail: anestorenko@mail.ru****.*

Слесаренко Анатолій Павлович, *доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник, відділ моделювання та ідентифікації теплових процесів, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків, Україна.*

Несторенко Олександр Васильович, *кандидат економічних наук, доцент, кафедра економіки підприємства та економічної теорії, Бердянський державний педагогічний університет, Україна.*

Slesarenko Anatoliy, *A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine.*

Nestorenko Alexander, *Berdyansk State Pedagogical University, Ukraine,* ***e-mail: anestorenko@mail.ru***