Яценко Елена Владимировна, старший преподаватель, кафедра биомедицинской кибернетики, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина.

Древко Роман Юрьевич, кафедра биомедицинской кибернетики, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина. -----

Nosovets Olena, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine, e-mail: e.nosovets@yandex.ru. Yatsenko Olena, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine.

Drevko Roman, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine

> УДК 514:519.6 DOI: 10.15587/2312-8372.2016.72051

Тержюк И. А. РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛОПАТОК И АЛГОРИТМА РАСЧЕТА НОРМИРУЕМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТОЧНОСТИ МОНОКОЛЕС ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Получена в общем виде система уравнений, описывающая реальные поверхности лопаток моноколес газотурбинных двигателей, полученные после механической обработки, с учетом погрешностей дифференцированных по вызывающим их факторам. Предложен алгоритм расчета нормируемых показателей точности моноколес газотурбинных двигателей с использованием этой системы.

Ключевые слова: погрешность, механическая обработка, лопатки, моноколеса, газотурбинный двигатель, алгоритм.

1. Введение

Цельные рабочие колеса компрессоров и турбин газотурбинных двигателей (ГТД) содержат лопатки с фасонными поверхностями, к которым предъявляются требования по точности поверхности и взаимного расположения. Схемы формообразования и режимы обработки этих колес существенно влияют на суммарную погрешность этих деталей. В связи с этим необходимо иметь алгоритм расчета погрешностей указанных моноколес, позволяющий прогнозировать точностные характеристики лопаток.

Основная проблема расчета погрешностей обработки поверхностей моноколес вытекает из особенностей формы и схемы контроля отклонений реальных поверхностей от эталонных. Для ее решения необходимо иметь специальный алгоритм, учитывающий эти особенности и нормативные требования к точности изделий, что и обосновывает актуальность проведенного исследования.

Традиционные методы расчета погрешностей механической обработки, применяемые для цилиндрических, конических, плоских и других видов деталей, неприемлемы для решения задач прогнозирования точности фасонных поверхностей лопаток цельных колес компрессоров и турбин ГТД, в связи с отсутствием аналитических зависимостей и алгоритмов для определения погрешностей формы и взаимного расположения поверхностей лопаток в соответствии с нормативными требованиями.

2. Анализ последних публикаций

В работе [1] приведена общая методика учета факторов, влияющих на точность механической обработки. В работе [2] дан алгоритм расчета нормируемых погрешностей одного из видов деталей с периодически повторяемыми поверхностями - зубчатых колес, применительно к стандартным характеристикам точности. В работах [3-5] описана технология обработки моноколес ГТД высокоскоростным фрезерованием. При этом экспериментально определены значения нормируемых показателей точности [4] и предложена методика [6-8] проведения 3-D коррекции траектории инструмента. Известны методы уменьшения деформации нежестких лопаток во время обработки [9] однако до настоящего времени не приведены аналитические зависимости и не разработан алгоритм расчета погрешностей обработки поверхностей лопаток моноколес ГТД.

3. Объект, цель и задачи исследования

Объект исследования – погрешности обработки поверхностей лопаток цельных рабочих колес компрессоров и турбин ГТД

Цель исследования — разработать аналитические зависимости и предложить алгоритм расчета погрешностей обработки поверхностей лопаток цельных рабочих колес компрессоров и турбин ГТД. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить такие задачи:

1. Установить связи между первичными геометрическими погрешностями технологической системы и нормируемыми показателями точности, получить дифференциально-интегральную матричную систему уравнений, отражающих связь радиус-вектора реальной поверхности лопатки и указанных ошибок.

2. Разработать зависимости для расчета нормируемых показателей точности моноколес.

3. Экспериментально проверить адекватность полученных моделей.

Вывод системы уравнений, описывающей реальные профиля лопаток моноколес ГТД с учетом дифференцированных по факторам погрешностей

Стандарт [10] устанавливает предельные отклонения размеров профиля пера лопаток моноколес компрессоров и турбин ГТД, а также предельные отклонения расположения фактических профилей относительно теоретических и конструкторских баз лопаток. Исходя из того, что указанные нормируемые погрешности возникают в технологической системе при механической обработке, задачу аналитического прогнозирования этих погрешностей можно решить, определив факторы, вызывающие погрешности и установив связи между ними и характеристиками точности.

Для установления связей между первичными геометрическими погрешностями технологической системы и нормируемыми показателями точности воспользуемся матричными зависимостями для преобразования систем координат [11], схема которых приведена на рис. 1. Рис. 1 отражает наличие станочной (технологической) базы, конструкторской базы (связанной с деталью), измерительной базы, а также связанные с ними и инструментом номинальные и смещенные системы координат. Индексы при S — обозначения системы и координатах X, Y, Z означают принадлежность к базам и системам координат: «Т» — технологической, «К» — конструкторской, «ИЗМ» — измерительной, «И» — инструмента, «СТ» — к неподвижной системе координат, связанной со станиной станка.

Технологическая база имеет смещение по отношению к конструкторской базе, которую можно описать матрицей $\Delta M_{\rm TД}$, отражающей все возможные смещения начала координат и относительные повороты осей. Если с конструкторскими базами детали свяжем $S_{\rm L}\{x_{\rm A}, y_{\rm A}, z_{\rm A}\}$, с технологической базой — $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$, с инструментом — $S_{\rm H}\{x_{\rm H}, y_{\rm H}, z_{\rm H}\}$, а с измерительной базой — $S_{\rm H3M}\{x_{\rm H3M}, y_{\rm H3M}, z_{\rm H3M}\}$, то можно записать следующие уравнения для номинальной поверхности $\vec{r}_{\rm L.H.}$ детали:

— в технологической СК $S_{\rm T}{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}}$:

$$\vec{r}_{\text{Д.H.T.}} = \Delta M_{\text{T}\text{J}} \cdot \vec{r}_{\text{Д.H.}}; \tag{1}$$

— в измерительной СК $S_{\text{ИЗМ}}\{x_{\text{ИЗМ}}, y_{\text{ИЗМ}}, z_{\text{ИЗM}}\}$:

$$\vec{r}_{\text{J.H.U3M.}} = \Delta M_{\text{U3M.T}} \cdot \Delta M_{\text{JT}} \cdot \vec{r}_{\text{J.H.}}; \tag{2}$$

где $\vec{r}_{\text{Д.Н.ИЗМ.}}$, $\vec{r}_{\text{Д.Н.Т.}}$, $\vec{r}_{\text{Д.H.}}$ — радиус-векторы номинального контура лопатки в заданном сечении в СК, связанные с измерительной базой, технологической базой (установочно-зажимным приспособлением) и конструкторской базой; $\Delta M_{\text{ИЗМ.Т}}$, $\Delta M_{\text{ТД}}$ — матрицы перехода между СК $S_{\text{T}}\{x_{\text{T}}, y_{\text{T}}, z_{\text{T}}\}$ и $S_{\text{ИЗМ}}\{x_{\text{ИЗМ}}, y_{\text{ИЗМ}}, z_{\text{ИЗM}}\}$, $S_{\text{T}}\{x_{\text{T}}, y_{\text{T}}, z_{\text{T}}\}$



Рис. 1. Схема расположения и взаимосвязь используемых систем координат, связанных с элементами технологической системы

и $S_{\rm K}\{x_{\rm K}, y_{\rm K}, z_{\rm K}\}$ соответственно; $\Delta M_{\rm ДT}$ — матрица обратного перехода от $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$ к $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$.

Матрица $\Delta M_{\rm TJ}$ может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta M_{\rm TJ} = \Delta M_{\rm B} \cdot \Delta M_{\rm K} \cdot \Delta M_t \cdot \Delta M_{\rm C} \cdot \Delta M_{\rm H}.$$
 (3)

Произведение пяти матриц в правой части уравнения (3) учитывает следующие факторы, вызывающие погрешность обработки: погрешность базирования (Б), кинематические ошибки движения конечных звеньев станка (К), тепловые деформации (t), силовой (С), а также наладочные движения элементов станка (H).

Структура матриц, которые составляют правую часть уравнения (3) — $\Delta M_{\rm E}$, $\Delta M_{\rm K}$, ΔM_t , $\Delta M_{\rm YB}$ и $\Delta M_{\rm H}$, а также матриц $\Delta M_{\rm ИЗМK}$, $\Delta M_{\rm KT}$ будет иметь вид:

$$\Delta M_{N} = \Delta M_{XN} \cdot \Delta M_{YN} \cdot \Delta M_{ZN} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \Delta \varphi_{ZN} & -\Delta \varphi_{YN} & \Delta x_{N} \\ -\Delta \varphi_{ZN} & 1 & \Delta \varphi_{XN} & \Delta y_{N} \\ \Delta \varphi_{YN} & -\Delta \varphi_{XN} & 1 & \Delta z_{N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N \in \{ \mathbf{5}, \mathbf{K}, \mathbf{YB}, t, \mathbf{H} \}, \qquad (4)$$

где:

$$\Delta M_{XN} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_N \\ 0 & \cos(\Delta \varphi_{XN}) & \sin(\Delta \varphi_{XN}) & 0 \\ 0 & -\sin(\Delta \varphi_{XN}) & \cos(\Delta \varphi_{XN}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$
$$\Delta M_{YN} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta \varphi_{YN}) & 0 & -\sin(\Delta \varphi_{YN}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_N \\ \sin(\Delta \varphi_{YN}) & 0 & \cos(\Delta \varphi_{YN}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$
$$\Delta M_{ZN} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta \varphi_{ZN}) & \sin(\Delta \varphi_{ZN}) & 0 & 0 \\ -\sin(\Delta \varphi_{ZN}) & \cos(\Delta \varphi_{ZN}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

— матрицы, учитывающие поворот и смещение $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$ относительно осей $X, Y, Z S_{\rm A}\{x_{\rm A}, y_{\rm A}, z_{\rm A}\}$ соответственно; $\Delta \phi_{XN}, \Delta \phi_{YN}, \Delta \phi_{ZN}$ — угловые смещения (повороты) $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$ относительно осей X, Y и $Z S_{\rm A}\{x_{\rm A}, y_{\rm A}, z_{\rm A}\}$ под воздействием N-го фактора, $\Delta x_N, \Delta y_N, \Delta z_N$ — линейные смещения $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$, относительно осей X, Yи $Z S_{\rm A}\{x_{\rm A}, y_{\rm A}, z_{\rm A}\}$ под действием N-го фактора.

Во всех матрицах, учитывающих погрешности, ввиду малости углов поворотов их синусы заменены величинами углов: $\sin(\Delta \phi_i) \approx \Delta \phi_i$, а косинусы — единицами: $\cos(\Delta \phi_i) \approx 1$.

Матрица $\Delta M_{\rm ИЗМ.T}$, учитывающая погрешности при переходе от конструкторских баз к измерительным, может быть представлена в виде:

$$\Delta M_{\rm H3M,T} = \Delta M_{\rm E \,H3M} \cdot \Delta M_{\rm \Pi} \cdot \left(\Delta M_t\right)^{-1} \cdot \Delta M_{\rm J,T}.$$
(8)

Элементы матрицы $\Delta M_{\rm 6\, И3M}$ определяются из размерной цепи измерительной схемы, а элементы матрицы ΔM_{Π} — из паспорта измерительных приборов. Матрица $\Delta M_{\rm Д.T}$ равна обратной матрице от $\Delta M_{\rm E.}$:

$$\Delta M_{\rm A,T} = \left(\Delta M_{\rm B.}\right)^{-1}.\tag{9}$$

В табл. 1 обозначено:

$$\Delta D_{\rm max} = D_3^{\rm max} - D_0^{\rm min}, \qquad (10)$$

где D_3^{max} , D_0^{min} — максимальное значение диаметра центрального отверстия заготовки и минимальное значение наружного диаметра посадочной поверхности оправки; D_{Π}^{max} , D_3^{min} — максимальное значение диаметра приспособления и минимальное значение наружного диаметра наружной базовой цилиндрической поверхности заготовки; B_{max} — максимальная ширина заготовки в осевом направлении; TCA_D — допуск на торцевое биение базовой поверхности заготовки; D_{Γ} — диаметр базовой поверхности заготовки; D_{Γ} — диаметр базовой поверхности заготовки при измерении торцевого биения;

Таблица 1

Иатрицы	Элементы матриц					
	Δx_N	Δy_N	Δz_N	$\Delta \phi_{XN}$	$\Delta \phi_{YN}$	$\Delta \phi_{ZN}$
$\Delta M_{\rm E}$	$\frac{\Delta D_{\max}}{2}$	$\frac{\Delta D_{\max}}{2}$	0	$\min\left\{\frac{\Delta D_{\max}}{2 \cdot B}; \frac{TCA_D}{D_B}\right\}$	$\min\left\{\frac{\Delta D_{\max}}{2 \cdot B}; \frac{TCA_D}{D_B}\right\}$	0
$\Delta M_{\rm K}$	$\Delta x_{\rm K}$	$\Delta y_{\rm K}$	$\Delta z_{\rm K}$	$\Delta \phi_{XK}$	$\Delta \phi_{YK}$	$[\Delta \phi_{\text{ДЕЛ}}]$
ΔM_t	$\alpha_{I\!\!I} \cdot \Delta T \cdot R_{\max}$	$\alpha_{\underline{A}} \cdot \Delta T \cdot R_{\max}$	$\alpha_{\mathcal{A}} \cdot \Delta T \cdot B_{\max}$	$\frac{\alpha_{\mathcal{I}} \cdot \Delta T \cdot (\mathcal{D}_{\max} - \mathcal{D}_{\min})}{2 \cdot \mathcal{B}_{\max}}$	$\frac{\alpha_{\underline{I}} \cdot \Delta T \cdot (D_{\max} - D_{\min})}{2 \cdot B_{\max}}$	0
$\Delta M_{\rm C}$	$\frac{P_{X \ ДM}}{C_{X \Sigma}}$	$\frac{P_{Y Д H}}{L_{Y \Sigma}}$	$\frac{P_{Z ДM}}{C_{Z \Sigma}}$	0	$rac{\delta_{\max}}{h_{\Pi}}$	0
$\Delta M_{\rm H}$	$\Delta x_{\rm HH} + \Delta x_{\rm H}$	$\Delta y_{\rm HH} + \Delta y_{\rm H}$	$\Delta z_{ m HH} + \Delta z_{ m H}$	$\Delta \phi_{xHH} + \Delta \phi_{xH}$	$\Delta \phi_{xyHH} + \Delta \phi_{yH}$	$\Delta \phi_{zHH} + \Delta \phi_{zH}$
∆ <i>М</i> Б ИЗМ	$\Delta x_{\rm E~M3M}$	$\Delta y_{\rm Б}$ изм	$\Delta z_{ m E~M3M}$	$\Delta \phi_{X \text{b} \text{N3M}}$	$\Delta \phi_{Y \text{B} \text{N3M}}$	$\Delta \phi_{Z \text{Б} \text{ИЗМ}}$
ΔM_{Π}	Δx_{Π}	Δy_{Π}	Δz_{Π}	$\Delta \phi_{X\Pi}$	$\Delta \phi_{X\Pi}$	$\Delta \phi_{X\Pi}$

Матрицы (3), (8) и (9) и их элементы

 $C_{\xi\Sigma} =$

$$\Delta \xi_K = [\Delta \xi_{\Pi C}], \ \xi \in \{x, y, z\}, \tag{11}$$

где [$\Delta\xi_{\Pi C}$], $\xi \in \{x, y, z\}$ — предельные погрешности позиционирования станка по координатам *x*, *y* и *z*; [$\Delta\phi_{\Pi E \pi}$] — предельная погрешность делительного механизма станка; α_{Π} — коэффициент линейного расширения материала

детали; $\Delta T = |T_{\rm ИЗМ} - T_{\rm ОБР}|$ — модуль разности температур при измерениях и при обработке заготовки; $R_{\rm max}$ — максимальный радиус заготовки; $D_{\rm min}$ — втулочный диаметр заготовки (у корня лопаток); $D_{\rm max}$ — периферийный диаметр заготовки (по вершинам лопаток); $P_{\xi Д U}, \xi \in \{x, y, z\}$ — компоненты суммарного вектора силы $\vec{P}_{\Sigma Д U}$, действующей на деталь со стороны инструмента;

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} C_{i\xi}}, \xi \in \{x, y, z\}, \quad (12)$$

$$M_{\mathcal{A}WZ}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{Z\mathcal{A}W}(t) - \varphi_{Z\mathcal{O}C}) & \sin(\varphi_{Z\mathcal{A}W}(t) - \varphi_{Z\mathcal{O}C}) \\ -\sin(\varphi_{Z\mathcal{A}W}(t) - \varphi_{Z\mathcal{O}C}) & \cos(\varphi_{Z\mathcal{A}W}(t) - \varphi_{Z\mathcal{O}C}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

суммарные жесткости элементов

ТС вдоль соответствующих осей;

 $C_{i\xi}, \xi \in \{x, y, z\}$ — жесткость *i*-го элемента TC в направлении соответствующей оси координат; *m* — количество элементов TC; δ_{\max} — величина деформации лопатки моноколеса, которую можно определить по следующей формуле [12]:

$$\delta_{\max} = \frac{P_{\Sigma \Lambda H} \cdot \cos\beta \cdot h_{\Lambda}^{3}}{3 \cdot E \cdot J_{X}} \cdot \left[1 + \frac{3 \cdot E \cdot J_{Z} \cdot b^{2}}{G \cdot J_{X} \cdot h_{\Lambda}^{2}} \right]^{3},$$
(13)

где β — угол наклона равнодействующей сил резания к нормали обрабатываемой поверхности; h_{Λ} — высота лопатки; E, G — модули упругости и сдвига для обрабатываемого материала; J_Z и J_X — моменты инерции лопатки при изгибе относительно оси Z (продольная ось моноколеса) и кручении относительно оси X (главная ось инерции лопатки) $S_{\rm K}\{x_{\rm K},y_{\rm K},z_{\rm K}\};$ b — ширина хорды лопатки в периферийном сечении; $\Delta\zeta_{\Phi,{\rm H}}, \Delta\varphi_{\xi,{\rm H},{\rm H}}, \zeta,\xi \in \{x,y,z\}$ — фактические наладочные корректировочные характеристики координат; $\Delta\zeta_{\rm H,{\rm H}}, \Delta\varphi_{\xi,{\rm H},{\rm H}}, \zeta,\xi \in \{x,y,z\}$ — погрешности выполнения наладочных характеристик координат.

Уравнение номинальной производящей поверхности $\vec{r}_{U.H.J.}(u,v)$ инструмента в $S_{II}\{x_{II}, y_{II}, z_{II}\}$ примет вид:

$$\vec{r}_{\text{M.H,L.}}(u,v) = M_{\text{AW}} \cdot \vec{r}_{\text{M.H.}}(u,v),$$
 (14)

где $M_{\text{ДИ}}$ — матрица [13] преобразования координат из системы координат $S_{\text{II}}\{x_{\text{II}}, y_{\text{II}}, z_{\text{II}}\}$ в систему координат $S_{\text{Д}}\{x_{\text{Д}}, y_{\text{Д}}, z_{\text{Д}}\}$, $\vec{r}_{\text{II}.\text{H.}}(u, v)$ — номинальная поверхность инструмента, заданная относительно его собственной системы координат $S_{\text{II}}\{x_{\text{II}}, y_{\text{II}}, z_{\text{II}}\}$. Матрица $M_{\rm ДИ}$ имеет следующий вид:

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{H}}(t) = M_{\mathcal{A}\mathcal{H}\mathcal{X}}(t) \cdot M_{\mathcal{A}\mathcal{H}\mathcal{Y}}(t) \cdot M_{\mathcal{A}\mathcal{H}\mathcal{Z}}(t), \tag{15}$$

где:

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{H}X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{\mathcal{A}\mathcal{H}}(t) - x_{0C} \\ 0 & \cos(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}X}(t) - \varphi_{X0C}) & \sin(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}X}(t) - \varphi_{X0C}) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}X}(t) - \varphi_{X0C}) & \cos(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}X}(t) - \varphi_{X0C}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) - \varphi_{Y0C}) & 0 & -\sin(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) - \varphi_{Y0C}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_{\mathcal{A}\mathcal{H}}(t) - y_{0C} \\ \sin(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) - \varphi_{Y0C}) & 0 & \cos(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) - \varphi_{Y0C}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}}(t) - \varphi_{Z0C}) & 0 & \cos(\varphi_{\mathcal{A}\mathcal{H}Y}(t) - \varphi_{Y0C}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & z_{AW}(t) - z_{0C} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Элементы матриц (16)–(18), учитывающие смещение и поворот $S_{II}\{x_{II}, y_{II}, z_{II}\}$ относительно $S_{II}\{x_{II}, y_{II}, z_{II}\}$ вдоль осей X, Y и Z соответственно.

 $x_{\text{ДИ}}(t), y_{\text{ДИ}}(t), z_{\text{ДИ}}(t)$ — линейные смещение $S_{\text{И}}\{x_{\text{И}}, y_{\text{И}}, z_{\text{И}}\}$ относительно $S_{\text{Д}}\{x_{\text{Д}}, y_{\text{Д}}, z_{\text{Д}}\}$ по осям X, Y и Z соответственно (рис. 1); $\varphi_{X\text{ДИ}}(t), \varphi_{Y\text{ДИ}}(t), \varphi_{Z\text{ДИ}}(t)$ — угловые смещения $S_{\text{И}}\{x_{\text{И}}, y_{\text{И}}, z_{\text{И}}\}$ и $S_{\text{Д}}\{x_{\text{Д}}, y_{\text{Д}}, z_{\text{Д}}\}$ относительно осей X, Y и Z соответственно (рис. 1); $x_{0C}, y_{0C}, z_{0C}, \varphi_{X0C}, \varphi_{Y0C}, \varphi_{Z0C}$ — линейные координаты (т. е. координаты исходной точки на рис. 1) и угловые координаты, характеризующие начальное положение инструмента относительно системы координат $S_{\text{CT}}\{x_{\text{CT}}, y_{\text{CT}}, z_{\text{CT}}\}.$

Уравнение фактического радиус-вектора $\vec{r}_{\text{И.Ф.И.}}(u,v)$ производящей поверхности относительно собственной системы координат $S_{\text{И}}\{x_{\text{И}}, y_{\text{И}}, z_{\text{И}}\}$, будет иметь следующий вид:

$$\vec{r}_{\text{I}.\Phi.\text{II.}}(u,v) = \vec{r}_{\text{I}.\text{II.}}(u,v) + \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{II.}} - \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{II.}} + \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{II.}} - \Delta \vec{r}_{\text{C}.\text{II.}} + \Delta \vec{r}_{\text{H}.\text{II.}},$$
(19)

где $\Delta \vec{r}_{T.M.}$ — геометрическая погрешность изготовления (заточки) и установки инструмента (определяется как сумма погрешностей, первая из которых берется из чертежа инструмента, а вторая — из технических условий на его установку):

 погрешность, вызванная износом инструмента (определяется из паспорта на инструмент):

$$\Delta \vec{r}_{\text{H.H.}} = \Delta \vec{r}_{\text{H3H}}(P, T_{\text{OBP}}, I) \le [\Delta \vec{r}_{\text{H3H}}], \tag{20}$$

где I — уровень вибраций в зоне резания; $[\Delta \vec{r}_{\rm И3H}]$ — допуск на износ инструмента;

— приращение радиус-вектора $\vec{r}_{\rm UH}(u,v)$, вызванное температурным расширением инструмента:

$$\Delta \vec{r}_{t.\mathrm{H.}} = \alpha_{\mathrm{H}} \cdot \Delta T \cdot \vec{r}_{t.\mathrm{H.}},\tag{21}$$

где $\alpha_{\rm H}$ — коэффициент линейного расширения материала инструмента;

приращение радиус-вектора *й*_{И.Н.}(*u*,*v*), вызванное упругими деформациями инструмента под действием сил резания:

$$\Delta \vec{r}_{\text{C.H.}}(t) = \frac{P_{X.HA}}{C_{\%}} \cdot \vec{i} + \frac{P_{Y.HA}}{C_Y} \cdot \vec{j} + \frac{P_{Z.HA}}{C_Z} \cdot \vec{k}, \qquad (22)$$

где C_X , C_Y , C_Z — жесткости инструмента относительно осей x, y и z; t — время; $P_{X.ИД}$, $P_{Y.ИД}$, $P_{Z.ИД}$ — компоненты вектора силы $\vec{P}_{ИД}$, действующей на инструмент со стороны детали:

$$\vec{P}_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{-1}\right)^T \cdot \vec{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{H}}}^T \cdot \vec{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{H}}},\tag{23}$$

где $M_{\rm HZ}$ — матрица перехода от $S_{\rm A}\{x_{\rm A}, y_{\rm A}, z_{\rm A}\}$ к $S_{\rm H}\{x_{\rm H}, y_{\rm H}, z_{\rm H}\};$

— приращение радиус-вектора инструмента $\Delta \vec{r}_{\rm H.U.}$, учитывающее действие устройств по управлению размерами и формой инструмента, в соответствии с рис. 2.

Фактическая обработанная поверхность лопатки моноколеса является в общем случае двухпараметрической огибающей [2, 14] семейства производящих поверхностей инструмента, задаваемого уравнением $\vec{r}_{\text{И}\Phi}(u,v,\Omega_1,\Omega_2)$ при движении этой поверхности с параметрами Ω_1 , Ω_2 . Уравнение этого семейства относительно $S_{\text{T}}\{X_{\text{T}},Y_{\text{T}},Z_{\text{T}}\}$ будет иметь вид:

$$\vec{r}_{\text{И.Т.}\Phi,i}(u,v,\Omega_1,\Omega_2) = \Delta M_{\text{TA}} \cdot M_{\text{ДИ}} \cdot (\vec{r}_{\text{И}\text{H}\text{V}i}(u,v) + \Delta \vec{r}_{\text{IV}} - \Delta \vec{r}_{\text{H}} - \Delta \vec{r}_{\text{CH}} + \Delta \vec{r}_{\text{H}}),$$
(24)

где Ω_1 , Ω_2 – параметры семейства; $\vec{r}_{\rm MHWi}(u,v)$ – номинальная инструментальная поверхность на i-м проходе.

Так как элементы матрицы формообразующих движений $M_{\rm ДИ}$ связаны между собой управляющей программой, и, следовательно, их можно представить как функции параметров огибания Ω_1 , Ω_2 :

$$\zeta = \zeta(\Omega_1, \Omega_2), \quad \zeta \in \{x, y, z, \varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z\}.$$
(25)

Так, например, при обработке по схеме спирального фрезерования, в качестве параметров огибания удобно выбрать программные перемещения инструмента по осям X и Z системы координат $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$.

Исходя из этого, выражение для суммарной матрицы перехода между $S_{\rm H}\{x_{\rm H},y_{\rm H},z_{\rm H}\}$ и $S_{\rm T}\{x_{\rm T},y_{\rm T},z_{\rm T}\}$ примет вид:

$$M_{\Sigma}(\Omega_1, \Omega_2) = \Delta M_{\mathrm{T,A}} \cdot M_{\mathrm{A,H}}.$$
 (26)

Учитывая следующее выражение для фактического радиус-вектора $\vec{r}_{U \oplus Ui}(u, v)$ инструментальной поверхности относительно ее собственной системы координат $S_{\rm W}\{x_{\rm M}, y_{\rm M}, z_{\rm M}\}$ для *i*-го прохода:

$$\vec{r}_{\text{I}.\Phi.\text{I}.i}(u,v) = \vec{r}_{\text{I}.\text{I}.\text{I}.i}(u,v) + \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{I}.i} - \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{I}.i} + \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{I}.i} - \Delta \vec{r}_{\text{C}.\text{I}.i} + \Delta \vec{r}_{\text{I}.\text{I}.i},$$
(27)

можно записать:

$$\vec{r}_{\mathrm{M},\Phi,\mathrm{T},i}(u,v,\Omega_1,\Omega_2) = M_{\Sigma}(\Omega_1,\Omega_2) \cdot \vec{r}_{\mathrm{M},\Phi,\mathrm{M},i}(u,v).$$
(28)

Огибающую (если она существует) семейства поверхностей (26), можно задать следующей системой уравнений:

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}(u,v,\Delta\vec{r}_{\mathrm{H},\Sigma},\Delta\vec{r}_{\mathrm{H},\mathrm{H}},\Omega_{1},\Omega_{2}) = \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{T},i}(u,v,\Omega_{1},\Omega_{2}); \\ \begin{bmatrix} \partial\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} \\ \partial u \end{bmatrix}, \frac{\partial\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial v}, \frac{\partial\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial \Omega_{1}} \end{bmatrix} = 0; \\ \begin{bmatrix} \partial\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} \\ \partial u \end{bmatrix}, \frac{\partial\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial v}, \frac{\partial\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial \Omega_{2}} \end{bmatrix} = 0.$$

$$(29)$$

Первое уравнение системы (27) выражает условие равенства координат поверхности $\vec{r}_{\text{Д.Ф.Т.}i}(u,v,\Delta\vec{r}_{\text{И.У.}},\Delta\vec{r}_{\text{H.И.}},\Omega_1,\Omega_2)$ детали (огибающая поверхность) и координат инструмента $\vec{r}_{\text{И.Ф.Т.}i}(u,v,\Omega_1,\Omega_2)$ (огибаемого семейства поверхностей) в точке касания, а второе и третье уравнения условия обкатки [6] для i-го прохода инструмента:

$$\begin{aligned} &\vec{N}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} \cdot \vec{V}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{T},i}^{\Omega_{1}} = 0; \\ &\vec{N}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} \cdot \vec{V}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{T},i}^{\Omega_{2}} = 0, \end{aligned}$$
(30)

где $\vec{V}_{U,\Phi,T,i}^{\Omega_1}$, $\vec{V}_{U,\Phi,T,i}^{\Omega_2}$ — скорость взаимного скольжения поверхностей детали и инструмента относительно параметров огибания Ω_1 , Ω_2 соответственно; $\vec{N}_{J,\Phi,T,i}$ нормаль к огибающей поверхности.

Запишем уравнения системы следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_{\beta,\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\beta,\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\beta,\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial \Omega_{1}} = 0;$$
(31)

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial \Omega_2} = 0.$$
(32)

Подставив уравнение (28) в правую часть первого уравнения системы (29) получим:

$$\vec{r}_{\mathcal{I},\Phi,\mathsf{T},i}(u,v,\Delta\vec{r}_{\mathsf{H},\Sigma},\Delta\vec{r}_{\mathsf{H},\mathsf{H}},\Omega_1,\Omega_2) = \\= M_{\Sigma}(\Omega_1,\Omega_2) \cdot \vec{r}_{\mathsf{H},\Phi,\mathsf{H},i}(u,v).$$
(33)

Найдем выражения для частных производных входящих в уравнения (31), (32):

$$\frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial u} = M_{\Sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial u}; \qquad (34)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{\text{A},\Phi,\text{T},i}}{\partial v} = M_{\Sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\text{H},\Phi,\text{H},i}}{\partial v}; \tag{35}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{J,\Phi,T,i}}{\partial \Omega_1} = \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \Omega_1} \cdot \vec{r}_{H,\Phi,H,i} + M_{\Sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{H,\Phi,H,i}}{\partial \Omega_1};$$
(36)

$$\frac{\partial \vec{r}_{\text{J},\Phi,\text{T},i}}{\partial \Omega_2} = \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \Omega_2} \cdot \vec{r}_{\text{H},\Phi,\text{H},i} + M_{\Sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\text{H},\Phi,\text{H},i}}{\partial \Omega_2}.$$
(37)

Из работы [2] известно соотношение между компонентами вектора нормали к огибающей в $S_{\rm H}\{x_{\rm H}, y_{\rm H}, z_{\rm H}\}$ и $S_{\rm T}\{x_{\rm T}, y_{\rm T}, z_{\rm T}\}$:

$$\vec{n}_{\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{\Phi},\mathrm{T},i} = \left(\frac{\partial \vec{r}_{\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{\Phi},\mathrm{T},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{\Phi},\mathrm{T},i}}{\partial v}\right) = \left(M_{\Sigma}^{-1}\right)^{T} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\boldsymbol{\Phi},\mathrm{H},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\boldsymbol{\Phi},\mathrm{H},i}}{\partial v}\right) = \left(M_{\Sigma}^{-1}\right)^{T} \cdot \vec{n}_{\mathrm{H},\boldsymbol{\Phi},\mathrm{H},i}, \quad (38)$$

где $\vec{n}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} = \left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}}{\partial v}\right)$ – нормаль к фактической поверхности детали (33) в $S_{\mathrm{T}}\{X_{\mathrm{T}},Y_{\mathrm{T}},Z_{\mathrm{T}}\}$, на *i*-м проходе; $\vec{n}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i} = \left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial v}\right)$ – нормаль к фактической инструментальной поверхности (28) в системе координат $S_{\mathrm{H}}\{X_{\mathrm{H}},Y_{\mathrm{H}},Z_{\mathrm{H}}\}$, на *i*-м проходе.

Произведя подстановку (36) и (37) в (31) и (32), с учетом (38) по аналогии с [2], получим:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial v}\right) \cdot \left(M_{\Sigma}^{-1} \cdot \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \Omega_{1}} \cdot \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i} + \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial \Omega_{1}}\right) = 0; (39)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial v}\right) \cdot \left(M_{\Sigma}^{-1} \cdot \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \Omega_{2}} \cdot \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i} + \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial \Omega_{2}}\right) = 0. (40)$$

Введем в рассмотрение асимметричные определенные единичные функции [2] положительно $U^+(x)$ и отрицательно $U^-(x)$.

В этом случае, если принять в качестве аргумента этих функций разность модулей радиус-векторов фактических поверхностей лопатки на *i*-м и *i* – 1-м проходе $X = |\vec{r}_{\text{д.Ф.Т.}i}| - |\vec{r}_{\text{д.Ф.Т.}(i-1)}|$, то можно записать уравнение фактически обработанной поверхности $\vec{r}_{\text{д.Ф.Т.}i}$ для *i*-го прохода:

$$\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} = \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} \cdot U \pm (|\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}| - |\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},(i-1)}|) + + \vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i} \cdot U \pm (|\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},(i-1)}| - |\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\mathrm{T},i}|).$$
(41)

Здесь знак «+» относится к обработке выпуклых участков поверхностей, а знак «-» — вогнутых участков поверхностей.

Так как обработка производится относительно $S_{\rm T}\{X_{\rm T},Y_{\rm T},Z_{\rm T}\}$, а контроль лопаток производится в $S_{\rm ИЗM}\{X_{\rm ИЗM},Y_{\rm ИЗM},Z_{\rm ИЗM}\}$, то запишем относительно этой системы уравнение фактически обработанной поверхности для *i*-го прохода.

Введя для суммарной погрешности радиус-вектора $\vec{r}_{\text{И.Ф.И.}i}$ инструментальной поверхности следующее обозначение:

$$\Delta \vec{r}_{\Sigma.\mathrm{H},i} = \Delta \vec{r}_{\Gamma.\mathrm{H}} - \Delta \vec{r}_{\mathrm{H}.\mathrm{H}} + \Delta \vec{r}_{t.\mathrm{H}} - \Delta \vec{r}_{\mathrm{C}.\mathrm{H}}, \qquad (42)$$

получим:

$$\vec{r}_{\mathrm{M},\Phi,\mathrm{M},i} = \Delta \vec{r}_{\Sigma,\mathrm{M},i} + \Delta \vec{r}_{\mathrm{H},\mathrm{M},i}.$$
(43)

И учитывая независимость $\vec{r}_{\text{И.Н.И.}i}(u,v)$ от параметров огибания Ω_1 и Ω_2 , представим:

$$\frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{M},\Phi,\mathrm{M},i}}{\partial \Omega_{1}} = \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\Sigma,\mathrm{M},i}}{\partial \Omega_{1}} + \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\mathrm{H},\mathrm{M},i}}{\partial \Omega_{1}},\tag{44}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{H},\Phi,\mathrm{H},i}}{\partial \Omega_2} = \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\Sigma,\mathrm{H},i}}{\partial \Omega_2} + \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\mathrm{H},\mathrm{H},i}}{\partial \Omega_2}.$$
(45)

Подставляя (44) и (45) в (39) и (40), с учетом уравнения (41) получаем, таким образом, систему уравнений описывающих, фактически обработанную поверхность лопаток моноколеса на i-м проходе:

$$\begin{cases} \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,\mathcal{H}3\mathcal{M}.} = M_{\Sigma,\mathcal{H}3\mathcal{M}.T.} \cdot \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.}; \\ M_{\Sigma,\mathcal{H}3\mathcal{M}.T.} = \Delta M_{\Pi} \cdot \Delta M_{\mathcal{B},\mathcal{H}3\mathcal{M}.T.}; \\ \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.i} = \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.i} \cdot U \pm (\left| \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.i} \right| - \left| \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.(i-1)} \right| \right) + \\ + \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.i} \cdot U \pm (\left| \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.(i-1)} \right| - \left| \vec{r}_{\mathcal{L},\Phi,T.i} \right|); \\ \left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i}}{\partial v} \right) \times \\ \\ \times \left(M_{\Sigma}^{-1} \cdot \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \Omega_{1}} \cdot \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i} + \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\Sigma,\mathcal{H}.i}}{\partial \Omega_{1}} + \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\mathcal{H},\mathcal{H}.i}}{\partial \Omega_{1}} \right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (47) \\ \left(\frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i}}{\partial v} \right) \times \\ \times \left(M_{\Sigma}^{-1} \cdot \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \Omega_{2}} \cdot \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i} + \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\Sigma,\mathcal{H}.i}}{\partial \Omega_{2}} + \frac{\partial \Delta \vec{r}_{\mathcal{H},\mathcal{H}.i}}{\partial \Omega_{2}} \right) = 0; \\ M_{\Sigma} = \Delta M_{E} \cdot \Delta M_{K} \cdot \Delta M_{\ell} \cdot \Delta M_{C} \cdot \Delta M_{H} \cdot M_{\mathcal{H}.H}; \\ \vec{r}_{\mathcal{H},\Phi,\mathcal{H}.i}(u,v) = \vec{r}_{\mathcal{H},\mathcal{H}.H.i}(u,v) + \Delta \vec{r}_{\Sigma,\mathcal{H}.i} + \Delta \vec{r}_{\mathcal{H}.H.i}. \end{cases}$$

Так как система уравнений (47) является нелинейной, то для ее решения целесообразно использование ЭВМ.

В результате решения полученной системы уравнений получим фактические координаты обработанных поверхностей моноколес:

$$\xi_{\underline{\Lambda},\underline{\Phi},\underline{H}3\underline{M},\underline{n}} = \xi(\Omega_1,\Omega_2,\vec{\Delta}_{\Pi},\vec{\Pi},\vec{\Delta}_{K},\Delta M_{\mathrm{H}}), \xi \in \{x,y,z\}, \qquad (48)$$

где $\xi_{\mathcal{I},\Phi,U3M}$, $\xi \in \{x, y, z\}$ — декартовые координаты в системе $S_{\rm И3M}\{X_{\rm И3M}, Y_{\rm И3M}, Z_{\rm И3M}\}; \ \vec{\Delta}_{\Pi}$ — 24-компонентный вектор приведенных первичных ошибок [2]; $\vec{\Pi}$ — вектор номинальных геометрических параметров технологической системы; $\vec{\Delta}_{\rm K}$ — вектор, учитывающий приращения параметров с целью управления точностью.

Из (48) можно получить уравнения номинальных поверхностей лопаток моноколес, положив $\vec{\Delta}_{\Pi} = 0$, $\vec{\Delta}_{K} = 0$ и $\Delta M_{H} = E$ (E — единичная матрица):

$$\xi_{\text{Д.Н.ИЗМ.}} = \xi(\Omega_1, \Omega_2, \vec{\Pi}), \ \xi \in \{x, y, z\}.$$
 (49)

На основе уравнений (48) и (49) вычисляются приращения координат фактических поверхностей лопаток моноколес по отношению к номинальным:

 $\Delta \xi_{\mathcal{A}.\Phi. \text{H3M.}} = \xi_{\mathcal{A}.\Phi. \text{H3M.}} - \xi_{\mathcal{A}.\text{H.H3M.}},$ $\xi \in \{x, y, z\}.$ (50)

Зная $\Delta \xi_{Д.Ф.ИЗМ.}$ можно перейти к определению взаимосвязей между этими приращениями и нормируемыми показателями точности моноколес.

Расчет нормируемых показателей точности моноколес компрессоров и турбин ГТД

В качестве примера ниже проведено определение погрешности формы дозвукового профиля лопатки МК компрессора в предусмотренных [10] контрольных точках. Схема расположения контрольных точек 1_c и 1_κ [10], которые расположены на расстоянии n_1 от общей точки 1_{of} теоретического и минимального профилей на дозвуковом теоретическом профиле лопатки компрессора согласно [10].

Для определения погрешности профиля в *j*-м сечении лопатки плоскостью, которая перпендикулярна оси *Z* системы $S_{\rm H3M}\{X_{\rm H3M},Y_{\rm H3M},Z_{\rm H3M}\}$, вводим СК $S_j\{X_j,Y_j,Z_j\}$, которая будет расположена относительно СК $S_{\rm H3M}\{X_{\rm H3M},Y_{\rm H3M},Z_{\rm H3M}\}$, так как показано на рис. 2. Матрица $M_{j\rm H3M}$ перехода между СК $S_{\rm H3M}\{X_{\rm H3M},Y_{\rm H3M},Z_{\rm H3M}\}$ и $S_j\{X_j,Y_j,Z_j\}$ будет иметь вид:

$$M_{jH3M.} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\gamma_{Hj} & -\cos\gamma_{Hj} & -b_{Hj} \cdot \sin\gamma_{Hj} \\ 0 & -\cos\gamma_{Hj} & \sin\gamma_{Hj} & b_{Hj} \cdot \cos\gamma_{Hj} \\ -1 & 0 & 0 & -R_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

где R_j — радиус расположения *j*-го сечения; $b_{\rm Hj}$ — номинальная ширина хорды профиля в *j*-м сечении; $\gamma_{\rm Hj}$ номинальный угол поворота профиля в *j*-м сечении.

Номинальный профиль лопатки осевого моноколеса как правило задается для каждого *j*-го сечения дискретным массивом координат точек на рабочем чертеже детали. При этом координаты задаются относительно СК $S_i\{X_i,Y_i,Z_i\}$ (рис. 2).

В этом случае, векторное уравнение аппроксимированной кривой номинального профиля в *j*-м сечении будет описываться следующим уравнением:

$$\vec{r}_{\Pi,\mathrm{H},j}(u) = x_{\Pi,\mathrm{H},j}(u) \cdot \vec{i} + y_{\Pi,\mathrm{H},j}(u) \cdot \vec{j}.$$
(52)



Рис. 2. Схема расположения вспомогательной системы координат для определения погрешности профиля, длины хорды и угла установки лопатки МК

В случае задания средней линии теоретического профиля следующим уравнением в явном виде (так как форму компрессорного профиля получают, как правило, изгибая среднюю линию симметричного профиля по определенному закону, соответствующему требуемому распределению газодинамических параметров) имеет место уравнение:

$$y_{\rm CP....} = y_{\rm CP....}(x_{\rm CP....}).$$
 (53)

При переходе в $S_j{X_j,Y_j,Z_j}$ посредством использования матрицы (51) радиус-вектор $\vec{r}_{\mathcal{A},\Phi,\text{ИЗМ.}}$ фактической поверхности детали примет вид:

$$\vec{r}_{\mathcal{A}.\Phi.j} = M_{j\mathcal{H}3\mathcal{M}.} \cdot \vec{r}_{\mathcal{A}.\Phi.\mathcal{H}3\mathcal{M}.} (\Omega_1, \Omega_2, \vec{\Delta}_{\Pi}, \vec{\Pi}, \vec{\Delta}_{\mathrm{K}}, \Delta M_{\mathrm{H}}).$$
(54)

С учетом условия $z = R_j = \text{const}$ получаем кривую фактического профиля в СК $S_j\{X_j, Y_j, Z_j\}$:

$$\begin{cases} x_{\Pi,\Phi,j} = x(\Omega_1,\Omega_2,\vec{\Delta}_{\Pi},\vec{\Pi},\vec{\Delta}_{\rm K},\Delta M_{\rm H}); \\ y_{\Pi,\Phi,j} = y(\Omega_1,\Omega_2,\vec{\Delta}_{\Pi},\vec{\Pi},\vec{\Delta}_{\rm K},\Delta M_{\rm H}). \end{cases}$$
(55)

С учетом (55) получаем приращения координат для каждой точки фактического профиля по сравнению с номинальным:

$$\Delta x_{\Pi,\Phi,j} = x_{\Pi,\Phi,j} - x_{\Pi,\mathrm{H},j};$$

$$\Delta y_{\Pi,\Phi,j} = y_{\Pi,\Phi,j} - y_{\Pi,\mathrm{H},j}.$$
(56)

Так как целью расчета является определение погрешности формы, то путем параллельного переноса фактического профиля, совмещаем точку 1 (рис. 3) номинального и фактического профилей:

$$\begin{cases} X_{\Pi,\Phi,j} = x_{\Pi,\Phi,j} + \Delta x_1; \\ Y_{\Pi,\Phi,j} = y_{\Pi,\Phi,j} + \Delta y_1, \end{cases}$$
(57)

где Δx_1 и Δy_1 — смещения координат точки 1 (рис. 3) фактического профиля, определенные из уравнений (56); $X_{\Pi,\Phi,j}$ и $Y_{\Pi,\Phi,j}$ координаты фактического профиля после совмещения точек 1 номинального и фактического профилей в точку 1_{об} (рис. 3).



Рис. 3. Схема определения погрешности профиля в точке 1

С учетом (56) получаем приращения координат после совмещения точек 1 номинального и фактического профилей в точку 1_{06} :

$$\begin{cases} \Delta X_{\Pi,\Phi,j} = X_{\Pi,\Phi,j} - x_{\Pi,\mathrm{H},j}; \\ \Delta Y_{\Pi,\Phi,j} = Y_{\Pi,\Phi,j} - y_{\Pi,\mathrm{H},j}. \end{cases}$$
(58)

Определяем координаты точки 1 (рис. 3) средней линии профиля, которая является центром вписанной в профиль окружности и отстоит от точки 1_{o6} на расстоянии n_1 путем решения следующей системы уравнений относительно координат $x_{\text{СР.Л.1}}$ и $\mathcal{Y}_{\text{СР.Л.1}}$:

$$\begin{cases} (x_{\text{CP}, \pi, 1} - x_{\text{CP}, \pi, 106})^2 + (y_{\text{CP}, \pi, 1} - y_{\text{CP}, \pi, 106})^2 = n_1^2; \\ y_{\text{CP}, \pi, 1} = y_{\text{CP}, \pi} (x_{\text{CP}, \pi, 1}). \end{cases}$$
(59)

Уравнение нормали к средней линии теоретического профиля, которая проходит через точку 1 имеет следующий вид:

$$y - y_{\rm CP,J,1} = -\frac{1}{y'_{\rm CP,J,1}(x_{\rm CP,J,1})}(x - x_{\rm CP,J,1}).$$
 (60)

Находим координаты точек 1_{ct} и 1_{kt} , решая совместно уравнения (52) и (60):

$$\begin{cases} y - y_{\text{CP.J.1}} = -\frac{1}{y'_{\text{CP.J.1}}(x_{\text{CP.J.1}})}(x - x_{\text{CP.J.1}}); \\ \vec{r} = \vec{r}_{\Pi,\text{H},j}(u). \end{cases}$$
(61)

Определяя приращения координат в точках 1_{ct} и 1_{kt} по уравнениям (58) находим проекции векторов $\Delta \vec{r}_{\Pi.\Phi.1C}$ и $\Delta \vec{r}_{\Pi.\Phi.1K}$ (рис. 3) на направление нормали к средней линии в точке 1, которые и будут отклонениями профиля на сторону:

$$\left|\delta_{1\xi}\right| = \frac{\left|-y_{\text{CP}...1.}(x_{\text{CP}...1.1}) \cdot \Delta X_{\Pi...\Phi..1\xi} + \Delta Y_{\Pi..\Phi..1\xi}\right|}{\sqrt{1 + \left[y_{\text{CP}...1.}(x_{\text{CP}...1.1})\right]^2}}, \ \xi \in \{c, \kappa\}. \ (62)$$

Для лопатки, соответствующей требованиям по [9], должно выполняться следующее условие:

$$\max\left(\left|\Delta\delta_{1C}\right|,\left|\Delta\delta_{1K}\right|\right) \le 0,25\delta, \quad (63)$$

где δ — предельное значение отклонения толщины профиля. Аналогично можно найти зависимости для определения погрешностей в остальных контрольных точках и другие нормируемые показатели точности моноколес.

Экспериментальная проверка результатов расчетов

Теоретические линии графика (рис. 4) определялись для погрешности шага по зависимости, полученной из уравнений (50).



Рис. 4. Зависимость накопленной величины погрешности шага от величины эксцентриситета

Выражение для расчета этой погрешности представлено в виде:

$$\Delta t_{\Sigma k} = 2e \sin(2\pi/z). \tag{64}$$

Нанесенные на графике полученные экспериментально точки для случая, когда число лопаток Z == 19, достаточно точно совпадают с расчетными значениями (расхождения составляют 8,5 %). Это подтверждает адекватность полученных теоретических зависимостей.

Обсуждение результатов исследования системы уравнений, описывающей реальные профиля лопаток моноколес ГТД

Полученная система уравнений, описывающая реальные профили лопаток моноколес ГТД позволила разработать зависимости для расчета нормируемых показателей точности этих изделий. Она является адекватной и достаточно общей, чтобы быть применимой для различных типоразмеров колес.

Основным применением этой системы и разработанных на ее основе зависимостей является прогнозные и оптимизационные проектные расчеты в системах автоматизированного проектирования технологического назначения для авиационного двигателестроения.

В дальнейшем предполагается конкретизировать полученные зависимости для случаев многоинструментной и многоместной обработки моноколес.

8. Выводы

В результате проведенных исследований

1. Получено дифференциально-интегральную матричную систему уравнений, отражающих связь радиусвектора реальной поверхности лопатки лопаток моноколес ГТД, формируемые при их механической обработке, и приведенных первичных ошибок, вызванных геометрическими, кинематическими, термическими, силовыми и износными факторами.

2. На основе этой системы разработаны зависимости для расчета нормируемых показателей точности этих изделий.

3. Экспериментально подтверждена адекватность полученных аналитических моделей. Полученные результаты позволяют решать прогнозные и проектные задачи точности в технологии механической обработки моноколес ГТД. Они могут быть применены в специализированных системах автоматизированного проектирования для авиационного двигателестроения.

Литература

- Базров, Б. М. Основы технологии машиностроения [Текст]: учебник / Б. М. Базров. – М.: Машиностроение, 2005. – 736 с.
- Тернюк, Н. Э. Основы комплексной оптимизации технологических систем для производства зубчатых колес [Текст]: дис. ... докт. техн. наук: 05.02.08 / Н. Э. Тернюк. — Харьков, 1983. — 433 с.
- Богуслаев, А. В. Формирование параметров качества несущих поверхностей моноколес ГТД высокоскоростным фрезерованием [Текст] / А. В. Богуслаев, С. В. Мозговой, Г. В. Карась, А. Я. Качан // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – № 8(24). – С. 7–10.
- Жеманюк, П. Д. Обработка проточных поверхностей моноколес высокоскоростным фрезерованием [Текст] / П. Д. Жеманюк, А. В. Богуслаев, С. В. Мозговой, Г. В. Карась, А. Я. Качан // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 7(15). – С. 215–219.
- 5. Кондратюк, Э. В. Повышение эффективности процесса ВСФ центробежных колес за счет оптимизации режимов резания и использования высокопроизводительных методов обработки [Текст] / Э. В. Кондратюк, Г. В. Пухальская, В. Г. Жарик, Т. А. Панченко, С. В. Критчин // Вестник двигателестроения. – 2012. – № 1. – С. 103–114.

- 6. Мозговой, В. Ф. Стратегии обработки лопаток моноколес на обрабатывающих центрах с ЧПУ с переменной 3-D коррекцией [Текст] / В. Ф. Мозговой, К. Б. Балушок, И. И. Котов, В. А. Панасенко, М. К. Бирук // Технологические системы. 2013. № 1(62). С. 22–28.
- Ameddah, H. NURBS interpolation strategies of complex surfaces in high speed machining [Text] / H. Ameddah, M. Assas // International Journal of CAD/CAM. – 2011. – № 11(1). – P. 1–6.
- 8. Heng, M. Design of a NURBS Interpolator with minimal feed fluctuations and continuous feed modulation capability [Text] / M. Heng, K. Erkorkmaz // International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2010. Vol. 50, № 3. P. 281-293. doi:10.1016/j.ijmachtools.2009.11.005
- 9. Внуков, Ю. Н. Опробование усовершенствованной технологи подготовки и нанесения демпфирующей среды на моноколеса ГТД при концевом фрезеровании [Текст] / Ю. Н. Внуков, А. И. Гермашев, В. Ф. Мозговой, К. Б. Балушок, Э. В. Кондратюк // Вестник двигателестроения. – 2015. – № 1. – С. 128–130.
- ГОСТ 1 02571-86. Лопатки компрессоров и турбин. Предельные отклонения размеров формы и расположения пера [Текст]. – Изд. офиц. – Утв. 13.06.1986. – 36 с.
- Литвин, Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений [Текст] / Ф. Л. Литвин. М.: Наука, 1968. 54 с.
- 12. Способ обработки моноколес [Текст]: пат. 2429949 Российская Федерация, МПК B23C3/18 [Текст] / Полетаев В. А., Волков Д. И., Климентьев А. В., Плотникова Г. А.; заявитель и патентообладатель Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П. А. Соловьева». № 2010121618/02; заявл. 27.05.2010; опубл. 27.09.2011, Бюл. № 6. 10 с.
- Радзвевич, С. П. Формообразование поверхностей деталей. Основы теории [Текст]: монография / С. П. Радзвевич. – К.: Растан, 2001. – 592 с.
- Михайлов, А. Н. Основы синтеза функционально-ориентированных технологий машиностроения [Текст] / А. Н. Михайлов. — Донецк: ДонНТУ, 2009. — 346 с.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЛОПАТОК І алгоритму розрахунку нормованих показників точності моноколіс газотурбінних двигунів

Отримана в загальному вигляді система рівнянь, яка описує реальні поверхні лопаток моноколіс газотурбінних двигунів, отримані після механічної обробки з урахуванням похибок диференційованих відповідно до факторів, що їх спричиняють. Запропоновано алгоритм розрахунку нормованих показників якості моноколіс газотурбінних двигунів з використанням вищезазначеної системи.

Ключові слова: механічна обробка, похибка, лопатки, моноколеса, газотурбінний двигун, алгоритм.

Тернюк Игорь Александрович, аспирант, кафедра технологии производства авиационных двигателей, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина, e-mail: mr.ternyuk@mail.ru.

Тернюк Ігор Олександрович, аспірант, кафедра технології виробництва авіаційних двигунів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Україна.

Ternyuk Igor, Zhukovsky National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Ukraine, e-mail: mr.ternyuk@mail.ru