УДК 513.88:519.95:531.1
DOI: 10.15587/2312-8372.2016.75969

**Войтик Т. Г.,**
**Полетаев Г. С.**

# ОБОСНОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ И ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*При сделанных в статье предположениях, сформулирована и обоснована теорема об однозначной разрешимости двух матричных уравнений с верхней и нижней треугольными неизвестными и взаимно обратными коэффициентами. Данные уравнения принадлежат одному общему подвиду и рассматриваются одновременно. Установлены справедливые в изучаемой ситуации формулы решений. Они дают общее выражение решений через факторизационные множители коэффициентов и правую часть предлагаемых уравнений. Приведен иллюстративный пример.*

**Ключевые слова:** *математика, механика, анализ, уравнение, матрица, треугольная, разрешимость, теорема, факторизация, проектор.*

## 1. Введение

В сообщении ниже продолжается публикация результатов о специальных матричных уравнениях (уравнениях-моделях), возникающих в математике и некоторых задачах механики [1, 2]. Под матричным уравнением-моделью здесь понимается любое матричное уравнение, выражающее взаимосвязь известных и неизвестных в исходной теоретической или прикладной задаче величин. Считается, что смысл матриц, посредством которых матричное уравнение-модель записано, вполне определен заранее. Как и для других математических инструментов исследования, теория матричных уравнений развивается, в частности, за счет предлагаемых вниманию уравнений с двумя «линейно свзанными», верхней и нижней треугольными матрицами, их теории и примера применнения, что и обуславливает актуальность проведенного исследования. Рассматриваемые ниже абстрактные матричные уравнения с неизвестными, нижними $X^+$, $X_1^+$ и верхними $Y_-$, $Y_{1-}$, треугольными матрицами и взаимно обратными коэффициентами допускают запись в виде:

$$AX^+ + Y_- = B, \tag{1}$$

$$A^{-1}X_1^+ + Y_{1-} = B. \tag{2}$$

Как отмечено [1, 2], родственные (1) и связанные с ними уравнения возникают, в частности, при изучении специальных новых задач механики для совокупностей одинаковых по геометрическим и физическим характеристикам тел. Они возникают также при исследовании общих видов и приложений, обнаруженных сравнительно недавно, одночленных однопроекторных второго порядка уравнений в кольце с факторизационной парой [3]. Абстрактные уравнения из работ [3, 4] связывают уравнения (1) с интегральными типа Винера-Хопфа [5–7], а также с задачей нахождения двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному соотношению на контуре в виде сомкнутой вещественной оси [8]. Последняя упомянутая задача «родственная» известной краевой задаче Римана (Римана-Гильберта-Привалова) теории аналитических функций [5, 6, 9, 10]. Такого же рода замечания верны, соответственно, и для уравнения (2). Уравнение (2) отличается от уравнения (1) лишь тем, что его коэффициентом при неизвестной $X_1^+$ является обратная матрица для матрицы $A$.

## 2. Объект исследования и его технологический аудит

*Объект исследования* — матричные уравнения. Роль матриц, матричных уравнений в теоретических и практических вопросах широко известна. В простейшем виде они возникают в разных теоретических и прикладнных задачах, связанных с решением систем линейных алгебраических уравнений. Например, в механике, физике, электротехнике, гидравлике, экономике. При этом, посредством матричных уравнений могут моделироваться взаимосвязи между совокупностями известных и неизвестных величин [11–14]. Известные до работ второго из авторов методы могут оказаться неприменимы, непосредственно, для исследования матричного уравнения-модели и представления его решения. Например, в некоторых задачах с искомыми треугольными матрицами. Или когда правая часть матричного уравнения, обычно известная, оказывается таковой лишь частично. Это относится и к рассматриваемым далее уравнениям. Для них отутствовали, в частности, общая теорема с условиями однозначной разрешимости, сразу двух при всевозможных правых частях, уравнений и формулы решений. Стало быть, разработка общих подходов к исследованию таких уравнений, указание условий их разрешимости и отыскание возможных формул представления их решений являются актуальными. Отметим также, что теория рассматриваемых далее матричных уравнений обладает рядом общих черт с теорией известной задачи Римана (Римана-Гильберта-Привалова) для аналитических функций. От формы записи уравнений и краевого условия до формул представлений решений в соответствующих ситуациях. Эта задача возникает или используется в разных теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложений. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свертки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [5, 6, 9, 10, 15]. Последние обстоятельства также подтверждают актуальность исследования предлагаемых ниже уравнений.

## 3. Цели и задачи исследования

*Целью работы* является установление общей теоремы об однозначной разрешимости с ее условиями и формулами решений для абстрактных матричных уравнений с неизвестными, нижними $X^+$, $X_1^+$ и верхними $Y_-$, $Y_{1-}$, треугольными матрицами и взаимно обратными коэффициентами; демонстрация возможности проекторного подхода на примере рассматриваемых матричных уравнений (1), (2) с указанием компактной легко обозримой процедуры их исследования, в соответствующих предположениях.

Для достижения поставленной цели необходимо:
— адаптировать к рассматриваемой реализации ранее разработанный для соответствующих абстрактных уравнений в кольцах с факторизационными парами новый подход;
— с помощью соответствующих элементов этого подхода, при сделанных предположениях, установить упомянутую общую теорему;
— привести иллюстративный пример.

## 4. Анализ литературных данных

Абстрагируясь от возможных для рассматриваемых в статье уравнений интерпретаций прикладного характера, их можно трактовать, как своеобразные матричные аналоги задачи Римана-Гильберта и интегральных уравнений, эквивалентных уравнению типа Винера-Хопфа. В предлагаемом виде, эти матричные уравнения, впервые, появились в работах второго автора. Близкие вопросы и уравнения изучались в его теоретических исследованиях и примере с прикладной интерпретацией, а также в последующих работах [1, 2]. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов и этой задачей, по видимому, впервые указано автором [16]. Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана-Гильберта-Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [5, 9, 10, 15]. Такой случай возникает, например, в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси редукцией [15]. Публикации, в том числе [17, 18], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана. Как и интегральные уравнения типа Винера-Хопфа [3, 5–7, 19], другие уравнения типа свертки, а также матричные уравнения из [1, 2] и родственного типа Римана-Гильберта-Привалова задача [8], рассматриваемые ниже матричные уравнения с двумя треугольными неизвестными [20, 21] допускают изучение на основе результатов или, непосредственно, подходов и методов, развиваемых для соответствующих уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [3, 4]. Последние уравнения, в свою очередь, можно плодотворно исследовать, опираясь на основы теории колец и функционального анализа, при существенном использовании решений вопросов обратимости и факторизации разных типов по факторизационной паре подколец [22–25]. Общие подходы прямого исследования этих уравнений в записанном виде с условиями существования и формулами решений, их свойствами, до работ авторов, отсутствовали.

## 5. Материалы и методы исследования

**5.1. Обозначения. Общие положения.** Следуя [1–3, 20, 24], обозначим $R_{n\times n}$ кольцо всех вещественных числовых квадратных матриц размера $n\times n$, $n\ge 2$, $n\in N$; $R^+_{n\times n}$, $R^-_{n\times n}$ — подкольца нижних, верхних треугольных матриц из $R_{n\times n}$, соответственно, и $R^0_{n\times n} := R^+_{n\times n}\cap R^-_{n\times n}$. Через $p^-$, $p^+$ обозначим коммутирующие проекторы: $R_{n\times n}\to R^-_{n\times n}$, $R_{n\times n}\to R^+_{n\times n}$, соответственно. Эти проекторы каждой матрице $A$ ставят в соответствие матрицы:

$$A^+ := p^+(A)\in R^+_{n\times n},\quad A^- := p^-(A)\in R^-_{n\times n},$$

получающиеся из $A$ заменой ее элементов, расположенных, для $A^-$ — ниже, а для $A^+$ — выше главной диагонали, — нулями. Введем еще проекторы и подмножества матриц:

$$p^0 := p^+p^-(= p^-p^+);\ p_+ := p^+ - p^0;$$
$$p_- := p^- - p^0;\ \left(R_{n\times n}\right)_\pm := p_\pm\left(R_{n\times n}\right).$$

Легко видеть, что $R^\mp_{n\times n} := p^\mp(R_{n\times n})$; $R^\mp_{n\times n} = \left(R_{n\times n}\right)_\pm \oplus R^0_{n\times n}$, соответственно. Результат применения соответствующих проекторов к матрицам, а также принадлежность матрицы из $R_{n\times n}$ подмножеству $R^{\mp,0}_{n\times n}$, $\left(R_{n\times n}\right)_\pm$ будем отмечать знаками +, –, 0, соответственно. Устанавливается, что $R_{n\times n}$; $n\ge 2$, $n\in N$ — кольцо с факторизационной парой $(R^+_{n\times n}, R^-_{n\times n})$ [1–3, 24, 25].

**5.2. Факторизация.** Важную роль при построении формул для матриц-решений рассматриваемых уравнений играют нормированные правильные факторизации по факторизационной паре $(R^+_{n\times n}, R^-_{n\times n})$. А, именно, разложения матрицы $A^{-1}$ на обратимые в соответствующих подкольцах $R^+_{n\times n}$, $R^-_{n\times n}$ треугольные и, в $R^0_{n\times n}$, — диагональный множители [1–4, 11, 24, 25]:

$$A^{-1} = \Gamma^+ S^0 T^-, \tag{3}$$

где матрицы-сомножители $T^-\in R^-_{n\times n}$; $S^0\in R^0_{n\times n}$; $\Gamma^+\in R^+_{n\times n}$; $n\ge 2$, $n\in \mathrm{N}$. Нормирование осуществляется условием: $\Gamma^0 = T^0 = E$, где $E$ — единичная матрица кольца $R_{n\times n}$. Некоторые условия существования нормированной правильной факторизации матриц из $R_{n\times n}$ по факторизационной паре (иначе, по подкольцам) $(R^+_{n\times n}, R^-_{n\times n})$

можно сформулировать на основе соответствующих результатов [3, 11, 24]. Если некоторая матрица из $R_{n\times n}$ допускает в этом кольце матриц, как левую факторизацию, так и правую факторизацию по подкольцам $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$, будем говорить, что она допускает по указанным подкольцам соответствующего типа двустороннюю факторизацию [3, 24–26]. Правильная нормированная двусторонняя факторизация неособенной матрицы из $R_{n\times n}$ по подкольцам $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$ имеет место тогда и только тогда, когда эта матрица и ее обратная допускают в $R_{n\times n}$ левые нормированные правильные факторизации по факторизационной паре $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$ или правые нормированные правильные факторизации по той же факторизационной паре $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$. Устанавливается, что левая (правая) нормированная правильная факторизация единственна.

**5.3. Постановка задачи.** Будем рассматривать две следующие взаимосвязанные задачи:

***Задача 1.*** *«Для заданных матрицы — коэффициента* $A\in R_{n\times n}$; $n\geq 2$, $n\in \mathrm{N}$ *и матрицы — правой части* $B\in R_{n\times n}$ *найти пару матриц* $X^{+}\in R^{+}_{n\times n}$, $Y_{-}\in (R_{n\times n})_{-}$, *удовлетворяющую уравнению* (1)».

***Задача 2.*** *«Для заданных матрицы — коэффициента* $A\in R_{n\times n}$; $n\geq 2$, $n\in \mathrm{N}$ *и матрицы — правой части* $B\in R_{n\times n}$ *найти пару матриц* $X_{1}^{+}\in R^{+}_{n\times n}$, $Y_{1-}\in (R_{n\times n})_{-}$, *удовлетворяющую уравнению* (2)».

## 6. Результаты исследования

Используя подготовленную базу, приведем условия существования, формулы решений уравнений (1), (2), а, стало быть, **задач 1, 2** в $R_{n\times n}$, и пример.

**6.1. Главный результат.** При соответствующих двусторонних нормированных правильных факторизациях матрицы — коэффициента $A\in R_{n\times n}$; $n\geq 2$, $n\in \mathrm{N}$ или ее обратной матрицы:

$$A=V_l^{+}W_l^{0}U_l^{-}=U_r^{-}W_r^{0}V_r^{+}, \tag{4}$$

$$A^{-1}=\Gamma_l^{+}S_l^{0}T_l^{-}=T_r^{-}S_r^{0}\Gamma_r^{+}, \tag{5}$$

где:

$$\Gamma_l^{+}=[V_r^{+}]^{-1};\ S_l^{0}=[W_r^{0}]^{-1};\ T_l^{-}=[U_r^{-}]^{-1};$$
$$V_l^{+}=[\Gamma_r^{+}]^{-1};\ W_l^{0}=[S_r^{0}]^{-1};\ U_l^{-}=[T_r^{-}]^{-1},$$

$\Gamma^{+}_{l,r},\ V^{+}_{l,r}\in R^{+}_{n\times n};\ S^{0}_{l,r},\ W^{0}_{l,r}\in R^{0}_{n\times n};\ T^{-}_{l,r},\ U^{-}_{l,r}\in R^{-}_{n\times n}$, разрешимость **задач 1, 2** и уравнений (1), (2) характеризует, например, следующее утверждение.

***Теорема.*** *Пусть* $A\in R_{n\times n}$; $n\geq 2$, $n\in \mathrm{N}$ *неособенная матрица. Для того, чтобы при всевозможных матрицах — правых частях* $B\in R_{n\times n}$, *как бы они ни были выбраны, оба уравнения* (1), (2) *были в* $R_{n\times n}$ *однозначно разрешимы, необходимо и достаточно, чтобы матрица* $A$, *или ее обратная* $A^{-1}$, *допускала в* $R_{n\times n}$ *нормированную правильную двустороннюю факторизацию по факторизационной паре подколец* $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$ *вида* (4), (5), *соответственно. Если любая одна из таких нормированных правильных двусторонних факторизаций* (4), (5) *имеет место, то: имеет место и другая из них; — при любой правой части* $B\in R_{n\times n}$, *единственное решение* $X^{+}\in R^{+}_{n\times n}$, $Y_{-}\in (R_{n\times n})_{-}$ *уравнения* (1) *и единственное в* $R_{n\times n}$ *решение* $X_1^{+}\in R^{+}_{n\times n}$, $Y_{1-}\in (R_{n\times n})_{-}$ *уравнения* (2) *можно определить через множители факторизаций* (4), (5) *и эту правую часть по следующим формулам, соответственно:*

$$X^{+}=\Gamma_l^{+}S_l^{0}[T_l^{-}B^{+}]^{+},\ Y_{-}=B_{-}+[T_l^{-}]^{-1}[T_l^{-}B^{+}]_{-}, \tag{6}$$

$$X_1^{+}=V_l^{+}W_l^{0}[U_l^{-}B^{+}]^{+},\ Y_{1-}=B_{-}+(U_l^{-})^{-1}[U_l^{-}B^{+}]_{-}. \tag{7}$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть условия теоремы выполнены и при любой из всевозможных правых частей $B\in R_{n\times n}$, оба уравнения (1), (2), однозначно разрешимы в $R_{n\times n}$. Обозначим существующие, при этом, единственные решения уравнений (1), (2) при $B=E\in R_{n\times n}$, где $E$ — единичная матрица, через:

$$X_E^{+}\in R^{+}_{n\times n},\ Y_{E-}\in (R_{n\times n})_{-};\quad X_{1E}^{+}\in R^{+}_{n\times n},\ Y_{1E-}\in (R_{n\times n})_{-}.$$

Тогда, соответственно, заключаем:

$$AX_E^{+}+Y_{E-}=E,\quad A^{-1}X_{1E}^{+}+Y_{1E-}=E.$$

Отсюда и условий доказываемой части утверждения, вытекает существование требуемых обратных матриц в соответствующих подкольцах $R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$ и правильных правых факторизаций по факторизационной паре подколец $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$:

$$A=[E-Y_{E-}][(X_E^{+})^{-1}]^{+}, \tag{8}$$

$$A^{-1}=[E-Y_{1E-}][(X_{1E}^{+})^{-1}]^{+}. \tag{9}$$

Факторизация (8) порождает нормированную правильную левую факторизацию (5), где:

$$\Gamma_l^{+}=[X_E^{+}\ (X_E^{0})^{-1}]^{+};\ S_l^{0}=X_E^{0};\ T_l^{-}=[(E-Y_{E-})^{-1}]^{-},$$

то есть нормированную правильную левую факторизацию:

$$A^{-1}=[X_E^{+}\ (X_E^{0})^{-1}]^{+}X_E^{0}[(E-Y_{E-})^{-1}]^{-}.$$

Учитывая, что любая правильная правая факторизация (9) может быть нормирована, убеждаемся, теперь, в существовании двусторонней нормированной правильной факторизации обратной матрицы $A^{-1}$ по подкольцам $R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$. Меняя ролями матрицы $A^{-1}$ и $A$ и соответствующие им факторизации, убеждаемся также в существовании нормированной правильной двусторонней факторизации по подкольцам $R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$ также и для матрицы $A$. Необходимость установлена.

**Достаточность.** Пусть при условиях теоремы имеет место одна из нормированных правильных двусторонних факторизаций (4), (5) по факторизационной паре подколец $(R^{+}_{n\times n},\ R^{-}_{n\times n})$. Учитывая свойство единственности такой факторизации и правильности ее матриц-сомножителей [3, 24, 25], легко установить, что имеет место и другая нормированная правильная двусторонняя факторизация из них. Теперь ясно, что достаточность такой факторизации для существования, единственности решений уравнений (1), (2) в $R_{n\times n}$ и справедливости формул (6), (7), при любой правой части $B\in R_{n\times n}$, следует из результатов [4]. Теорема доказана.

**Следствие.** При условиях теоремы и двусторонних нормированных правильных факторизациях (4), (5), решения уравнений (1), (2) с правой частью $B=E$, где $E\in R_{n\times n}$ — единичная матрица, можно определить по формулам, соответственно:

$$X_E^+=\Gamma_l^+ S_l^0,\ Y_{E-}=[T_l^-]^{-1}T_{l-};$$
$$X_{1E}^+=V_l^+W_l^0,\ Y_{1E-}=[U_l^-]^{-1}U_{l-}. \quad (10)$$

**6.2. Пример.** Пусть требуется найти пары треугольных матриц $X^+$, $X_1^+\in R_{3\times3}^+$; $Y_-$, $Y_{1-}\in(R_{3\times3})_-$ из $R_{3\times3}$, удовлетворяющие (1), (2), соответственно, если:

$$A=\begin{pmatrix}15&0&-10\\0&5&0\\-5&0&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10\alpha&0&10\\0&10\alpha&0\\10\beta&0&10\alpha\end{pmatrix};$$

$\alpha$, $\beta$ — числа.

Реализуя формулы (6) решения в $R_{3\times3}$ уравнения (1), последовательно найдем:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&\frac{2}{5}\\0&\frac{1}{5}&0\\\frac{1}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix},\quad \Gamma_l^+=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad S_l^0=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix},$$

$$T_l^-=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (T_l^-)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$X^+=\begin{pmatrix}2\alpha+4\beta&0&0\\0&2\alpha&0\\2\alpha+6\beta&0&2\alpha\end{pmatrix},\quad Y_-=\begin{pmatrix}0&0&10+20\alpha\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Аналогично, реализуя формулы (7) решения в $R_{3\times3}$ уравнения (2), найдем:

$$X_1^+=\begin{pmatrix}150\alpha-100\beta&0&0\\0&50\alpha&0\\-50\alpha+50\beta&0&\frac{50}{3}\alpha\end{pmatrix},$$

$$Y_{1-}=\begin{pmatrix}0&0&10-\frac{20}{3}\alpha\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Подстановкой, можно убедиться, что это действительно искомые решения.

Отметим, что в [21, С. 71] опечатка в результате для $Y_-$. Верно в [20, С. 15].

## 7. SWOT-анализ результатов исследований

Среди положительных сторон положений, установленных для рассмотренных матричных уравнений (1), (2), отметим:

— существенно меньший максимальный из порядков определителей матриц, с которыми приходится оперировать при использовании предложенного подхода и его результатов. Существенно меньший, чем порядки тех определителей, которые возникают при переходе от (1), (2) к системам линейных алгебраических уравнений приравниванием соответствующих элементов матриц в их левой и правой частях;

— возможность выявления некоторых потенциально ожидаемых свойств решений родственных задач для соответствующих функциональных уравнений в кольце рациональных функций из [8] и для уравнений типа свертки [3, 6];

— возможность использования в образовательных целях;

— обозримость и доступность аппарата при решении конкретных примеров.

Среди слабых сторон — необходимость продолжения исследований в направлении поиска возможных областей применений.

Подготовлена база для проведения, в перспективе, исследований случаев разрешимости уравнений (1), (2), в том числе матрично функциональных, когда факторизации (4), (5) не являются правильными, а также связи между решениями. Особое место в этой перспективе у прикладных задач, для которых (1), (2) используются при математическом моделировании.

## 8. Выводы

В результате исследований:

1. К рассмотренным уравнениям (1), (2) адаптирован ранее разработанный для соответствующих абстрактных уравнений в кольцах с факторизационными парами новый подход. Подход, отличающийся алгебраичностью, опирающийся на основные положения теории колец и теории операторов, продемонстрирован.

2. При сделанных предположениях, с помощью соответствующих элементов этого подхода, установлена общая теорема об однозначной разрешимости уравнений (1), (2), одновременно. Установлены формулы матричных представлений решений.

3. Приведен иллюстративный пример. Установленная общая теорема, дает точный метод решения конкретных уравнений (1), (2) и, стало быть, задач (1), (2). Как показывает пример, предложенные в ней формулы позволяют построить матрицу-решение через заданную правую часть и факторизационные множители двусторонних нормированных правильных факторизаций (4), (5).

### Литература

1. Полетаев, Г. С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния [Текст] / Г. С. Полетаев // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности. — СПб., 2000. — С. 146–148.

2. Полетаев, Г. С. О моделировании некоторых задач механики матричными уравнениями с треугольными неизвестными [Текст]: межвуз. науч. сб. / Г. С. Полетаев, Л. И. Солдатов // Нелинейная динамика механических и биологических систем. — 2004. — Вып. 2. — С. 133–136.
3. Полетаев, Г. С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами [Текст] / Г. С. Полетаев. — Киев, 1988. — 20 с. — (Препринт/АН УССР. Институт математики: 88.31).
4. Полетаев, Г. С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары [Текст] / Г. С. Полетаев // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», 24–25 грудня 2015 р. — Київ, 2016. — С. 85–88.
5. Гахов, Ф. Д. Уравнение типа свертки [Текст] / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
6. Крейн, М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов [Текст] / М. Г. Крейн // Успехи математических наук. — 1958. — Вып. 5(83). — С. 3–120.
7. Крейн, М. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
8. Войтик, Т. Г. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом [Текст] / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев, С. А. Яценко // Наукові нотатки. — 2016. — Вип. 54. — С. 65–70.
9. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи [Текст] / Ф. Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
10. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
11. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 549 с.
12. Lancaster, P. Theory of Matrices [Text] / P. Lancaster. — NewYork — London: Academic Press Inc., 1969. — 326 p.
13. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
14. Bellman, R. Introduction to Matrix Analysis [Text] / R. Bellman. — Ed. 2. — University of Southern California, 1997. — 403 p. doi:10.1137/1.9781611971170
15. Попов, Г. Я. Метод факторизации и его численная реализация [Текст]: учеб. пос. / Г. Я. Попов, П. В. Керекеша, В. Е. Круглов; под ред. Г. Я. Попова. — Одесса: Одесский государственный университет, 1976. — 82 с.
16. Раппорт, И. М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях [Текст] / И. М. Раппорт // Сборник трудов Института математики АН УССР. — 1949. — № 12. — С. 102–118.
17. Мхитарян, С. М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связи с ними интегральных и дифференциальных уравнений [Текст] / С. М. Мхитарян // Известия АН Армянской ССР. Механика. — 1968. — Т. XXI, № 5–6. — С. 3–20.
18. Акопян, В. Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом [Текст] / В. Н. Акопян, Л. Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений. — Одесса, 2013. — С. 12.
19. Wiener, N. Über Eine Klasse Singulärer Integralgleichungen [Text] / N. Wiener, E. Hopf // SemesterBer. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. — 1931. — № 30/32. — P. 696–706.
20. Войтик, Т. Г. Матричные уравнения с двумя треугольными неизвестными [Текст] / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев // Наукові нотатки. — 2015. — Вип. 49. — С. 13–16.
21. Войтик, Т. Г. Уравнения с нижней и верхней неизвестными треугольными матрицами и взаимно обратными коэффициентами [Текст]: матер. конф. / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19–20 травня 2016 р. «ІІ. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз». — Київ, 2016. — С. 68–71.
22. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца [Текст] / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1960. — 316 с.
23. Наймарк, М. А. Нормированные кольца [Текст] / М. А. Наймарк. — М.: Наука, 1968. — 664 с.
24. McNabb, A. Factorization of Operators — I: Algebraic Theory and Examples [Text] / A. McNabb, A. Schumitzky // Journal of Functional Analysis. — 1972. — Vol. 9, № 3. — P. 262–295. doi:10.1016/0022-1236(72)90002-x
25. Poletaev, G. G. Abstract analogue of a dual equation of convolution type in a ring with a factorization pair [Text] / G. G. Poletaev // Ukrainian Mathematical Journal. — 1991. — Vol. 43, № 9. — P. 1124–1135. doi:10.1007/bf01089213
26. Нижник, Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния [Текст] / Л. П. Нижник. — Киев: Наукова думка, 1973. — 182 с.

### ОБҐРУНТУВАННЯ УМОВ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ С ДВОМА ТРИКУТНИМИ НЕВІДОМИМИ ТА ВЗАЄМНО ЗВОРОТНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

При зроблених у статті припущеннях, сформульована і обґрунтована теорема про однозначну розв'язність двох матричних рівнянь з верхньою і нижньою трикутними невідомими та взаємно оберненими коефіцієнтами. Дані рівняння належать до одного загального підвиду та розглядаються одночасно. Встановлені вірні в досліджуваній ситуації формули рішень. Вони дають загальний вираз рішень крізь факторизаційні множники та праву частину пропонованих рівнянь. Наведено ілюстративний приклад.

**Ключові слова:** математика, механіка, аналіз, рівняння, матриця, трикутна, розв'язність, теорема, факторизація, проектор.

***Войтик Татьяна Геннадиевна,*** *ассистент, кафедра высшей и прикладной математики, Одесский национальный морской университет, Украина.*

***Полетаев Геннадий Степанович,*** *кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина,* ***e-mail: poletayev_gs@ukr.net****.*

***Войтік Тетяна Геннадіївна,*** *асистент, кафедра вищої та прикладної математики, Одеський національний морський університет, Україна.*

***Полєтаєв Геннадій Степанович,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри вищої математики, Одеська державна академія будівництва та архітектури, Україна.*

***Voytik Tetiana,*** *Odessa National Maritime University, Ukraine.*

***Poletaev Gennady,*** *Odessa State Academy of Buildings and Architecture, Ukraine,* ***e-mail: poletayev_gs@ukr.net***