УДК 537.533.35:578.72

Шостак А.В., д.т.н. ***, Божидарнік В.В.**, д.т.н.****, Мельник О.В.**, к.т.н. **

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

**Луцький національний технічний університет

ПОБУДОВА РЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ІНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕХНОЛОГІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ

Характер поведінки інженерних об'єктів елементів технологічних комплексів, що випробовуються під зовнішнім впливом, визначається як його фізико-хімічними та реологічними властивостями, так і виглядом, інтенсивністю і тривалістю впливу. Для коректного математичного опису поведінки твердих тіл, що деформуються, часто використовується апарат механіки суцільних середовищ або континуумів.

У статті запропоновано побудову реологічної моделі методом суміщень як плоскої контактної задачі з розв'язком інтегрального рівняння чисельним методом, що є доцільним для вирішення інженерних задач, які дають можливість суттєво скоротити розмірність розв'язання таких задач на декілька порядків і, відповідно, об'єм обчислень, і є ефективними в прикладному плані, наприклад, у задачах параметричної надійності.

Реологічна модель, метод суміщень, плоска контактна задача, інтегральні рівняння, чисельні методи.

Постановка проблеми. Економія матеріальних ресурсів, оптимізація по матеріалоємності і габаритів елементів конструкцій, збільшення ресурсу їх роботи призводить до того, що вичерпуються всі запаси міцності і необхідно враховувати непружні реологічні деформації, процеси накопичення пошкоджень та розсіяного (об'ємного) руйнування в матеріалах. Поява фактору часу в задачах такого роду суттєво ускладнює розв'язок крайових задач, які моделюють напружено-деформований стан елементів конструкцій в реальних умовах експлуатації. Враховуючи, що багато елементів технологічних комплексів у реальних умовах експлуатуються десятки тисяч годин, виникають і суто математичні проблеми в процесі реалізації отримання рішення для крайових задач класичними методами механіки деформівного твердого тіла. У багатьох випадках достатньо мати інформацію про деякі параметри, які інтегрально характеризують еволюцію деформівного стану конструктивного елементу в часі.

Для коректного математичного опису поведінки твердих тіл, що деформуються, часто використовується апарат механіки суцільних середовищ або континуумів.

Розрізняють два напрямки: 1) диференціальний напрямок – побудова моделі континуумів в термінах фіксованого набору елементарних властивостей, таких як пружність, в'язкість, повзучість і т.п., виражених через відповідні внутрішні сили; 2) інтегральний напрямок – побудова моделі континуумів у формі інтегрального рівняння, що дозволяє апроксимувати його властивості в цілому, не розчленовуючи їх на елементарні складові.

Обидва ці напрямки достатньо повно розроблені в теорії механіки суцільних середовищ, але безпосереднє їх застосування в інженерній геодезії утруднене. Тому необхідні певні спрощення. Які розглядаються в цій статті.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, присвячених розв'язанню даної проблеми. Запропонована в статті тема досліджень недостатньо висвітлена у вітчизняній та закордонних публікаціях. Водночас застосування таких досліджень, зокрема, для моніторингу деформаційного стану відповідальних споруд, є актуальною проблемою. В роботах [4, 5] зроблена спроба використання деяких реологічних моделей в інженерно-геодезичному моделюванні.

Мета статті – отримання реологічної моделі методом суміщень та теоретичне обґрунтування реологічної моделі як рішення плоскої контактної задачі.

Виклад основного матеріалу.

1. Побудова реологічної моделі методом суміщень. При реологічному моделюванні часто використовується теорія спадковості Больцмана–Вольтерри, рівняння якої подамо у вигляді інтегрального рівняння Вольтерри другого роду:

$$e_{ij}(t) = \frac{S_{ij}(t)}{2G} + \frac{1}{2G}\int_0^1 K(t-\tau) S_{ij}(\tau) d\tau, \tag{1}$$

де $e_{ij}(t)$ і S_{ij} - компоненти девіатора тензора деформацій і напруження на момент часу t; e_{ij}, σ_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ – компоненти тензорів деформацій і напружень; $G = E/2(1+v)$ - модуль зсуву; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; τ - час, що передував t; $K(t)$ – функція впливу; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1(i = j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$ – дельта Кронекера.

У рівнянні (1) перший доданок в правій частині – пружна деформація, а другий – в'язкопружна деформація.

В умовах складного напруженого стану при постійних навантаженнях, тобто $S_{ij} = S_{ij}^0$, рівняння (1) матиме вигляд

$$e_{ij}(t) = \frac{S_{ij}^0}{2G}\left[1 + \int_0^t K(\tau)d\tau\right]. \qquad (2)$$

Продиференціюємо обидві частини (2) за t і розв'яжемо відносно $K(t)$:

$$K(t) = \frac{2G}{S_{ij}^0} \cdot \frac{de_{ij}}{dt}. \qquad (3)$$

Функція впливу $K(t)$ є сингулярною, тобто при

$$t = 0, \Rightarrow de_{ij}/dt \to \infty, \Rightarrow K(0) = \infty = 0,$$

і графік такої функції $K(t)$ можна побудувати за результатами диференціювання кривої повзучості $e_{ij}(t) \sim t$.

На практиці часто користуються аналітичними виразами для функцій впливу, що містять деяку кількість параметрів, які необхідно визначити експериментально. Добре відомі [4] такі функції: Кольрауша, Хевісайда, у вигляді Г-розподілів та інші. Такі функції добре описують швидкість релаксаційних процесів, якщо містять достатню кількість параметрів, які разом з пружними постійними є механічними характеристиками деформованого тіла або середовища.

Нами пропонується емпірична функція впливу

$$K(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[A\Gamma\{\alpha\}\right]^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n)}, \qquad (4)$$

де $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функція Ейлера; α, β, A - параметри напруженого стану.

Для великих значень t функція швидкості релаксації має асимптотично-експоненціальну форму:

$$K(t) = \frac{1}{\alpha}\left[A\Gamma(\alpha)\right]^{1/2} \exp\left\{\left[A\Gamma(\alpha)\right]^{\alpha} - \beta\right\} \cdot t \qquad (5)$$

Як бачимо, для достатньо великих t при $\beta\alpha/A\Gamma(\alpha) = B < 1$, $K(t) \to 0$, що відповідає обмеженій повзучості; при $B < 1$, $K(t) \to \infty$ - необмеженій повзучості; при $B = 1$, $K(t) = const$ – усталеній [4].

Для визначення механічних характеристик деформованого тіла за даними дослідів можна скористатись наближеним методом – методом суміщень. Суть його полягає в порівнянні (суміщені) експериментальної кривої $K_e \sim t$ з подібною їй із табличних теоретичних кривих $K_\tau \sim t$, побудованих для різних параметрів функцій впливу α, β, A в логарифмічній системі координат. Після графічного суміщення, параметри теоретичної кривої із урахуванням різниці по осі абсцис (часу) $t_\tau = Kt_e$ приписуються експериментальній кривій, тобто:

$$\alpha_e = \alpha_\tau = \alpha; \quad A_e = K^{\alpha} A_{\tau}; \quad K = t_\tau / t_e. \qquad (6)$$

У результаті після підстановки $\alpha e, \beta e, Ae$ в (4) одержимо:

$$K_e(t_e) = \frac{e^{-\beta_e t_e}}{t_e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[A_e\Gamma\{\alpha_e\}\right]^n t_e^{n\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_e n)}, \qquad (7)$$

де параметри деформованого тіла α_e, β_e, A_e. визначаються формулами (6) через відомі параметри $\alpha_\tau, \beta_\tau, A_\tau$ подібної теоретичної кривої $K_\tau \sim 1$. Такий підхід може бути широко вживаним в інженерній геодезії, оскільки для встановлення параметрів сингулярного ядра $K_\tau(t)$ є бібліотека з достатньою кількістю теоретичних кривих функцій $K_\tau \sim t$, а також таблиці значень їх величин, які обчислені для широкого діапазону значень параметрів α ,β ,A з інтервалом часу $t \geq 0.0001$.

2. Реологічна модель як плоска контактна задача. Розглянемо спрощену реологічну модель твердого тіла, що деформується, як плоску контактну задачу. Нехай в лабораторних умовах визначено тиск гладкого штампу на півпростір методами розв'язання інтегральних рівнянь.

Для цього потрібно визначити контактні напруження, що моделюють дію жорсткого гладкого штампа на пружний півпростір.

Припустимо, що так діють фіксовані сили, тобто без врахування можливої їх ротації і нехтування зовнішніх сил.

Нехай штамп знаходиться в стані граничної рівноваги. При пустимо, що відсутнє зовнішнє навантаження, тобто при $y = 0$ $\sigma_x = 0,$ $\tau_{xy} = 0$. Під штампом нормальні і тангенціальні напруження зв'язані лінійним співвідношенням при $y = 0,$ $\tau_{xy} + \rho\sigma_y = 0$, де ρ – коефіцієнт тертя, і задана величина переміщення $v = f(x) + const$, де $f(x)$ – форма контуру штампа.

Позначимо невідомі контакти напруження через $p(x)$. Виходячи з формули для переміщення штампу v при $y = 0$ для знаходження функції $p(x)$ в області контакту $[c,d]$, отримаємо інтегральне рівняння:

$$\int_c^d p(t)\ln|t - x|dt + \beta\int_a^x p(t)dt = F(x), \tag{8}$$

де $F(x) = \frac{1}{\lambda}v + const,$ $\lambda = \frac{1-v}{\pi G},$ $\beta = \frac{1-2v}{2(1-v)}\pi\rho,$ v – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву.

Невідомі контакти напруження повинні задовольняти таку умову рівноваги:

$$\int_c^d p(x)dx = P, \tag{9}$$

де P – величина нормальної сили, що діє на штамп.

Дослідження рівняння (8) утруднене, оскільки область контакту $[c,d]$ є невідомою. Тому введемо в розгляд область $D = [a,b]$, яка включає в себе невідому область контакту $[c,d]$. Поза областю контакту в області D границя не навантажується, а тому $p(x) = 0$. Для знаходження функції $p(x)$ в області D отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{gathered} \int_a^b p(t)\ln|t - x|dt + \beta\int_a^x p(t)dt = F(x), \quad npu \quad p(x) < 0, \\ F(x) - \int_a^b p(t)\ln|t - x|dt + \beta\int_a^x p(t)dt > 0, \quad npu \quad p(x) = 0, \quad x \in [a,b]. \end{gathered} \tag{10}$$

Якщо не враховувати сили тертя, то необхідно в інтегральному рівняння (8) прийняти $\beta = 0$.

Розв'язок інтегрального рівняння (10) здійснюється чисельним методом. Замінимо рівняння (10) його дискретним аналогом. Для цього розіб'ємо допустиму область контакту точками $x_n = nh,$ де $N_1 \leq n \leq N_2$, де h – задані сталі величини.

Невідомий тиск зобразимо у вигляді кусочно-неперервного інтерполяційного полінома першого ступеня:

$$p(x) = \sum_n p_n S_h(x - x_n), \tag{11}$$

де $p_{n,m} = p(x_n), \quad S_h(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{h}, & при \quad |x| < h. \\ 0, & |x| > h \end{cases}$

Тут прийнято, що функція p визначена поза областю контакту, де вона рівна нулю.

Підставимо (14) в систему рівнянь (10) . У формулах (8) невідомі значення p_n можуть бути від'ємними величинами (в області контакту) або рівними нулю (поза штампами). Тоді отримаємо рівняння:

$$\sum_n A_{v,n} p_n = F_v \quad при \quad \mathrm{p_v} < 0, \tag{12}$$

$$\sum_n A_{v,n} p_n \le F_v \quad при \quad \mathrm{p_v} = 0, \tag{13}$$

$$N_1 \le v \le N_{2,} \quad F_v = F(x_v), \quad A_{v,n} = C_{v,n} + \beta B_{v,n}, \quad C_{v,\mu,nm} = c_{|v-n|,|\mu-m|},$$

де $B_{v,n} \begin{cases} 1, & n < v; \\ 1/2, & n = v; \\ 0 & n > v, \end{cases} \quad c_{i,j} = \int\limits_{-h}^{h} \ln|t - x| S_h(t)\,dt.$

Тут індекс v такий, що відповідне йому значення точки належить області контакту, тобто вона є наперед невідомою. Аналогічно до попередньої задачі про визначення контактних напружень зведемо до задачі квадратичного програмування.

$$\begin{gathered} Y = \sum_{v=N_1}^{N_2} C_v \sum_{n=N_1}^{N_2} \left(A_{v,n} p_n - F_v \right) p_v \\ \sum_{n=N_1}^{N_2} A_{v,n} p_n \le F_v \;, \end{gathered} \tag{14}$$

та умови

$$\begin{gathered} h \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n, \\ p_n \le 0, \end{gathered} \tag{15}$$

де p_n – шукані контакти напруження, C_v – деякі додатні сталі.

Зазначимо, що наперед невідома область контакту знаходиться в процесі розрахунків – це область, в якій знайдені значення $p_n < 0$.

Висновки. Побудована реологічна модель методом суміщень як плоска контактна задача з розв'язком інтегрального рівняння чисельним методом, що є доцільним для вирішення інженерно-геодезичних задач, зокрема при проектному моделюванні функціональних елементів технологічних комплексів.

Робота виконана за підтримки МОН України (держреєстраційний номер теми №0112U000290).

1. Мельник В.М., Шостак А.В. Кількісна стереомікрофрактографія. Монографія / В.М. Мельник, А. В. Шостак. − Луцьк: Вид. «Твердиня». 2010. – 457 с.

2. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М.А. Колтунов. – М.: Высшая школа 1967. – 287 с.

3. Маркова К. В. Визначення тиску гладкого штампа на півпростір методами інтегральних рівнянь і квадратичного програмування. Плоска контактна задача / К. В. Маркова // Наукові нотатки. Міжвуз. зб. (за напрямом «Інженерна механіка». − Луцьк, ЛНТУ. − 2007. – В.20. – С. 285 − 288.

4. Галин Л. А. Контактная задача теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. − М.: Наука, 1980. – 304 с.

5. Михелев Д. Ш., Рунов И. В., Голубцов А. И. Геодезические измерения при изучении деформаций крупных инженерных сооружений / Д. Ш. Михелев, И. В. Рунов, А. И. Голубцов. − М.: Недра. − 1977. − 152 с.