УДК 539.375;539.4:536.543

Добровольська Л.Н., к.т.н.
Луцький національний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ОКОЛІ НЕПРЯМОЛІНІЙНИХ ЗА ТОВЩИНОЮ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ КОНТУРІВ НАСКРІЗНИХ ТРІЩИН

Розглянуто клас задач із визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі непрямолінійних за товщиною пластин контурів тріщин. Вважається, що пластини розтягуються рівномірно розподіленими зусиллями перпендикулярно площині розміщення тріщин, а контури таких тріщин не перпендикулярні до поверхонь пластин (не прямолінійні за товщиною пластини). Тому для знаходження напруженого стану біля контурів тріщин задача зводиться до визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I*, які будуть змінними вздовж контурів тріщин. При цьому приймаються умови, що довжина тріщин набагато більша від товщини пластини і області зміни не прямолінійності їх контурів.*

Для розв'язування таких задач проведено узагальнення відомого методу граничної інтерполяції. На основі цього встановлені наближені формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень у випадках розтягу пластин з тріщинами, зокрема, нескінченної пластини з прямолінійною тріщиною; смуги з центральною тріщиною; смуги з боковою тріщиною; пластинок з прямолінійними тріщинами, довжина яких набагато більша від величини зміни контуру тріщини від прямолінійного за товщиною пластини. При цьому показано, що найбільше значення коефіцієнта інтенсивності напружень буде біля точки контуру тріщини, що виходить на поверхню пластини її найменшої довжини. Під час вирівнювання контура тріщини і наближення до поверхневої точки її найбільшої довжини коефіцієнт інтенсивності напружень буде спадати. За відносного потовщення пластини коефіцієнт інтенсивності напружень K_I *збільшується.*

У разі, коли смуга з боковою тріщиною, що має косі за товщиною смуги контури, розтягується перпендикулярними до площини розміщення тріщини зосередженими зусиллями, знайдені критичні значення зовнішнього навантаження. Ці критичні значення зовнішніх зусиль порівняно з відомими в літературі експериментальними даними для такої ж схеми руйнування смуги з боковою тріщиною, що виготовлена з епоксидної смоли. Це порівняння підтвердило достатню для інженерного застосування точність запропонованого підходу для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень біля непрямолінійних контурів наскрізних тріщин в тонкостінних елементах конструкцій.

Метод граничної інтерполяції, наскрізні тріщини з непрямолінійними контурами за товщиною пластини, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Визначенням залишкової міцності і залишкової довговічності елементів конструкцій з тріщинами займається така наука, як механіка руйнування матеріалів [1-4]. Зокрема, коли елементи конструкцій виготовлені із крихких або квазікрихких матеріалів, то для встановлення гранично рівноважного стану таких елементів з тріщинами застосовують лінійну механіку руйнування [1-4], визначальними параметрами якої є коефіцієнти інтенсивності напружень.

Для визначення таких коефіцієнтів інтенсивності напружень в літературі розроблено ряд ефективних методів (див., наприклад [1-4]), а також створені довідники [5, 6], в яких зібрані формули для обчислення таких коефіцієнтів і їх числові значення для багатьох силових схем навантаження елементів з тріщинами. Найбільш ефективним серед згаданих вище методів визначення коефіцієнтів інтенсивності є метод скінчених елементів. Проте цей метод дає тільки фіксовані числові значення для певних геометричних параметрів тіл з тріщинами і видів навантаження, що є достатнє для визначення залишкової міцності елементів конструкцій з тріщинами. У випадку сповільненого руйнування елементів конструкцій і визначення їх залишкової довговічності, що описується диференціальними рівняннями з початковими і кінцевими умовами, де коефіцієнти інтенсивності напружень входять як неперервні функції, метод скінчених елементів є мало ефективним. Ту необхідно мати значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у функціональній формі.

Слід зазначити, що в згаданих вище [5, 6] довідникових посібниках зібрана велика кількість аналітичних представлень коефіцієнтів інтенсивності напружень для різної геометрії і схем навантажень тіл з тріщинами. Найбільша кількість таких представлень зроблена для тонкостінних елементів з наскрізними тріщинами (двохвимірні задачі). Проте в цих випадках контури тріщин по товщині стінки елементів прямолінійні і перпендикулярні до їх поверхонь. Якщо тонкостінні елементи з тріщинами багато шарові і неоднорідні за механічними характеристиками по товщині, то такі задачі будуть уже трьохвимірні і розв’язок їх пов’язаний із значними математичними трудностями для отримання коефіцієнти інтенсивності напружень в простій функціональній формі. В літературі [5] відомі спроби розв’язання таких задач, але їх точність незадовільна для практичного використання.

В даній роботі якраз і розглядаються задачі такого типу. Тут проведено узагальнення відомого [2] методу граничної інтерполяції на випадок наближеного визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень біля непрямолінійних по товщині контурів наскрізних тріщин в пластинах. Суть такого підходу полягає в наступному.

Постановка задачі і метод її розв’язку. Розглянемо спочатку випадок нескінченної пластини товщиною h з центральною наскрізною тріщиною (поверхневих довжин l_1, l_2), контур якої має косу прямолінійну ділянку і два заокруглення біля поверхневих точок *A* і *B* відповідно шириною d_2 і d_1 (рис. 1, *в*).

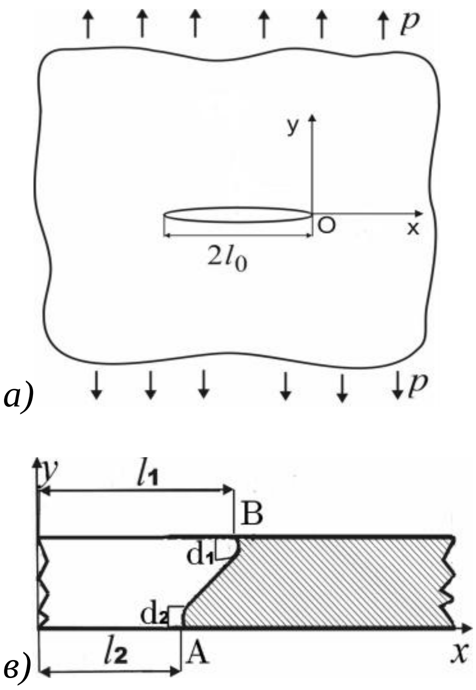


Рис. 1. Схеми навантаження (*а*) і поперечеого перерізу *(в)* пластини з тріщиною

Вважається, що така пластина розтягується в нескінченно віддалених точках рівномірно розподіленими зусиллями p. Задача полягає у визначенні коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ біля контуру тріщини.

Таку задачу досить точно можна розв’язати з допомогою числових методів і отримати матрицю числових значень для $K_I(x, y)$ для різних значень x, y. Проте, для дослідження сповільненого поширення тріщини необхідно мати аналітичне представлення $K_I(x, y)$. Для наближеної реалізації такої задачі застосуємо відомий [1, 2] метод граничної інтерполяції. Суть його полягає в наступному.

Визначимо спочатку значення $K_I(x, y)$ біля поверхневих точок *A*, *B* з координатами, відповідно, $(l_2, 0)$ і (l_1, h). В граничних значеннях $l_1 = l_2, l_1 \to \infty$ коефіцієнт інтенсивності напружень біля точки *A* буде мати наступні значення [5, 6],

$$K_I(l_2,0)\big|_{l_1=l_2} = p\sqrt{\pi l_2}\,, \qquad K_I(l_2,0)\big|_{l_1\to\infty} = p d_1^{-1} h\sqrt{\pi l_2}\,. \quad (1)$$

Маючи граничні значення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(l_2,0)$ біля точки *A*, знайдемо на основі методу граничної інтерполяції [1, 2] його наближене представлення для будь-яких величин l_1 в наступному вигляді

$$K_I(l_2,0) = p\sqrt{\pi l_2}\left[\frac{l_2}{l_1} + \frac{h}{d_1}\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)\right](l_2 \le l_1 < \infty)\,. \quad (2)$$

Перейдемо тепер до визначення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ біля точки *B*, тобто при $x = l_1, y = h_1 + h_2$. Граничні значення його для цього випадку при $l_1 = l_2, l_1 \to \infty$ будуть наступні. При $l_1 = l_2$ маємо задачу Гріффітса, для якої коефіцієнт інтенсивності напружень дорівнює [5, 6]

$$K_I(l_1,h)\big|_{l_1=l_2} = p\sqrt{\pi l_2}\,. \quad (3)$$

Для випадку $l_1 \to \infty$ користуємося розв’язком для випадку поверхневої півеліптичної тріщини і він в даних позначеннях буде рівний [5, 6]

$$K_I(l_1, h)\big|_{l_1 \to \infty} = p\sqrt{\pi l_2}\,(l_2 l_1)^{-0,5} h\,. \qquad (4)$$

Аналогічно попередньому, на основі методу граничної інтерполяції [1, 2] і співвідношень (3), (4) для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ біля точки B для будь-яких значень l_1 отримаємо наступну наближену формулу

$$K_I(l_1, h) = p\sqrt{\pi l_2}\left[\frac{l_2}{l_1} + (l_2 l_1)^{-0,5} h\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)\right] \ (l_2 \le l_1 < \infty)\,. \qquad (5)$$

Вважаючи, що коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ вздовж контуру тріщини в основному змінюється наближено за лінійним законом, то на основі (2) і (5) для його визначення отримаємо таку наближену формулу

$$K_I[l_2 + y(l_1 - l_2)h^{-1}, y] = p\sqrt{\pi l_2}\,[\varepsilon(1-\alpha) + \alpha + \beta(1-\varepsilon)(\gamma - \alpha)]\,. \qquad (6)$$

Тут $\varepsilon = l_2 l_1^{-1}$, $\alpha = d_1^{-1} h$, $\beta = y h^{-1}$, $\gamma = (l_1 l_2)^{-0,5} h$. Формулу (6) можна записати через безрозмірну величину коефіцієнта інтенсивності напружень $K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma)$

$$K_I[l_2 + \beta(l_1 - l_2), y] = p\sqrt{\pi l_2}\,K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma),\ K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma) = [\varepsilon(1-\alpha) + \alpha + \beta(1-\varepsilon)(\gamma - \alpha)]. \qquad (7)$$

Дослідимо тепер зміну безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma)$ від зміни безрозмірних параметрів $\varepsilon, \beta, \gamma$ при $\alpha = 2$. Тоді зміна $K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma)$ від одного при конкретних значеннях двох інших безрозмірних параметрів буде визначатися так:

$$\begin{aligned} &1)\ \alpha = 2,\ \beta = 0,\ \gamma = 0{,}5,\ K = 2 - \varepsilon;\ (0 \le \varepsilon \le 1);\\ &2)\ \alpha = 2,\ \varepsilon = 0{,}5,\ \gamma = 0{,}5,\ K = 1{,}5 - 0{,}75\beta;\ (0 \le \beta \le 1);\\ &3)\ \alpha = 2,\ \varepsilon = 0{,}5,\ \beta = 0{,}5,\ K = 1 + 0{,}25\gamma,\ (0 < \gamma < 1). \end{aligned} \qquad (8)$$

На основі співвідношень (8) на рис. 2 побудовані графічні залежності безрозмірного значення коефіцієнта інтенсивності напружень $K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma)$ від одного із безрозмірних параметрів $\varepsilon, \beta, \gamma$. На основі аналізу співвідношень (7), (8) і рис.3 випливає, що найбільше значення коефіцієнта інтенсивності напружень буде біля точки контуру тріщини A ($\beta = 0$). При зростанні параметра ε (вирівнюванні контура тріщини і наближення до точки B) коефіцієнт інтенсивності напружень буде спадати. При відносному потовщенні пластини (збільшенні параметру γ) коефіцієнт інтенсивності напруження $K_I(x, y)$ збільшується.

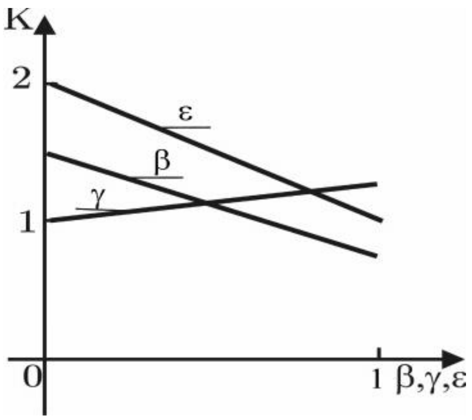


Рис. 2. Графічні залежності $K(\alpha, \varepsilon, \beta, \gamma)$ від безрозмірних параметрів $\varepsilon, \beta, \gamma$

Смуга з боковою тріщиною. При проведенні експериментальних досліджень з визначення характеристик тріщиностійкості конструкційних матеріалів застосовують різні силові схеми руйнування зразків з тріщинами [7], в тому числі схема [8], яка зображена на рис. 3. Тут достатньо довгий плоский зразок шириною h і товщиною t з поверхневою тріщиною і косим прямолінійним контуром розтягується силами P. Задача полягає у визначенні коефіцієнта інтенсивності напружинь $K_I(x, y)$.

Дану задачу розв’язуємо наближено, аналогічно попередньому. Спочатку вважаємо, що ширина зразка h набагато більша від довжини тріщини l_1, тобто $h >> l_1$. В такому випадку маємо півплощину з поверхневою прямолінійною косою в поперечному перерізі тріщиною. Також вважаємо, що зразок може бути використаний для експериментальних досліджень із визначення характеристики статичної тріщиностійкості матеріалів, за яких з гострого закінчення біля точки А контуру тріщини проходить її субкритичний ріст і, відповідно, заокруглення контуру. У зв’язку з цим, приймаємо ширину d_2 такого заокруглення контуру тріщини (див. рис. 1, *в*) наближено рівну половині товщини зразка, тобто $d_2 = 0{,}5t$.

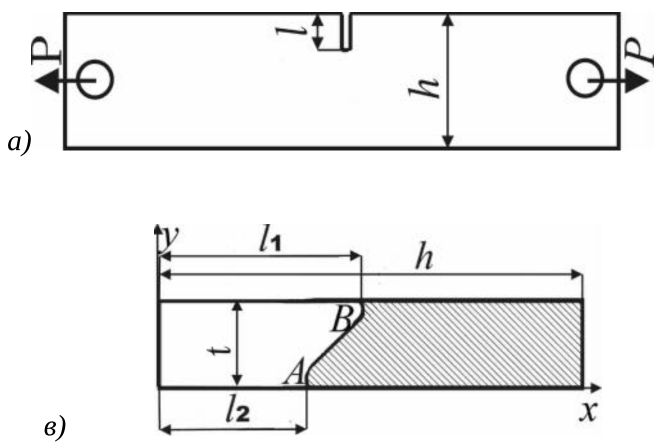


Рис. 3. Схеми навантаження (*а*) і геометрії поперечного січення *(в)*
плоского зразка з боковою тріщиною косого прямолінійного контуру

Як і в попередньому випадку для нескінченної площини з наскрізною тріщиною в поперечному перерізі з косим контуром, спочатку знаходимо значення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x,y)$ біля поверхневих точок *A*, *B*. Використовуючи попередні міркування і результати роботи [5, 6], для визначення цих значень отримаємо такі наближені формули

$$K_I(l_2,0) = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi l_2}\left[2-\frac{l_2}{l_1}\right] \quad (l_2 \le l_1 < \infty),$$

$$K_I(l_1,t) = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi l_2}\left[\frac{l_2}{l_1}+t(l_2 l_1)^{-0,5}\left(1-\frac{l_2}{l_1}\right)\right] \quad (l_2 \le l_1 < \infty). \tag{9}$$

Будемо вважати, що коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I(x,y)$ вздовж контуру тріщини в основному змінюється за лінійним законом, то на основі (9) для його визначення отримаємо таку наближену формулу

$$K_I[l_2 + yt^{-1}(l_1 - l_2), y] = 1{,}12\pm\sqrt{\text{®} l_2}\,K_0(\text{£},\ \ ,\text{¥}),\ K_0(\text{£},\ \ ,\text{¥}) = [2-\text{£}+\ \ (1-\text{£})(\text{¥}-2)]\,. \tag{10}$$

Тут $\text{£} = l_2 l_1^{-1}$, $\quad = yt^{-1}$, $\text{¥} = t(l_1 l_2)^{-0,5}$.

Якщо ширина зразка h співмірна з довжиною тріщини і $l_2 = l_1$,то на основі результатів [9] для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x,y)$ можемо записати наступну формулу

$$K_I(x,y) = K_I^{(0)}\Psi(\text{ª}),\ K_I^{(0)}(x,y) = 1{,}12\pm\sqrt{\text{®} l_2},\ \Psi(\text{ª}) = 0{,}50(1{,}99-0{,}41\text{ª}+18{,}70\text{ª}^2-38{,}48\text{ª}^3+53{,}85\text{ª}^4),\ \text{ª} = l_2 h^{-1}$$
. (11)

Тут $K_I^{(0)}(x,y)$ - складова коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x,y)$, яка рівна коефіцієнтові інтенсивності напружень біля крайової тріщини в півплощині і відповідає за її конфігурацію; $\Psi(\text{ª})$ - складова коефіцієнта напружень $K_I(x,y)$, яка визначає вплив протилежної до тріщини вільної поверхні зразка; $\pm = P(th)^{-1}$. У зв’язку з цим для врахування конфігурації контуру тріщини в зразку, зображеної на рис. 3, замінимо у формулі (11) складову $K_I^{(0)}(x,y)$, яка відповідає за конфігурацію контуру тріщини, на складову $K_I[l_2 + yt^{-1}(l_1 - l_2), y]$, що визначається формулою (10). Тоді для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень біля контуру наближено трапецевидної тріщини (див. рис. 3) отримаємо таку формулу

$$K_I(x,y) = PF(\sim,\ \ ,\text{£},\text{¥},\text{ª}),\ F(\sim,\ \ ,\text{£},\text{¥},\text{ª}) = 1{,}12(th)^{-1}\sqrt{\text{®} l_2}\,K_0(\text{£},\ \ ,\text{¥})\Psi(\text{ª})\,. \tag{12}$$

На основі критерію Ірвіна [1, 2] і формули (12) для визначення критичного значення величини зовнішнього навантаження $P = P_*$ отримаємо наступну формулу

$$P_* = K_{IC} F^{-1}(\sim,0,£,¥,ª) . \qquad (13)$$

Тут K_{IC} - характеристика статичної тріщиностійкості матеріалу зразка; $F(\sim,0,£,¥,ª)$ - максимальне значення функції $F(\sim, ,£,¥,ª)$, що відповідає максимальному значенню коефіцієнта інтенсивності напружень в точці *A* контуру тріщини (див. рис. 3).

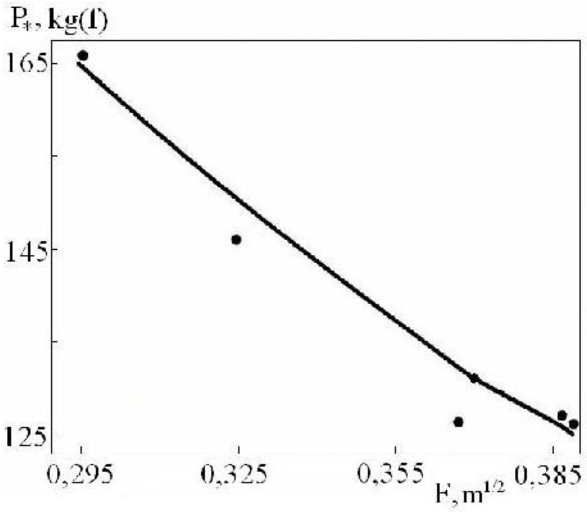


Рис. 4. Залежність значення сили P_* від параметру геометрії пластини F : точки – експеримент [11]; суцільна лінія – формула (19)

Точність і коректність формули (13) перевірялися результатами експериментальних досліджень, проведених в роботі [8] на зразках із епоксидної смоли, для якої величину статичної тріщиностійкості K_{IC} вибирали таку ж, як і в роботах [7, 9]. На основі цього на рис. 4 за формулою (13) побудована графічна залежність $P_* \sim F$ (суцільна лінія), а також нанесені результати експериментальних досліджень [8] (темні кружечки). Як випливає із порівняння результатів аналітичних і експериментальних досліджень отримана в даній роботі формула (12) має достатню для інженерних розрахунків точність, що підтверджує коректність запропонованого в даній роботі підходу. Тому це можна сказати і за формулу (7), яка отримана на основі такого ж підходу.

Слід зазначити, що в роботах [10, 11] були також зроблені спроби побудувати аналогічні (12) формули. Але, як сказано в роботі [5], точність їх недостатньо задовільна для практичного застосування.

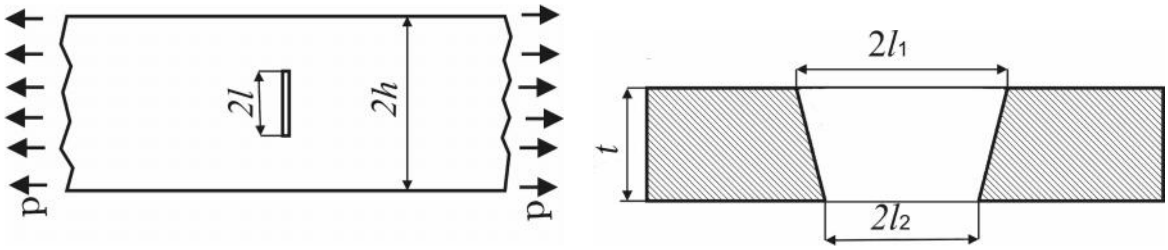
Смуга з центральною тріщиною. Розглянемо довгу пластину у вигляді смуги товщини t і ширини $2h$, яка послаблена центральною наскрізною тріщиною з косими прямолінійними контурами по товщині (поверхневих довжин $2l_1, 2l_2$) і розтягується в достатньо відділених від тріщини точках рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності p (рис. 5). Вважається, що біля виходу контурів тріщини на поверхню є два заокруглення шириною d_2 і d_1 (як і в попередньому випадку, див. рис. 1, *в*). Задача полягає у визначенні коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ біля контуру тріщини.

Розв’язок такої задачі здійснюємо аналогічно попередньому. Якщо ширина пластини набагато більша від поверхневих розмірів тріщини, тобто $h >> l_1$, то отримуємо попередній випадок нескінченної пластини з центральною тріщиною (рис. 1), для якого коефіцієнт інтенсивності напружень визначається формулою (7).

При рівності поверхневих розмірів тріщини $l_1 = l_2$ отримаємо випадок, коли $K_I(x, y)$ буде постійний вздовж контурів тріщини і буде визначатися відомою [5] формулою

$$K_I(x, y) = p\sqrt{\pi l_2}\,\Psi_1(\lambda), \;\; \lambda = l_2 h^{-1} , \qquad (14)$$

$$\Psi_1(ª) = (1 - 0{,}025ª^2 + 0{,}060ª^4)\sqrt{\sec 0{,}5®ª} \; .$$



а) *в)*

Рис. 5. Схеми навантаження *(а)* і геометрії поперечного перерізу *(в)* смуги з центральною тріщиною

При розв'язуванні задачі будемо вважати, що геометричні параметри тріщини задовольняють наступній умові

$$h >> l_1 - l_2 . \tag{15}$$

Це означає, що на зміну вздовж контуру тріщини по товщині пластини коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ не буде впливати параметр h, а ця зміна буде визначатися тільки формулою (7). Тоді на основі попередніх міркувань і співвідношень (7) і (14) для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ біля контурів тріщини отримаємо таку наближену формулу

$$K_I(x, y) = p\sqrt{\pi l_2}[\varepsilon(1-\alpha) + \alpha + \beta(1-\varepsilon)(\gamma-\alpha)]\Psi_1(\lambda) . \tag{16}$$

Тут величини $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ визначені в попередньому (Приклад 1), а λ і $\Psi_1(\lambda)$ дані в формулах (16).

Тонкі пластини з довгими тріщинами. Дослідимо тепер більш загальні випадки визначення $K_I(x, y)$ для пластин з наскрізними тріщинами, зміни контурів яких по товщині пластин такі, як на рис. 1, 3, 5.

Розглянемо спочатку випадок пластини товщини t з прямолінійною внутрішньою наскрізною тріщиною поверхневих довжин $2l_1, 2l_2$, контури якої по товщині пластини змінюються як, наприклад, на рис. 5. Вважається, що геометрія контуру пластини характеризується параметрами a_i $(a_i > l_1, l_2;\ a_i >> l_1 - l_2;\ i = 1,...,n)$, пластина навантажена зовнішніми зусиллями, які прикладні далеко від контуру тріщини і створюють в ній симетричний відносно площини тріщини напружено деформований стан, а по площині розміщення тріщини на випадок відсутності тріщини однорідні розтягуючи напруження σ. При $a_i \to \infty$ отримаємо випадок нескінченної пластини з прямолінійною тріщиною, який розглянутий раніше в першому розділі даної роботи. Тоді на основі попередніх міркувань коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I(x, y)$ для загального випадку буде визначатися наближено так

$$K_I(x, y) = \sigma\sqrt{\pi l_2}[\varepsilon(1-\alpha) + \alpha + \beta(1-\varepsilon)(\gamma-\alpha)]\Psi_2(\lambda_1,...,\lambda n),\ \lambda_i = l_2 a_i^{-1} . \tag{17}$$

Тут $\Psi_2(\lambda_1,...,\lambda n)$ - функція, яка визначає $K_I(x, y)$ для випадку $l_1 = l_2$ і може бути побудована для багатьох конфігурацій пластини на основі відомого [8] методу граничної інтерполяції, або приведена в роботі [9]. Для випадку, коли пластина має форму смуги з центральною тріщиною (розглянута задача вище) функція $\Psi_2(\lambda_1,...,\lambda n) = \Psi_1(\lambda),\ \lambda_i = \lambda$.

Далі дослідимо визначення $K_I(x, y)$ для випадку, коли пластина послаблена боковою наскрізною плоскою тріщиною поверхневих довжин l_1, l_2, контур якої по товщині пластини змінюється як, наприклад, на рис. 3, *в*. Аналогічно попередньому, вважаємо, що геометрія контуру пластини характеризується параметрами a_i $(a_i > l_1, l_2;\ a_i >> l_1 - l_2;\ i = 1,...,n)$, пластина навантажена зовнішніми зусиллями, які прикладні далеко від контуру тріщини і створюють в ній симетричний відносно площини тріщини напружено деформований стан, а по площині розміщення тріщини на випадок відсутності тріщини однорідні розтягуючи напруження σ. Тоді коефіцієнт $K_I(x,y)$ інтенсивності напружень біля контуру тріщини буде визначатися, аналогічно попередньому, так

$$K_I(x,y) = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi l_2}[\varepsilon(1-\alpha)+\alpha+\beta(1-\varepsilon)(\gamma-\alpha)]\Psi_3(\lambda_1,...,\lambda n),\ \lambda_i = l_2 a_i^{-1}\ , \qquad (18)$$

де $\Psi_3(\lambda_1,...,\lambda n)$ - функція, яка визначає $K_I(x,y)$ для випадку $l_1 = l_2$ і може бути побудована для багатьох конфігурацій пластини на основі відомого [8] методу граничної інтерполяції, або приведена в роботі [9]. Для випадку, коли пластина має форму смуги з боковою тріщиною (розглянута задача вище) функція $\Psi_2(\lambda_1,...,\lambda n) = \Psi(\lambda),\ \lambda_i = \lambda$.

Таким чином, отримані тут вирази для коефіцієнта $K_I(x,y)$ інтенсивності напружень біля контуру тріщини можуть бути використані при розв’язанні задач сповільненого руйнування тонкостінних елементів конструкцій, механічні і міцністьні характеристики яких неоднорідні по товщині.

1. Панасюк В. В. Основы механики разрушения / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. З. Партон. – К.: Наукова думка, 1988. – 488 с.
2. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – К: Наукова думка, 1982. – 348 с.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.– М.: Наука, 1974. – 640 с.
4. Божидарник В. В. Елементи теорії пластичності та міцності / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим − Львів: Світ, 1999. − Т. 1. − 528 с.
5. *Stress* intensity factors handbook: In 2 Vol. / Ed. Yu. Murakami. – Oxford: Pergamon Press, 1987. – XLIX, XXXIX + 1456 p.
6. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещенами / М. П. Саврук. – К.: Наук. думка. – 1988. – 648 с.
7. *Ковчик С.Е., Морозов Е.М.* Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. – 1988. – 436 с.
8. *Murakami Y., Harada S., Endo T.,Harada Y., Yagi Y.* Application of brittle fracture 0f epoxy resin to experimental K-value evaluation. – J. Soc. Japan, 1982, **31,** № 344, p. 515-519.
9. *Чапля М.Э.*, *Гвоздюк Н.М.* Новая методика исследования роста поверхностных трещин в слоистых материалах. // Фізико-хімічна механіка матеріалів – 1984р. №1 – С. 84-87.
10. *Brown W.F.*, *Srawley J.E.* Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials. – ASTM STP 410, 1966.
11. *Parks D.M.* The inelastic line-spring : Estimates of elastic-plastic fracture mechanics parameters for surface-cracks plates and shells. – Trans. ASME, Ser. J, J. Pressure Vessel Technol., 1981, 103, p. 246-254.