ПРОЕКТУВАННЯ, АЛГОРИТМІЗАЦІЯ І ДІАГНОСТИКА СИСТЕМ АВТОМАТИЗОВАНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ КОМПЛЕКСАМИ

УДК 621.52
Копп В.Я., д.т.н.*, **Балакин А.И.**, к.т.н.*, **Чуйко Е.А.*, Заморенов М.В.,** к.т.н.**
*Севастопольский национальный технический университет
**Севастопольский институт банковского дела Университета банковского дела Национального банка Украины

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ ПРИ ОЦЕНКЕ ТРЕБУЕМОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ПРИБОРНЫХ СИСТЕМ

Приводится определение плотности распределения случайной величины являющейся суммой двух независимых случайных величин, сосредоточенных на конечных интервалах, обеспечивающих максимум ее неопределенности, при условии, что значения на границах интервала, внутри которого сосредоточена случайная величина, равны нулю. Сформулирована теорема, на основе которой определяются необходимые условия максимума энтропии суммы двух случайных величин, сосредоточенных на конечных интервалах.

Многократные измерения, случайная величина, точность

Введение

Одним из наиболее мощных средств обеспечения требуемой точности контроля изделий являются многократные измерения. При этом центральным вопросом является выбор минимально необходимого их числа, обеспечивающего требуемую точность. Для отыскания указанного параметра необходимо знать вид плотности распределения погрешности средства измерительной техники (СИТ). В [1] предлагается определять вид плотности распределения для случая максимальной неопределенности, т.е. максимальной дифференциальной энтропии случайной величины (СВ) сосредоточенной на конечном интервале при заданной дисперсии. В этой же работе получен композиционный закон, обеспечивающий максимум энтропии из которого следует, что при дисперсии, удовлетворяющей неравенству $d < \frac{(b-a)^2}{12}$, где a и b границы интервала на котором сосредоточена СВ, вид закона соответствует усеченному нормальному. Поэтому в [1] предложено определять доверительную вероятность при заданной дисперсии, полагая закон распределения усеченным нормальным. Сама дисперсия определяется на основе предложенного там же итерационного метода. Предложенный подход позволяет получать граничные оценки минимально необходимого числа измерений, исключив при этом из процесса процедуру определения сверток. Недостатком данного подхода, снижающим точность расчета является то, что при усеченном нормальном распределении значение плотности в граничных точках a и b не равно нулю. При этом известно, что уже при двукратных измерениях это условие должно выполняться, так как плотность распределения соответствует полусумме двух независимых СВ сосредоточенных на конечных интервалах.

Целью данной работы определение в общем виде плотности распределения СВ $¥ = \sim_1 + \sim_2$, являющейся суммой двух независимых СВ $\sim_1$ и $\sim_2$, сосредоточенных на конечных интервалах, обеспечивающей максимум ее неопределенности, причем дисперсию СВ ¥ обозначим $d_{¥}$.

Плотность этой величины имеет вид $p_\Sigma(x) = \int_{-a}^{b} p_2(x-y)p_1(y)dy$.

Если искать плотность $p_\Sigma(x)$ как решение вариационной задачи

$$p_\Sigma(x) \to \max\left\{H_{\text{диф}} = -\int_{-2a}^{2b}\left[p_\Sigma(x)\ln\left(p_\Sigma(x)\right)\right]dx\right\},$$

при ограничениях

$$\int_{-2a}^{2b} p_\Sigma(x)dx = 1;$$

$$\int_{-2a}^{2b} x^2 p_\Sigma(x)dx = d_{¥},$$

то ее решением будет усеченный нормальный закон вида $p_\Sigma(x) = e^{a_1 - 1}e^{x^2 a_2}$, где постоянные a_1, a_2 определяются из приведенных выше ограничений. Однако данное решение не удовлетворяет поставленной задаче, т.к. не выполняется условие $p_\Sigma(-2a) = p_\Sigma(2b) = 0$. Поэтому задачу необходимо сначала поставить задачу в более общем виде.

Найти плотности распределения $p_1(x)$, $p_2(x)$ обеспечивающие максимум функционала:

$$p_1(x), p_2(x) \to \max\left\{H_{\text{диф}} = -\int_{-2a}^{2b}\left[\int_{-a}^{b} p_2(x-y)p_1(y)dy \cdot \ln\left(\int_{-a}^{b} p_2(x-y)p_1(y)dy\right)\right]dx\right\}, \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\int_{-a}^{b} p_1(y)dy = 1; \quad (2)$$

$$\int_{-a}^{b} y^2 \cdot p_1(y)dy = d_1; \quad (3)$$

$$\int_{-a}^{b} p_2(y)dy = 1; \quad (4)$$

$$\int_{-a}^{b} y^2 \cdot p_2(y)dy = d_2. \quad (5)$$

Поставленная выше задача является вариационной задачей с изопериметрическими ограничениями. В отличие от классической постановки в данной задаче пределы интегрирования функционала и ограничений не совпадают. Для приведения ее к классическому виду будем решать задачу не относительно суммы двух СВ $\sim_1$ и $\sim_2$, а относительно СВ $= \frac{\sim_1 + \sim_2}{2}$. В этом случае функционал (1) будет иметь вид:

$$p_1(x), p_2(x) \to \max\left\{H_{\text{диф}} = -\int_{-a}^{b}\left[\int_{-a}^{b} 2 \cdot p_2(2x-y)p_1(y)dy \cdot \ln\left(\int_{-a}^{b} 2 \cdot p_2(2x-y)p_1(y)dy\right)\right]dx\right\}. \quad (6)$$

При этом, ограничения (2) – (5) остаются без изменений, а энтропия H СВ будет равна:

$$H = H_{¥} - \ln 2,$$

где $H_{¥}$ – энтропия СВ ¥ .

Необходимо отметить, что:

$$\int_{-a}^{b} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = \int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = \begin{cases} \int_{-a}^{2x+a} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy, & x \in \left[-a, \frac{b-a}{2}\right]; \\ \int_{2x-b}^{b} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy, & x \in \left[\frac{b-a}{2}, b\right], \end{cases}$$

где $\cdot\,(x) = \begin{cases} -a, & x \in \left[-a, \frac{b-a}{2}\right]; \\ 2x-b, & x \in \left[\frac{b-a}{2}, b\right]; \end{cases}$ $¨\,(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \in \left[-a, \frac{b-a}{2}\right]; \\ b, & x \in \left[\frac{b-a}{2}, b\right]. \end{cases}$

Для решения поставленной задачи используем уравнение Эйлера. Причем функция Лагранжа в данном случае имеет вид:

$$\Phi = -\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy \cdot \ln\left(\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy\right) + ª_1 p_1(x) + ª_2 x^2 p_1(x) + ª_3 p_2(x) + ª_4 x^2 p_2(x). \quad (7)$$

Хотя функция Φ имеет излом использование уравнение Эйлера справедливо, так как функционал не содержит производных искомых функций и следовательно условие Вейерштрасса-Эрдмана выполняется.

Считая p_1 независимой переменной, берем производную от выражения (7) и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1(x)} = -\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)dy \cdot \left[\ln\left(\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy\right) + 1\right] + ª_1 + ª_2 x^2 = 0 .$$

Решая уравнение относительно

$$p_{\Sigma cp}(x) = \int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy , \quad (8)$$

получаем:

$$\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{ª_1}{\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{ª_2 x^2}{\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)dy}} .$$

Учитывая, что $\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)dy = \int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(y)dy$, то

$$\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{ª_1}{\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{ª_2 x^2}{\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(y)dy}} . \quad (9)$$

Аналогично, дифференцируя выражение (7) по p_2 получаем:

$$\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{ª_3}{\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_1(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{ª_4 x^2}{\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} 2p_1(y)dy}} . \quad (10)$$

При этом плотность распределения $p_{\Sigma cp}(x)$ (8) СВ обеспечивает экстремум функционала (6). Если увеличить СВ в два раза, соответственно изменив ее плотность, то новое выражение плотности будет обеспечивать экстремум функционала (1). При этом энтропия СВ увеличится на константу равную $\ln(2)$. Соответственно необходимо изменить и правые части выражений (9) и (10). После преобразования выражения (9) и (10) примут вид

$$p_{\Sigma}(x)=\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{a_1}{\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(y)dy}-1}\cdot e^{\frac{a_2 x^2}{4\cdot\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(y)dy}}; \qquad (11)$$

$$p_{\Sigma}(x)=\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{a_3}{\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_1(y)dy}-1}\cdot e^{\frac{a_4 x^2}{4\cdot\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_1(y)dy}}, \qquad (12)$$

причем $\cdot(x)=\begin{cases}-a, & x\in[-2a,\ b-a]\\ x-b, & x\in[b-a,\ 2b]\end{cases}$, $\ddot{}(x)=\begin{cases}x+a, & x\in[-2a,b-a]\\ b, & x\in[b-a,\ 2b]\end{cases}$.

Получить точное решение системы функциональных интегральных уравнений первого рода (11) и (12) в общем виде относительно $p_1(y)$ и $p_2(y)$ крайне сложно. Однако исследовав полученные зависимости можно указать частные решения, которые могут иметь определенное прикладное значение, например при проведении многократных измерений.

Приравнивая правые части выражений (11) и (12) получаем

$$e^{\frac{a_1}{\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(y)dy}-1}\cdot e^{\frac{a_2 x^2}{4\cdot\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(y)dy}} = e^{\frac{a_3}{\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_1(y)dy}-1}\cdot e^{\frac{a_4 x^2}{4\cdot\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_1(y)dy}}.$$

Очевидным условием для получения одного из возможных решений является равенство

$$\int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_1(y)dy = \int_{\cdot(x)}^{\ddot{}(x)} p_2(y)dy, \qquad (13)$$

что естественно может быть выполнено при $p_1(y)=p_2(y)$. Достижение максимума при равенстве функций приводится в [2], однако в данной работе доказательство этого не приводилось.

Упростим исходную задачу и сформулируем ее следующим образом: при заданной плотности распределения $p_2(y)$ найти плотность распределения $p_{\Sigma}(x)$, обеспечивающую максимум функционала (1), при ограничениях

$$\int_{-a}^{b} p_2(x-y)p_1(y)dy = 1; \qquad (14)$$

$$\int_{-a}^{b} y^2 p_2(x-y)p_1(y)dy = d_{¥}. \qquad (15)$$

Ее решение найти можно.

Предположим, что $\sim_2$ имеет усеченный нормальный закон распределения, обеспечивающий ей, как доказано в [1] максимум энтропии

$$p_2(y)=e^{a'_1-1}e^{x^2 a'_2}, \qquad (16)$$

где a'_1, a'_2 определяются из условий (4), (5).

Подставляя в (11) выражение (16) получим плотность распределения суммы двух функций $p_{\Sigma}(x)$ обеспечивающую максимум функционала (1).

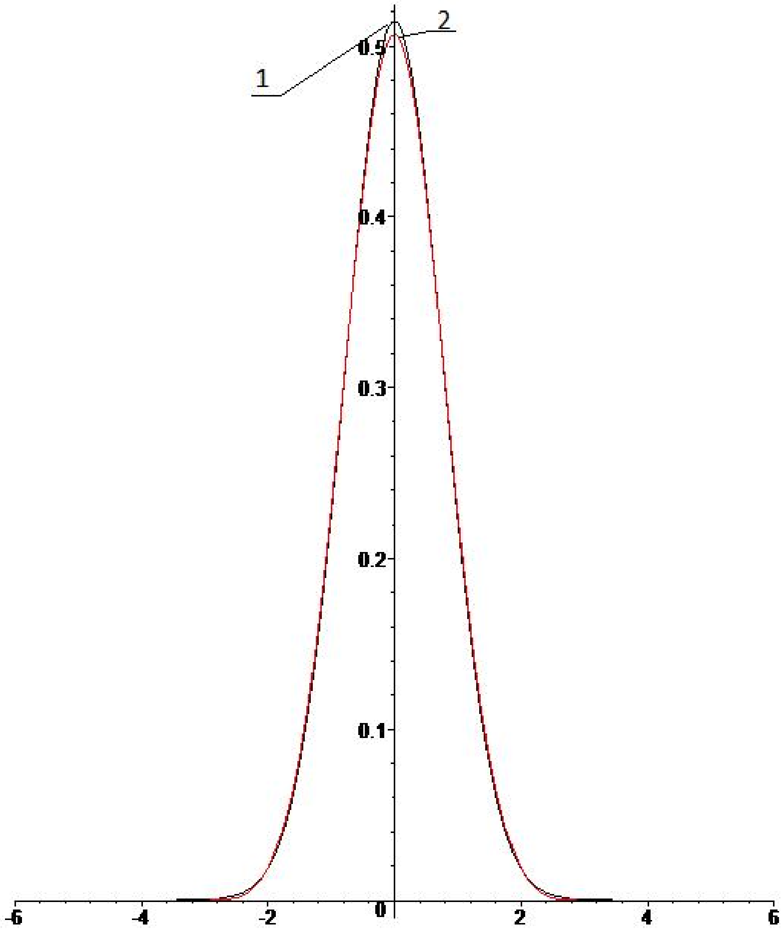
$$\int_{\cdot\,(x)}^{\cdot\cdot\,(x)} p_2(x-y)\,p_1(y)\,dy = e^{\frac{\text{а}_1}{\int_{\cdot\,(x)}^{\cdot\cdot\,(x)} e^{\text{а}'_1-1} e^{y^2 \text{а}'_2}\,dy}-1} \cdot e^{\frac{\text{а}_2 x^2}{4\cdot \int_{\cdot\,(x)}^{\cdot\cdot\,(x)} e^{\text{а}'_1-1} e^{y^2 \text{а}'_2}\,dy}}. \qquad (17)$$

Для определения множителей Лагранжа а_1, а_2 в выражении (17), необходимо подставить его в ограничения (14), (15) и решить полученную систему уравнений относительно а_1, а_2.

Отметим, что решение уравнения Эйлера является необходимым условием экстремума функционала (1). Проверка достаточного условия не проводилась, поэтому глобальный экстремум не гарантирован.

Результаты исследований

Результаты моделирования приведены на рисунке 1, где кривой 1 представлена плотность распределения p_Σ СВ ¥ .



1 – плотность распределения p_Σ СВ ¥

2 – плотность полученного закона

Рис. 1. Вид плотности распределения

Интерес представляет сравнение полученного вида закона распределения p_Σ с законом распределения суммы двух СВ, имеющих одинаковые нормальные усеченные законы распределения. Отметим, что данное решение соответствует условию (13). Вид закона представлен на рисунке 1 кривой 2. Численное решение показало, что с точностью до 4 знака после запятой значения энтропий совпадают.

На рисунке 2 представлен график зависимости значений энтропии композиции двух СВ $\sim_1$ и $\sim_2$ от дисперсии d_1 при заданной дисперсии $d_¥$.

Анализируя зависимость представленную на рисунке 2 можно сказать, что энтропия композиции двух СВ $\sim_1$ и $\sim_2$ имеет максимальное значение при $d_1 = d_2$.

При исследовании выражений (11), (12) на первый взгляд кажется что в них присутствует противоречие: для того чтобы в правой части обеспечить условие $p_\Sigma(-2a) = p_\Sigma(2b) = 0$ необходимо чтобы показатель экспоненты был равен $-\infty$. Однако ни какого противоречия нет, так как коэффициент при x^2 отрицательный, а значение интеграла при $x = -2a$, $x = 2b$ равны $\int_{-2a}^{2a} p_2(y)dy = 0$, $\int_{2b}^{2b} p_2(y)dy = 0$, $\int_{-2a}^{2a} p_1(y)dy = 0$, $\int_{2b}^{2b} p_1(y)dy = 0$.

Можно указать еще один подход к решению поставленной задачи, для случая когда СВ $\sim_1$, $\sim_2$ сосредоточены на разных интервалах, а в качестве известной функции принимается функция достаточно близкая к ¢-функции, существующая на интервале близким к нулю. Известно, что $p_1(x) = \int_{-2a}^{2b} p_1(y)¢(x-y)dy$.

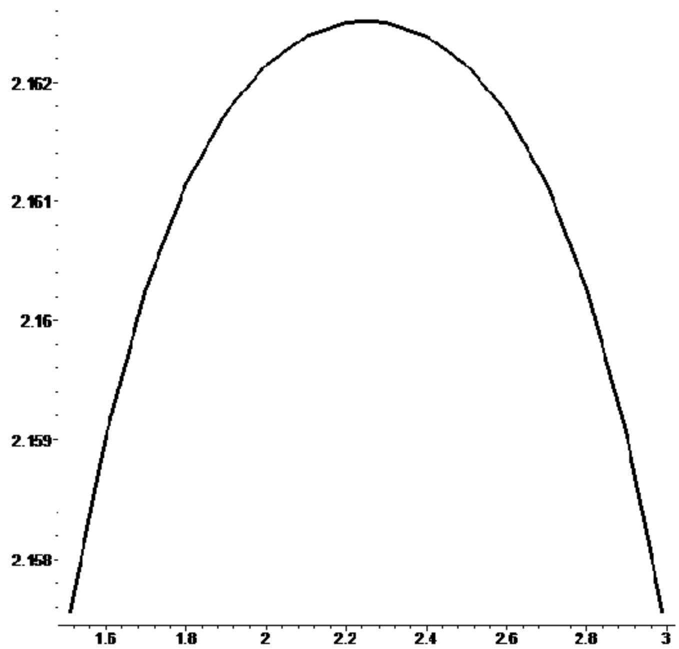
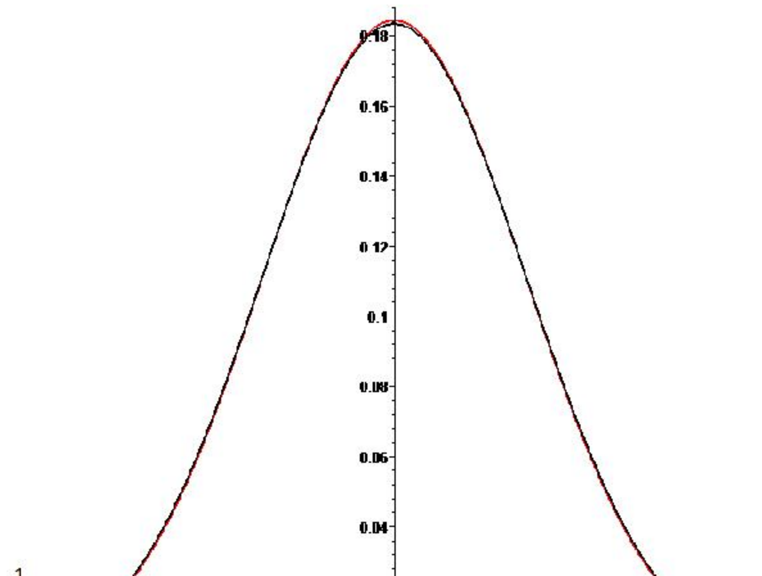


Рис. 2. Зависимость значений энтропии композиции двух СВ $~_1$ и $~_2$ от дисперсии d_1 при заданной $d_¥$

Результаты моделирования при известной функции $p_2(x)$ близкой к ¢-функции, у которой дисперсия и пределы близки к нулю, приведены на рисунке 3. На этом же рисунке приведен вид усеченного нормального закона обеспечивающего максимальную энтропию. Чем ближе указанная функция к ¢-функции тем ближе кривая 1 к кривой 2.



1 – усеченного нормального закона $p_1(x)$

2 – свертки закона $p_1(x)$ и функции $p_2(x)$ близкой к ¢-функции

Рис. 3. Вид плотности распределения

Выводы

Результаты исследований позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Необходимые условия максимума энтропии суммы двух СВ, сосредоточенных на конечных интервалах, имеющих одинаковые границы, при заданной дисперсии суммы $d_{¥}$ обеспечиваются плотностями распределения слагаемых СВ, удовлетворяющими условиям

$$\int_{\cdot\,(x)}^{¨\,(x)} p_2(x-y)\,p_1(y)dy = e^{\frac{ª_{1i}}{\int_{\cdot(x)}^{¨(x)} p_i(y)dy}-1} \cdot e^{\frac{ª_{2i}x^2}{4\cdot\int_{\cdot(x)}^{¨(x)} p_i(y)dy}},\ (i=1,\ 2),$$

где $ª_{1i},\ ª_{2i}$ – константы, определяющиеся из выражений $\int_{-a}^{b} p_2(x-y)\,p_1(y)dy = 1$; $\int_{-a}^{b} y^2 p_2(x-y)\,p_1(y)dy = d_{¥}$, а пределы интегрирования имеют вид:

$$\cdot\ (x) = \begin{cases} -a, & x\in[-2a,\ b-a] \\ x-b, & x\in[b-a,\ 2b] \end{cases},\quad ¨\ (x) = \begin{cases} x+a, & x\in[-2a, b-a]; \\ b, & x\in[b-a,\ 2b]. \end{cases}$$

Следствие. Необходимые условия максимума энтропии достигаются при выполнении условий:

$$p_1(y) = p_2(y);\quad ª_{11} = ª_{12},\quad ª_{21} = ª_{22}.$$

В дальнейшем планируется найти максимум энтропии для случая, когда функции $p_1(y),\ p_2(y)$ сосредоточенны на интервалах с разными границами. Основная сложность данной задачи заключается в том, что пределы интегрирования ограничений не совпадают с пределами интегрирования функционала. Предлагается следующий подход, который может использоваться при решении поставленной задачи: неизвестную функцию, например, $p_1(y)$ представить как сумму двух функций $p_1(y) = p_1'(y) + p_2'(y)$ причем дисперсия функции $p_2'(y)$ стремится к нулю, интервал существования функции $p_1'(y)$ $\left[-a+\frac{¢}{2}, b-\frac{¢}{2}\right]$, а функции $p_2'(y)$ $\left[-\frac{¢}{2},\ \frac{¢}{2}\right]$. В этом случае функцию $p_1(y)$ можно интегрировать в пределах $[-2a,\ 2b]$, соответствующих пределам функционала (1), причем функция Лагранжа в точках $x=-a$ и $x=b$ не даст скачка, что позволяет использовать уравнение Эйлера. Чем меньше $¢$, тем точнее результат. Окончательное решение может быть получено предельным переходом при $¢ \to 0$.

1. Копп В.Я. Анализ дифференциальной энтропии при многократных технических измерениях в машино-приборостроении / В.Я. Копп, А.А. Скидан, А.И. Балакин, О.В. Филипович // Весн. СевГТУ: Сб. науч. тр. – Севастополь. – 2008 Вып. 93. – С. 164 – 171.

2. Копп В.Я. Оценка требуемого числа измерений для приборных систем / В.Я. Копп, А.И. Балакин, Е.А. Волошина // Технологічні комплекси. Міжнародний науковий журнал. №1(7). − Луцьк: Видавництво Луцького національного технічного університету. − 2013. – С. 179–184.