

УДК 621.798(088.8)

Шоловій Ю.П., к.т.н., доц., Тимошенко Н.М., к.ф.-м.н., Магерус Н.І.

Національний університет «Львівська політехніка»

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ДРІБНОДИСПЕРСНОГО СИПКОГО МАТЕРІАЛУ ПІД ДІЄЮ ВІБРАЦІЇ У КОНІЧНІЙ ЛУНЦІ ДОЗАТОРА ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ ЛОРЕНЦА

В статті представляється методика зведення рівнянь Нав'є-Стокса, що описують рух дрібнодисперсного сипкого матеріалу під дією вібрації у конічній лунці дозатора, до моделі Лоренца, на основі якої наводяться графічні залежності, що дозволяють спрогнозувати на етапі проектування дозуючого обладнання поведінку матеріалу і тим самим впливати на неї за допомогою зміни інтенсивності вібрації, а також параметрів дозуючої лунки.

Дрібнодисперсний сипкий матеріал, об'ємний дозатор, конічна лунка, рівняння Нав'є-Стокса, віброзрідження, віброкипіння, модель Лоренца, інтенсивність вібрації.

Вступ. Дрібнодисперсний сипкий матеріал (СМ) належить до класу продуктів, що потребують особливої уваги у процесі дозування. Практично всі СМ у промисловості піддаються механічній переробці – руйнуванню (подрібненню, різанню), змішуванню, транспортуванню, завантаженню. Відомо [1], що введення додаткових вібраційних впливів в технологічні процеси в хімічній, харчовій та споріднених галузях призводять до інтенсифікації основного технологічного процесу, здешевлення технології за рахунок зменшення метало- та енергоємності. Під дією вібрації в СМ відбуваються перетворення, особливості яких обумовлюються її інтенсивністю [1]. При збільшенні інтенсивності вібрації сипке тіло набуває рухливості. Такий стан продукту прийнято називати віброзрідженням. Він характеризується послабленням зчеплення між частками, зменшенням кількості пор (формуванням більш щільної укладки частинок СМ). Найбільше ущільнення досягається при амплітудних прискореннях коливань, близьких до прискорень вільного падіння. При подальшому збільшенні амплітуди і частоти коливань частинки СМ починають втрачати контакт із віброуючим робочим органом, зменшуються й періодично порушуються зв'язки між ними. Сипкий продукт переходить у стан віброкипіння, що характеризується розпушенням сипкого тіла й посиленою циркуляцією його частинок. У загальному випадку віброкиплячий шар можна представити як двофазну систему (газ – тверді частинки), математичне описання якої базується на системі диференціальних рівнянь нерозривності, руху та енергії для кожної фази.

Постановка проблеми. Основним напрямком розвитку дозувального обладнання є забезпечення точності та надійності процесу дозування шляхом стабілізації властивостей сипких матеріалів. Особливо актуально досліджувати поведінку дрібнодисперсного матеріалу при розробці об'ємних дозаторів, точність дозування яких залежить від стабільної насипної щільності та рівномірності витікання продукту. Використання вібрації у дозуючому обладнанні може як покращити показники текучості матеріалу, так і погіршити їх. Вібраційні дозатори у порівнянні із іншими мають ряд переваг, це, насамперед, відсутність обертових частин, що контактують із СМ, відсутність додаткових механічних передач між двигуном і робочим органом, простота конструкції і висока надійність обладнання. Тому при проектуванні дозаторів важливо використовувати математичні моделі, що дозволяють спрогнозувати поведінку СМ під дією механічних коливань, з метою запобігання негативних наслідків впливу вібрації на рух матеріалу. Особливо складні умови витікання продукту спостерігаються у конічній лунці дозатора. Розробка ефективної математичної моделі поведінки продукту у стані віброзрідження та віброкипіння дасть можливість на етапі розробки дозуючого обладнання спрогнозувати рух матеріалу під дією вібрації, а також вплив на нього геометрії лунки. Тому підбір оптимальних режимів та конструктивних параметрів вібраційних об'ємних дозаторів для дрібнодисперсних матеріалів є на сьогоднішній день актуальним завданням, вирішення якого забезпечить рівномірність витікання продукту та високу продуктивність процесу дозування.

Аналіз останніх досягнень. Створенням моделі руху СМ під дією вібрації присвячено безліч досліджень як зарубіжних, так і вітчизняних науковців. У роботі [2] досліджено вплив

режимів роботи вібраційного вагового дозатора на розмір випускного отвору. Такий показник процесу дозування, як рівномірність витікання, не досліджується, однак саме він є одним із найважливіших при проектуванні об'ємних дозаторів. Тому використання методики [2] не є ефективним при розробці вібраційних об'ємних дозаторів. Дослідження російських вчених [3] і [4] ґрунтуються на моделюванні руху СМ у циліндричній ємкості за допомогою системи Лоренца. Модель [3] з високою точністю дозволяє спрогнозувати поведінку продукту під дією вібрації. Обмеженість цих розробок полягає у застосуванні їх лише для дослідження руху гранульованого матеріалу у циліндричній лунці дозатора. У роботі [5] досліджено фактори, що впливають на рівномірність витікання сипучих кормів із бункера, встановлено залежності для визначення швидкості рівномірного витікання продукту із багатокomпонентного дозатора. Однак математична модель [5] не дозволяє прогнозувати вплив параметрів вібрації і розмірів бункера на поведінку СМ. Дослідження [6] ґрунтуються на розробці моделі поведінки продукту у стані віброкипіння. Застосування цих розробок ефективно використовувати для розгляду плоского шару СМ, який характерний для технологічних процесів у апаратах з протяжними віброуючими поверхнями. Проте використання моделі [6] неможливе при дослідженні руху продукту у конічній лунці дозатора, де товщина віброкиплячого шару значно більша ніж на транспортуючих лотках.

Формулювання мети статті. Метою досліджень є розробка математичної моделі поведінки дрібнодисперсного матеріалу під дією вібрації у конічній лунці дозатора, що враховуватиме як вплив режимів вібрації, так і конструктивних параметрів лунки на процес дозування.

Основний зміст і результати роботи. Дослідження поведінки дрібнодисперсного матеріалу у конічній лунці дозатора в стані віброкипіння ефективно проводити з використанням моделі суцільного середовища, що найбільш адекватно відображає суть процесу вібраційного дозування продукту. Під впливом вібрації дрібнодисперсний матеріал перебуває у трьох можливих станах: попереднього ущільнення, циркуляційних і хаотичних рухів. Модель Лоренца дозволяє описати поведінку продукту у стані віброзрідження чи віброкипіння із достатньою точністю [3]. Оскільки дрібнодисперсний СМ під впливом механічних коливань поводить себе аналогічно рідині, то найефективнішим способом одержання моделі Лоренца є її виведення із рівнянь Нав'є-Стокса (1) згідно з розрахунковою схемою (рис. 1):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}, \\ & \frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + g \left(\frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\rho_n}{\rho_c} - 1 \right) + \frac{6g\rho k f (h_k - y)}{d_c \rho_c} \times \\ & \times \text{sign}(V_y - a\omega \cos(\omega t) e^{-\varepsilon y}) + \frac{3C_n \rho_n}{4d_c \rho_c} \cdot \left| U_0 e^{-\delta y} \cdot \sin(\omega t) - V_y \right| \cdot \text{sign}(U_0 e^{-\delta y} \cdot \sin(\omega t) - V_y) + \\ & + \frac{6\sigma_n \cos(\Theta_k)}{\left(1 + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) d_c^2 \rho_c} \cdot \text{sign}(V_y - a\omega \cos(\omega t) e^{-\varepsilon y}), \end{aligned} \right. \quad (1)$$

де V_x і V_y – горизонтальна і вертикальна компоненти швидкості СМ, t – час, ρ – насипна щільність СМ, p – тиск СМ, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості СМ, g – пришвидшення земного тяжіння, ρ_n – густина повітря, ρ_c – густина частинки СМ, k – коефіцієнт рухливості матеріалу, f – коефіцієнт внутрішнього тертя матеріалу, y – текуча координата частинки СМ, h_k – висота шару СМ, що піддається впливу вібрації, ε – коефіцієнт затухання коливань в СМ, δ – коефіцієнт затухання швидкості повітряного потоку, a і ω – амплітуда і частота коливань, d_c – умовний діаметр частинки СМ, C_n – коефіцієнт опору повітря, U_0 – амплітудне значення швидкості руху повітря у бункері, σ_n – поверхневий натяг води, Θ_k – крайовий кут змочування поверхні, β – кут, що вказує на кількість води у СМ.

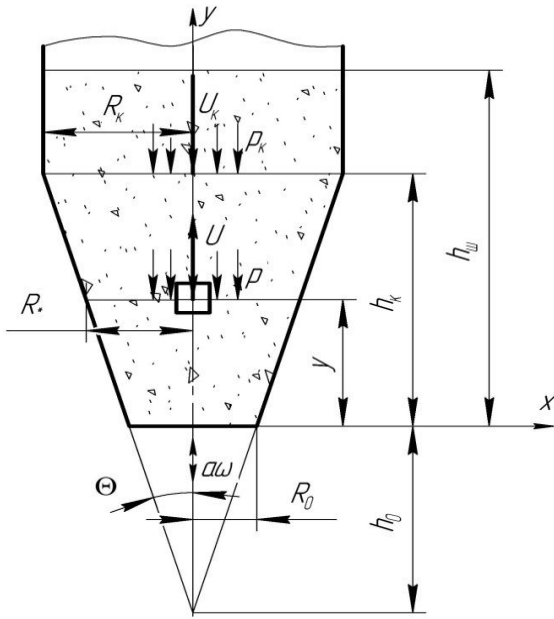


Рис. 1. Розрахункова схема поведінки СМ під дією вібрації

До системи рівнянь (1) необхідно додати рівняння неперервності:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Використаємо методику [3] для зведення рівняння Нав'є-Стокса до моделі Лоренца. Для одержання розв'язку системи рівнянь (1) запишемо граничні умови:

$$y = 0, V_y = 0,$$

$$y = h, V_y = 0, p_k = 0, \quad (3)$$

$$x = \pm R, V_y = a_y \cdot \cos(\omega t), V_x = a_x \cdot \sin(\omega t).$$

Тиск СМ у конічній лунці дозатора значною мірою залежить від висоти шару матеріалу h_k , що розглядається, а також геометрії лунки:

$$p(x, y, t) = \frac{V_y^2 \cdot \rho}{2} + \tilde{p}(x, y, t), \quad (4)$$

$$\text{де } V_y = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_k - \rho \cdot g \cdot y) \cdot \left(\frac{R_*^2}{R_k^2}\right)}{\rho \cdot \left(1 + \frac{R_*^2}{R_k^2} + \frac{R_*^4}{R_k^4}\right)}}, \quad p_k = \rho \cdot g \cdot (h_{uu} - h_k), \quad h_{uu} - \text{повна висота шару СМ у}$$

бункері, $R_* = R_0 + y \cdot \tan(\Theta)$ – радіус конічної лунки у місці текучої координати частинки y , R_0 – радіус випускного отвору, Θ – кут нахилу лунки, R_k – радіус лунки на межі переходу від конічної до циліндричної частини, $\tilde{p}(x, y, t)$ – відхилення поля тиску від гідростатичного тиску.

Використовуючи вираз для визначення вертикальної компоненти швидкості руху продукту V_y , запишемо рівняння (4) у вигляді:

$$p = (p_k - \rho \cdot g \cdot y) \cdot C(y) + \tilde{p}(x, y, t), \quad (5)$$

$$\text{де } C(y) = \frac{1}{\frac{R_k^2}{R_*^2} + 1 + \frac{R_*^2}{R_k^2}}.$$

Задаємо швидкість повітряного потоку (U), яка генерується вібратором, у формі рівняння переносу:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nabla(\bar{U} \cdot \bar{V}) = \gamma \nabla^2 \bar{U}, \quad (6)$$

де ∇ – оператор набла, ∇^2 – векторний оператор Лапласа, γ – коефіцієнт провідності швидкості повітряного потоку.

Враховуючи те, що вібратор здійснює вертикальні коливання, досліджуємо лише зміну швидкості повітряного потоку по координаті y . Дрібнодисперсний матеріал належить до продуктів з низькою газопроникністю. З цього випливає, що приріст швидкості повітря ΔU по висоті шару h_k є незначним. Тому при визначенні швидкості повітряного потоку U у текучій координаті y , з метою спрощення розрахунку, нехтуємо геометрією лунки (кутом нахилу). Отже, швидкість повітряного потоку U запишемо у вигляді:

$$U = U_k + \Delta U - \frac{\Delta U}{h_k} y + \zeta(x, y, t), \quad (7)$$

де U_{κ} – швидкість повітряного потоку у місці переходу від конічної до циліндричної частини лунки дозатора, ΔU – приріст швидкості повітряного потоку по висоті шару h_{κ} СМ, $\zeta(x, y, t)$ – відхилення швидкості від лінійного профілю.

Припускаємо, що насипна щільність продукту залежить від швидкості повітряного потоку:

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 - \eta(U - U_{\kappa})), \quad (8)$$

де ρ_0 – насипна щільність СМ при відсутності дії вібрації, η – коефіцієнт розширення матеріалу від швидкості повітряного потоку.

Записуємо вирази (1), (2), (5), (6), (7), (8) у вигляді системи рівнянь для подальшого її зведення до моделі Лоренца:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta V + g \left(\frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\rho_n}{\rho_c} - 1 \right) + \frac{6g\rho k f}{d_c \cdot \rho_c} \cdot (h - y) + \frac{3C_n \rho_n}{4 \cdot d_c \cdot \rho_c} \cdot (\bar{U} - \bar{V})^2 + \\ &+ \frac{6\sigma_H \cos(\Theta_{\kappa})}{\left(1 + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \cdot d_c^2 \rho_c}, \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nabla(\bar{U} \cdot \bar{V}) &= \gamma \nabla^2 \bar{U}, \\ \nabla \bar{V} &= 0, \\ U &= U_{\kappa} + \Delta U - \frac{\Delta U}{h_{\kappa}} y + \zeta(x, y, t), \\ \rho &= \rho_0 \cdot (1 - \eta(U - U_{\kappa})), \\ p &= (p_{\kappa} - \rho g y) \cdot \left[\frac{1}{\frac{R_{\kappa}^2}{R_*^2} + 1 + \frac{R_*^2}{R_{\kappa}^2}} \right] + \tilde{p}(x, y, t). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Важливим компонентом першого рівняння системи (9) є доданок $\frac{1}{\rho} \nabla p$. За означенням

$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j}$. Для одержання виразу $\frac{1}{\rho} \nabla p$ використовуємо наближення Буссінеска,

інтерпретація якого для в сипкого продукту, що знаходиться під впливом вібрації є наступною: оскільки дрібнодисперсний СМ є поганостискуваним, то нехтується залежність насипної щільності від швидкості повітряного потоку (8) і, відповідно, $1 - \eta(U - U_{\kappa}) = 1$. Виняток становить гравітаційна складова рівнянь системи (9), оскільки сила ваги є значною порівняно із іншими силами, що діють на СМ у стані псевдозрідження, тому навіть незначна зміна насипної щільності сильно впливає на її значення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{\left[-g \cdot \rho \cdot C(y) + (p_{\kappa} - \rho \cdot g \cdot y) \cdot \frac{dC(y)}{dy} \right] \cdot \bar{j} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \cdot \bar{j}}{\rho_0 (1 - \eta(U - U_0))} = \\ &= \left[\begin{aligned} &-g(1 - \eta(U - U_{\kappa})) \cdot \left(C(y) + y \cdot \frac{dC(y)}{dy} \right) + \\ &+ \frac{p_{\kappa}}{\rho_0} \cdot \frac{dC(y)}{dy} \end{aligned} \right] \cdot \bar{j} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } \frac{dC(y)}{dy} = \frac{2 \tan(\Theta) \cdot \frac{R_{\kappa}^2}{R_*^3} + \frac{R_*}{R_{\kappa}^2}}{\left(\frac{R_{\kappa}^2}{R_*^2} + 1 + \frac{R_*^2}{R_{\kappa}^2} \right)^2}.$$

Використавши вираз (10) записуємо систему рівнянь (9) у проєкціях на координати x і y :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial V_x}{\partial x} \cdot V_x - \frac{\partial V_x}{\partial y} \cdot V_y, \\ & \frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial V_y}{\partial x} \cdot V_x - \frac{\partial V_y}{\partial y} \cdot V_y + g \left(\frac{\rho}{\rho_u} + \frac{\rho_n}{\rho_u} - 1 + C(y) + \right. \\ & \left. + \frac{dC(y)}{dy} y \right) + \frac{6g\rho k f}{d_u \rho_u} \cdot (h_k - y) + \frac{3C_n \rho_n}{4d_u \rho_u} \cdot (U - V_y)^2 + \frac{6\sigma_n \cos(\Theta_k)}{\left(1 + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \cdot d_u^2 \cdot \rho_u} - \eta g \zeta \cdot \left(C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right) - \\ & \frac{p_k}{\rho_0} \cdot \frac{dC(y)}{dy}, \\ & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - V_x \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\Delta U}{h_k} \cdot V_y. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Використовуючи рівняння (7) та враховуючи те, що приріс швидкості повітряного потоку ΔU є незначним порівняно із іншими компонентами другого рівняння системи (11), вводимо заміну $U - U_k = \zeta$.

Диференціюємо перше рівняння системи (11) по x , а друге по y :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_x}{\partial t \partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x \partial y} + v \left(\frac{\partial^3 V_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 V_x}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \cdot V_x - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \cdot V_y, \\ & \frac{\partial^2 V_y}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y \partial x} + v \left(\frac{\partial^3 V_y}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V_y}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \cdot V_x - \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} \cdot V_y - \eta g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \right. \\ & \left. + \frac{dC(y)}{dy} y \right), \\ & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - V_x \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\Delta U}{h_k} \cdot V_y. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Віднімаємо від першого рівняння системи (12) друге :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_x}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial t \partial x} = v \left(\frac{\partial^3 V_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 V_x}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 V_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 V_y}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \cdot V_x - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \cdot V_y + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \cdot V_x + \\ & \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} \cdot V_y + \eta \cdot g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right), \\ & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - V_x \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\Delta U}{h_k} \cdot V_y. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Для подальшого зведення моделі (13) до системи Лоренца робимо припущення, що СМ під дією вібрації, що поширюється від віброднища, здійснюватиме циркуляційні рухи у вигляді псевдокомірок Бенара з урахуванням геометричних параметрів лунки (рис.2). Відхилення швидкості повітряного потоку записуємо у вигляді подвійного ряду Фур'є:

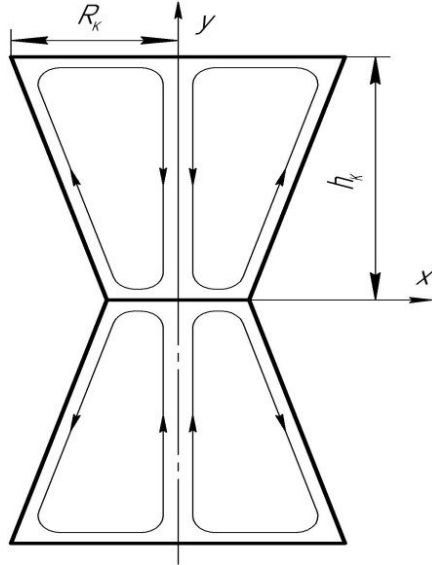


Рис. 2. Псевдокомірки Бенара

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn}(t) \cdot \cos(m \cdot \alpha \cdot x) \cdot \sin(n \cdot \beta \cdot y), \quad (14)$$

де $\alpha = \frac{\pi}{R_k}$ і $\beta = \frac{\pi}{h_k}$ – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є.

Із умови неперервності (2) випливає, що компоненти швидкості руху СМ V_x і V_y повинні виражатись через похідні від однієї функції $\psi(x, y, t)$ – функції току Стокса:

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Враховуючи особливості циркуляційних контурів (рис. 2) функція току Стокса матиме вигляд:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}(t) \cdot \sin(m \cdot \alpha \cdot x) \cdot \sin(n \cdot \beta \cdot y), \quad (15)$$

Вирази для визначення компонент швидкості СМ V_x і V_y з урахуванням рівняння (15) можна представити як:

$$V_x(x, y, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \beta \cdot K_{mn}(t) \cdot \sin(m \cdot \alpha \cdot x) \cdot \cos(n \cdot \beta \cdot y), \quad (16)$$

$$V_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m \cdot \alpha \cdot K_{mn}(t) \cdot \cos(m \cdot \alpha \cdot x) \cdot \sin(n \cdot \beta \cdot y).$$

Підставляємо вирази (14) і (16) у систему (13) і отримуємо нескінченну систему рівнянь для коефіцієнтів $V_{mn}(t)$ і $K_{mn}(t)$. Оскільки подальші дослідження нескінченної системи рівнянь неможливі, то без порушення точності розрахунків відкидаємо члени, що несуттєві при одержанні моделі Лоренца, із рівнянь (13). Систему Лоренца можна отримати, якщо вважати суттєвими члени $K_{11}(t)$, $V_{11}(t)$, $V_{02}(t)$ і зробити наступні заміни [3]:

$$K_{11} = X(t), \quad V_{11} = Y(t), \quad V_{02} = Z(t). \quad (17)$$

Припускаємо:

$$V_x = -X(t) \cdot \beta \cdot \sin(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\beta \cdot y),$$

$$V_y = X(t) \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot y), \quad (18)$$

$$\zeta = Y(t) \cdot \cos(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot y) - Z(t) \cdot \sin(2 \cdot \beta \cdot y).$$

Для подальшого зведення рівнянь Нав'є-Стокса до моделі Лоренца підставляємо вирази (18) у систему (13). Після виконання відповідних дій одержуємо:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\nu \cdot X(t) \cdot (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{\eta \cdot g \cdot Y(t) \cdot \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right),$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -\gamma \cdot Y(t) \cdot (\alpha^2 + \beta^2) + X(t) \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta U}{h_k} + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot X(t) \cdot Z(t), \quad (19)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -4 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot Z(t) + \frac{X(t) \cdot Y(t) \cdot \alpha \cdot \beta}{2}.$$

Зробимо заміни для приведення звичайних диференціальних рівнянь системи (19) до безрозмірного вигляду, що є необхідною умовою моделі Лоренца:

$$X(t) = A \cdot x_1, \quad Y(t) = B \cdot y_1, \quad Z(t) = C \cdot z_1, \quad t = D \cdot \tau. \quad (20)$$

де A, B, C, D – деякі постійні коефіцієнти, x_1, y_1, z_1 – координати фазового простору моделі Лоренца, τ – безрозмірний час.

Після використання заміни (20) рівняння (19) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{D \cdot B}{A} \cdot \frac{\eta \cdot g \cdot \alpha \cdot y_1}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right) - v \cdot D \cdot x_1 \cdot (\alpha^2 + \beta^2), \\ \dot{y}_1 = -D \cdot \gamma \cdot y_1 \cdot (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{A \cdot D}{B} \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta U}{h_k} + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{A \cdot C \cdot D}{B} \cdot x_1 \cdot z_1, \\ \dot{z}_1 = \frac{A \cdot B \cdot D}{C} \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \cdot x_1 \cdot y_1 - 4 \cdot \gamma \cdot D \cdot z_1 \cdot \beta^2. \end{cases} \quad (21)$$

Систему Лоренца можна одержати, якщо коефіцієнти A, B, C, D будуть наступні:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\gamma \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha \cdot \beta}, & B &= \frac{v \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \eta \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right)}, \\ C &= \frac{v \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 + \beta^2)^3}{2 \cdot \alpha^2 \cdot \beta \cdot \eta \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right)}, & D &= \frac{1}{\gamma \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Отже, використавши методику, викладену вище, рівняння Нав'є-Стокса (1) можна звести до моделі Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma (y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = r \cdot x_1 - y_1 + x_1 \cdot z_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 \cdot y_1 - b \cdot z_1. \end{cases} \quad (23)$$

де безрозмірні параметри будуть мати вигляд:

$$\sigma = \frac{v}{\gamma}, \quad r = \frac{\alpha^2 \cdot \eta \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right) \cdot \frac{\Delta U}{h_k}}{v \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 + \beta^2)^3}, \quad b = \frac{4 \cdot \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (24)$$

Промодельюємо поведінку дрібнодисперсного матеріалу під дією вібрації у конічній лунці дозатора за допомогою моделі Лоренца (23). Для дослідження обираємо матеріал із наступними властивостями: $\rho_0 = 0.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_u = 1 \text{ кг/м}^3$, $v = 30 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Для уніфікація параметра σ коефіцієнт затухання швидкості повітряного потоку приймаємо рівним [4]:

$$\gamma = \frac{v^2}{a\omega h_k}. \quad (25)$$

Використавши досвід моделювання поведінки СМ під дією вібрації з допомогою системи Лоренца параметри моделі приводимо до вигляду [3]:

$$\sigma = \frac{a\omega h_k}{v}, \quad r = K \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_u} + C(y) + \frac{dC(y)}{dy} \cdot y \right) \cdot \frac{a\omega^2}{g}, \quad b = \frac{4}{\left(\frac{h_k}{R_k} \right)^2 + 1}, \quad (26)$$

$$\text{де } K = \frac{\Delta U \cdot \eta \cdot g^2}{v \cdot a^2 \cdot \omega^3 \cdot (h_k + R_k)}.$$

Як показує практика, зміна швидкості повітряного потоку ΔU по висоті шару СМ, коефіцієнт розширення матеріалу від швидкості повітряного потоку η , кінематична в'язкість

v є тісно пов'язані із параметрами вібрації a і ω та геометричними розмірами лунки h_k і R_k . Значення цього коефіцієнта при зміні геометрії лунки і режимів дозування є практично незмінним $K \approx 1$.

При моделюванні використовувалась конічна лунка з наступними розмірами: $h_k = 0,6$ м, $R_k = 0,2$ м. Вираз $C(y)$ вказує на положення частинки СМ, що розглядається. Оскільки найнебезпечнішою ділянкою руху продукту у конічній лунці є потенційне місце утворення склепіння, то найбільша увага приділена саме цій ділянці $y = y_{склеп}$. Припускаємо, що склепіння у конічній лунці дозатора, параметри якої вказані вище, формується на рівні $y_{склеп} = 0,05$ м.

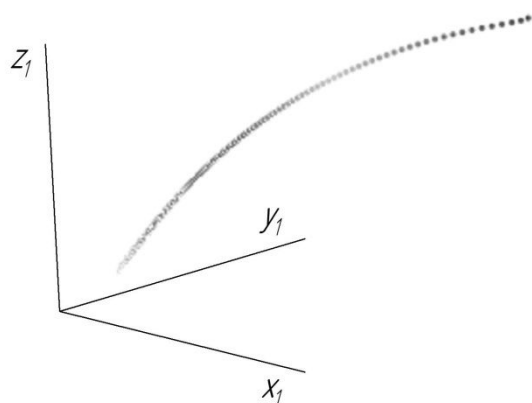


Рис. 3. Попереднє ущільнення матеріалу

Моделювання поведінки дрібнодисперсного матеріалу під дією вібрації на основі системи рівнянь (25) здійснювалось з допомогою програми Mathcad. Результатом моделювання є графіки (рис. 3, 4, 5), що вказують на три можливі стани продукту під дією вібрації, оскільки багатьма дослідженнями встановлено, що поведінка СМ значною мірою залежить від параметрів вібрації. Характерним показником вібрації, що визначає рух матеріалу, є інтенсивність вібрації $a\omega^2$. При $\frac{a\omega^2}{g} < 1$ спостерігається ущільнення матеріалу (віброзрідження) (рис. 3). На графіку цей стан відповідає довільній кривій у фазовому просторі координат x_1, y_1, z_1 .

При $\frac{a\omega^2}{g} \geq 1$ у конічній лунці дозатора спостерігаються впорядкований рух середовища у вигляді циркуляційних потоків (віброкипіння), що відображається кривою у вигляді спіралі (рис. 4). При значному збільшенні інтенсивності вібрації $\frac{a\omega^2}{g} \gg 1$ циркуляційні рухи переходять у хаос, що графічно представлено у вигляді дивного атратора (замкнутої петлі) (рис. 5).

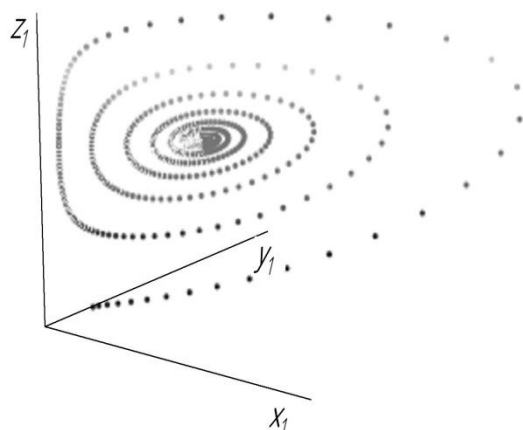


Рис. 4. Циркуляційні рухи матеріалу

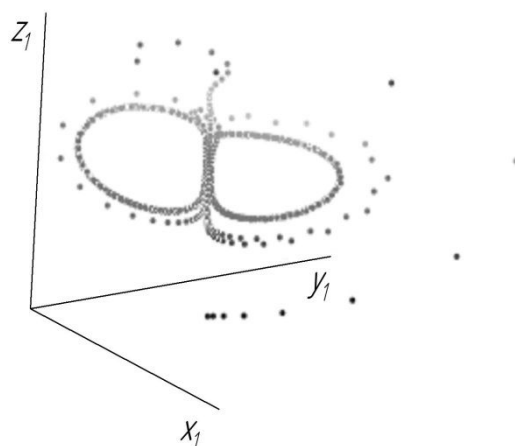


Рис. 5. Хаотичні рухи матеріалу

Висновки. Отже, у статті розроблено математичну модель поведінки дрібнодисперсного СМ під дією вібрації у конічній лунці дозатора на основі системи Лоренца. Запропонована модель дозволяє дослідити вплив конструктивних параметрів випускної лунки на поведінку продукту у дозуючому обладнанні. Також використання системи рівнянь (26) дає можливість передбачати рух продукту в залежності від обраного режиму вібрації. Основним показником, за яким прогнозується поведінка матеріалу, є інтенсивність вібрації. За допомогою системи Лоренца (26) графічно представлені 3 можливі стани СМ: ущільнення, циркуляційні рухи, хаотичні рухи продукту. Тому проектування вібраційного об'ємного дозатора для дрібнодисперсного продукту на основі розробленої математичної моделі дозволяє підібрати оптимальні режими вібрації та геометрію лунки, що зможуть забезпечити наперед задані параметри технологічного процесу. Використання результатів досліджень дає можливість регулювати і прогнозувати рух матеріалу у лунці і тим самим підвищувати продуктивність та точність процесу вібраційного об'ємного дозування.

1. Членов В.А. Виброкипящий слой / В.А. Членов, Н.В. Михайлов. – М.: Наука, 1972. – 343 с.

2. Kache, G. Verbesserung des Schwerkraftflusses kohäsiver Pulver durch Schwingungseintrag. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg : Dissertation B, 2009.

3. Пирожков Д.Н. Сведение гидродинамической модели виброоживленного сыпучего материала к системе Лоренца / Д. Н. Пирожков // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. Барнаул, 2008. – №8. – С. 59-65.

4. Федоренко И.Я. Вибрируемый зернистый слой в сельскохозяйственной технологии: монография / И. Я. Федоренко, Д. Н. Пирожков. – Барнаул: Изд-во АГАУ. – 2006. – 166с.

5. Сергеев Н.С. Истечение сыпучих кормов из бункера многокомпонентного вибрационного дозатора / Н.С. Сергеев, В.Н. Николаев // Достижения науки и техники АПК. Москва, 2010, 2010. – №10. – С. 65-67.