

УДК 539.3

Приходько О.С., к.т.н., ас., Пастернак Я.М., к.ф.-м.н., доц.

Луцький національний технічний університет

ПРОСТОРОВИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН МЕТАЛЕВИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИМ ГЛОБУЛЯРНИМ НАПОВНЕННЯМ

У роботі запропоновано аналітичну методику дослідження напружено-деформованого стану та міцності матеріалів, що містять пружно-пластичні еліпсоїдні включення, зокрема й композитних матеріалів із глобулярним наповненням. Методика базується на принципі поліноміальної консервативності та припущенні, що за заданого навантаження пластичне деформування відбувається лише у включенні. При цьому для урахування ефекту зміцнення матеріалу включення у запропонованій методиці застосовано метод змінних параметрів Біргера, що дало можливість істотно розширити межі застосування розробленого аналітичного підходу. Розглянуто низку задач для металевих композитів із глобулярним та веретеноподібним пружно-пластичним наповненням. Обчислено напружено-деформований стан, інтенсивність напружень у включенні, а також визначено міцність таких композитів на підставі теорії найбільших нормальних напружень.

Композит, пружно-пластичний, напруження, руйнування.

Вступ. Як відомо, причиною руйнування елементів конструкцій є поява мікротріщин в матеріалі. Осередками зародження цих мікротріщин досить часто є дефекти структури матеріалу, зокрема порожнини і чужорідні включення. Для композитних матеріалів з глобулярним наповненням такими осередками можуть бути області біля мікровключень матеріалу наповнювача. Для оцінки міцності деталей, виготовлених з таких композитів, необхідно враховувати напружений стан біля мікровключень з врахуванням їх пружно-пластичного деформування. При цьому форму включення з достатньою для інженерних оцінок точністю можна наблизити певним канонічним тілом, зокрема, еліпсоїдом.

Повний розв'язок задачі у замкнутому вигляді для еліпсоїдного пружного включення у необмеженому ортотропному середовищі отримано в працях Ю.М. Подільчука [7-8], зокрема у праці [7] досліджено поле напружень в околі включення, викликане однорідними довільно заданими зусиллями на нескінченності. Е.Г. Сосніна та І.А. Кунін в подальшому довели [4] так званий закон поліноміальної консервативності, який полягає в наступному: якщо напруження на нескінченності анізотропного середовища описуються поліномом певного степеня, то всередині еліпсоїдного включення напруження будуть описуватись поліномом того ж самого степеня.

Проте унаслідок громіздкості та обчислювальних складнощій вивченню тіл із пружно-пластичними включеннями приділено недостатньо уваги. Тому у цій роботі запропоновано інженерну методику оцінювання напружено-деформованого стану металевих композитів із пружно-пластичними глобулярними наповнюючими частками-включеннями.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропну пружну нескінченну матрицю з пружно-пластичним ізотропним глобулярним (еліпсоїдним) включенням. На межі матриця-включення задовольняються умови ідеального механічного контакту. Введемо декартову систему координат $Oxyz$ ($Ox_1x_2x_3$) з початком у центрі включення, так, щоб його a , b , c лежали на координатних осях Ox , Oy , Oz відповідно (рис. 1).

Вважатимемо, що матриця на нескінченності перебуває під дією однорідного поля напружень з тензором σ_{ij}^{∞} . Пружні сталі включення і матриці позначимо відповідно E_0' , ν_0' і E , ν . Приймемо також, що границя текучості включення є меншою за границю текучості матриці, тобто пружно-пластичне деформування буде відбуватись лише у включенні.

Для розв'язання задачі використаємо метод змінних параметрів Біргера, згідно якого пружно-пластична задача зводиться до пружної із залежними від напружень механічними характеристиками [1, 5].

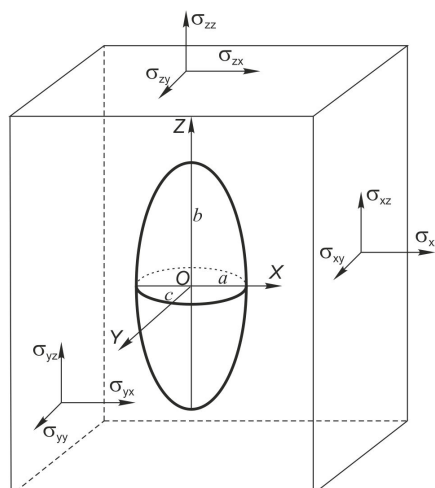


Рис. 1. Схема задачі

Розв’язування допоміжної задачі для пружного включення. Розглянемо задачу Ешелбі для еліпсоїдної зони (включення) із залишковими деформаціями [9]. За працями [2, 3] залишкові деформації у включенні ε_{ij}^t викликають деформації матриці та включення з того ж матеріалу ε_{ij}^c , які визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ie}^c = S_{iej k} \varepsilon_{jk}^t,$$

де $S_{iej k}$ – тензор Ешелбі [9], що залежить від пружних сталей середовища із зоною залишкових деформацій та геометрії цієї зони. У формулі прийняте правило Ейнштейна про підсумовування за повторюваним індексом.

Додамо до розв’язку задачі Ешелбі однорідне поле деформацій

$$\varepsilon_{ij}^\infty = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij}^\infty - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk}^\infty \right]. \quad (1)$$

Тоді деформації включення визначатимуться як

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty. \quad (2)$$

Оскільки деформації ε_{ij}^t є залишковими, тобто такими, що не викликають появу напружень, то напруження у включенні будуть рівні

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk}^\infty - \varepsilon_{kk}^t) + 2G (\varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty - \varepsilon_{ij}^t). \quad (3)$$

Тепер розглянемо сфероїд з іншими пружними сталими G_0 та ν_0 , але такої ж самої форми і розміру, як і включення Ешелбі, та zdeформуємо його однорідними пружними деформаціями (2). Якщо це викличе появу напружень (3), то можна замінити цим сфероїдом початкове включення, зберігши при цьому вектор напружень і неперервність переміщень вздовж межі включення.

У результаті отримаємо наступну систему рівнянь відносно компонент тензора ε^t для розв’язування задачі з пружним чужорідним включенням:

$$\lambda_0 \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk}^\infty) + 2G_0 (\varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty) = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk}^\infty - \varepsilon_{kk}^t) + 2G (\varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty - \varepsilon_{ij}^t) \quad (4)$$

де $\varepsilon_{ie}^c = S_{iej k} \varepsilon_{jk}^t$; λ , G , λ_0 , G_0 – коефіцієнти Ляме матриці і включення.

Після визначення необхідного тензора деформацій ε_{ij}^t , отримаємо наступну залежність для визначення напружень у чужорідному включенні:

$$\sigma_{ij}^i = \lambda_0 \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk}^\infty) + 2G_0 (\varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty) = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon_{kk}^c + \varepsilon_{kk}^\infty - \varepsilon_{kk}^t) + 2G (\varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty - \varepsilon_{ij}^t) \quad (5)$$

Поеднавши співвідношення (1), (4) та (5) отримаємо тензорне рівняння для визначення напружень у включенні, в якому коефіцієнти $\Sigma_{ijk m}$ залежать тільки від пружних характеристик матеріалів та геометричних розмірів включення:

$$\sigma_{ij}^i = \sum_{ijk} \sigma_{ij}^\infty \quad (6)$$

Розв’язування пружно-пластичної задачі. За методом змінних параметрів [1, 5] задача визначення пружно-пластичного стану включення зводиться до розв’язування задачі теорії пружності, для якої пружні характеристики включення E_0 , G_0 , ν_0 обчислюються за формулами:

$$E_0 = E'_0 \gamma, \nu_0 = \nu'_0 + \frac{1 - 2\nu'_0}{2} (1 - \gamma), G_0 = \frac{E'_0 \gamma}{3 - (1 - 2\nu'_0) \gamma}, \gamma = \gamma(\sigma_i) = \frac{\sigma_i}{E'_0 g(\sigma_i)}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}. \quad (7)$$

Враховавши (6) і (7), отримаємо нелінійну систему рівнянь типу $\Sigma_{ijk} = \Sigma_{ijk}(\sigma_{pq})$, де коефіцієнти Σ_{ijk} визначаються через пружні сталі матриці і включення, які в свою чергу залежать від невідомих напружень у включенні σ_{ij}^i . Отже, поставлена задача зводиться до розв’язування отриманої системи рівнянь стосовно цих невідомих напружень.

Результати розрахунків та їхнє обговорення. Розглянемо випадок одновісного розтягу. Матеріал матриці – високоміцна сталь, для якої модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 210 \dots 440$ МПа; матеріал включення – алюмінієвий сплав АЦМцМ, $E_0 = 0.7 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 50$ МПа. Коефіцієнти Пуассона для обох матеріалів однакові і рівні 0.3.

На рис. 2 зліва зображено графічно результати розрахунків інтенсивності напружень σ_i і напружень $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$ у сферичному включенні для різних значень коефіцієнта зміцнення залежно від величини зусиль N_z .

Видно, що напруження у пластичній зоні змінюються практично лінійно, причому вони зростають і у випадку ідеальної пластичності; для ідеально пластичного матеріалу ($k = 1000$) швидкість зростання осьових напружень σ_z зі збільшенням зусиль зменшується, а радіальних σ_r та розтягувальних σ_θ – збільшується, причому останні значно менші за величиною.

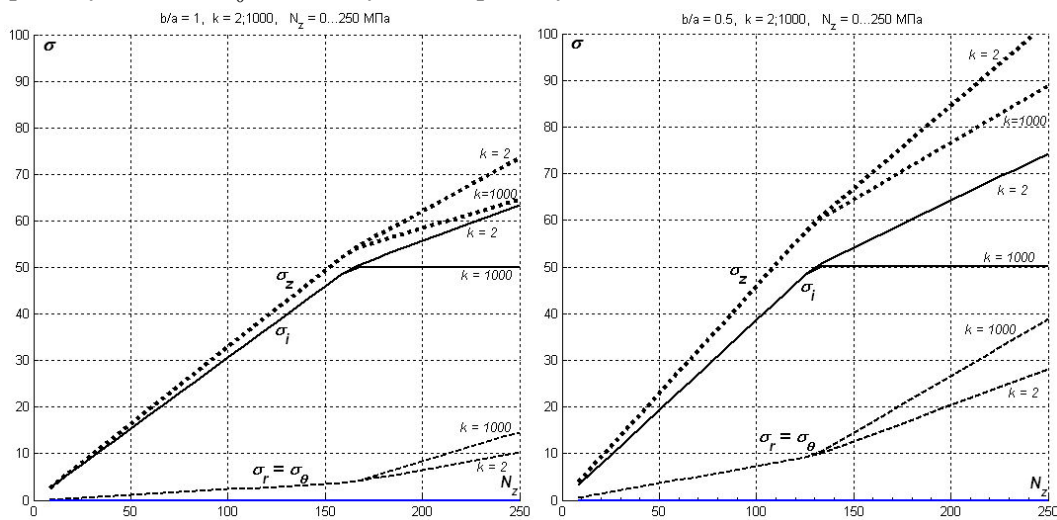


Рис. 2. Напруження у: а) сферичному; б) сплюсненому включенні

Аналогічні результати розрахунків для сплюсненого сфероїдального включення із півосями $(a, 0,5a)$ наведено на рис. 2. справа. Пластичне деформування у сплюсненому включенні починається при менших зусиллях, ніж у сферичному. Напруження у сплюсненому включенні істотно більші за величиною, ніж у сферичному.

На практиці широко розповсюджений випадок витягнутих в напрямі осі обертання включень (зокрема, такі включення зустрічаються в композитних матеріалах з армуючими стрижневими елементами). Тому розглянемо також і видовжені в напрямі осі Oz включення із півосями $(a, 2a)$ і $(a, 5a)$. Розраховані напруження для цих випадків зображено на рис. 3.

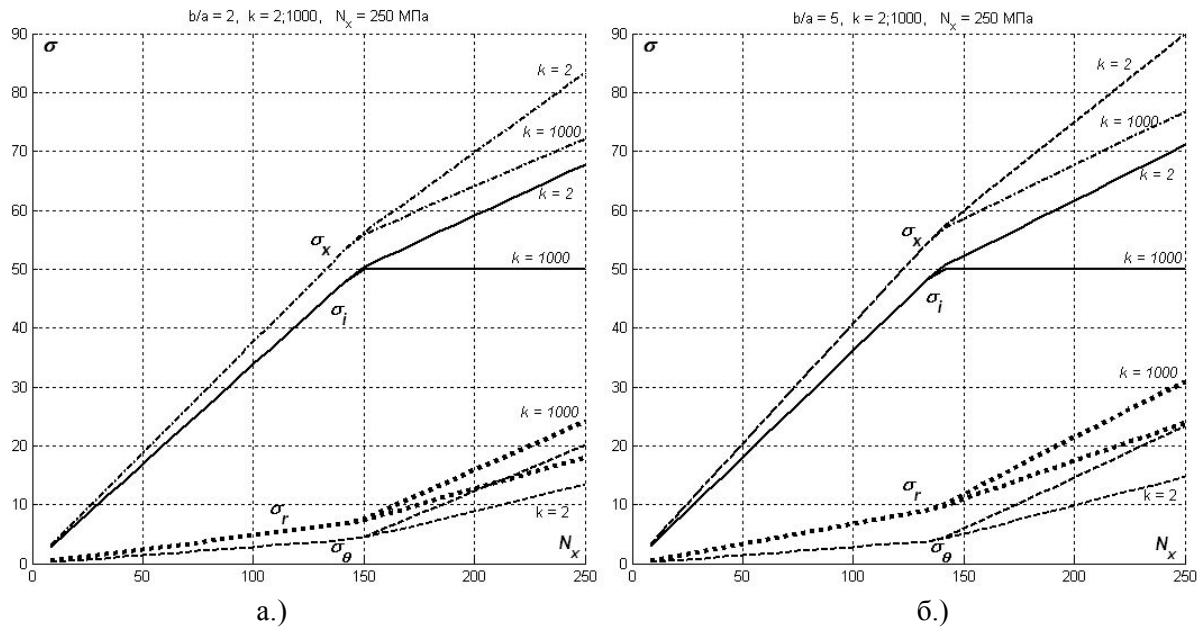


Рис. 3. Розтяг матриці із витягнутими включеннями з півосями $(a, 2a)$ (а) і $(a, 5a)$ (б)

При пластичному деформуванні напруження у матриці зростають як при зміцненні так і для пластичного матеріалу. При цьому вони зростають практично лінійно. Найбільшими виявилися напруження σ_x , тобто напруження в напрямі дії зусиль. Напруження, що виникають в інших напрямках значно менші за величиною. Порівнюючи графіки на рис. 1 і рис 2 можна зробити висновок, що для двох витягнутих включень напруження виявились близькими за величиною. Тобто, для витягнутих включень їхня форма значно менше впливає на розподіл напружень, на відміну від сплюснутих включень.

При просторовому напруженому стані пружно-пластичне деформування у включенні відбувається при значно більших зусиллях, ніж у випадку плоского напруженого стану. Зокрема, у сферичному включенні пластичні деформації починаються при зусиллях ~ 150 МПа, а для кругового включення – при ~ 70 МПа.

Для визначення впливу орієнтації сфероїдного включення відносно напрямку дії зовнішнього навантаження розглянемо випадок, коли матриця перебуває в умовах одновісного розтягу зусиллями N , які діють під деяким кутом α до площини xOy , за якого компоненти тензора напружень σ_{ij}^∞ у рівнянні (5) обчислюються за формулами:

$$\sigma_{xx}^\infty = N \sin^2 \alpha; \sigma_{yy}^\infty = 0; \sigma_{zz}^\infty = N \cos^2 \alpha; \sigma_{xz}^\infty = N \cos \alpha \sin \alpha; \sigma_{xy}^\infty = 0; \sigma_{yz}^\infty = 0 \quad (7)$$

Відношення півосей сфероїдного включення приймалось $b/a = 0,1$ (сплюснуте включення). На рис. 4 наведено результати розрахунків інтенсивності напружень та напружень у включенні залежно від напрямку дії зусиль для коефіцієнтів зміцнення $k=2$ (випадок істотного зміцнення матеріалу) та $k=1000$ (ідеальна пластичність). Навантаження на нескінченності приймалось $N=150$ МПа (що становить 300 % від границі текучості включення). На рис. 4а штриховій лінії відповідають значення осьових напружень σ_z , пунктирній лінії – головні напруження σ_1 , суцільній кривій – інтенсивності напружень σ_i у включенні. На рис. 4б пунктирній лінії відповідають дотичні напруження σ_{xz} у включенні, суцільній – напруження σ_r , і штриховій – напруження σ_θ .

З рисунку видно, що сплюснуте вздовж осі Oz включення знаходиться у пластичному стані в діапазоні кутів $0 < \alpha < 72^\circ$, а при кутах $72^\circ < \alpha < 90^\circ$ включення деформувалось пружно. Зміцнення істотно впливає на інтенсивність напружень і мало впливає на осьові напруження σ_z , причому напруження σ_z за величиною значно переважають інтенсивність напружень і досягають максимального значення ≈ 115 МПа при $\alpha = 0^\circ$; напруження σ_x і σ_y близькі за величиною при малих значення кута α .

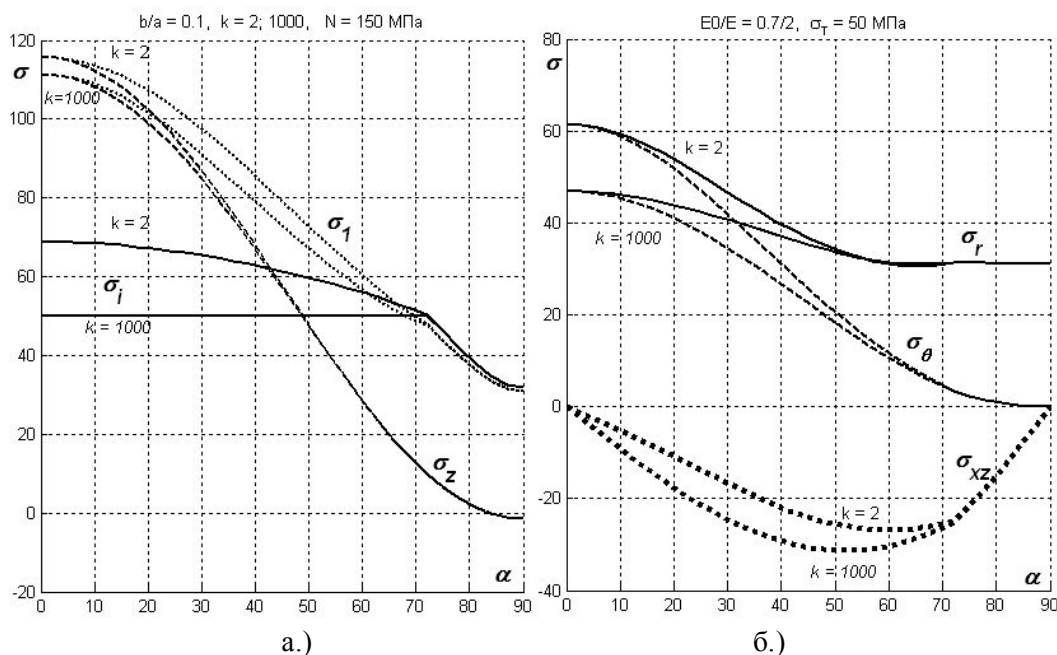


Рис. 4. Напруження у сплюсненому включенні

З рисунку видно, що сплюснуте вздовж осі Oz включення знаходиться у пластичному стані в діапазоні кутів $0 < \alpha < 72^\circ$, а при кутах $72^\circ < \alpha < 90^\circ$ включення деформувалось пружно. Зміцнення істотно впливає на інтенсивність напружень і мало впливає на осеві напруження σ_z , причому напруження σ_z за величиною значно переважають інтенсивність напружень і досягають максимального значення ≈ 115 МПа при $\alpha = 0^\circ$; напруження σ_x і σ_y близькі за величиною при малих значення кута α .

Для даного матеріалу включення межа міцності рівна $\sigma_M = 110$ МПа. Використовуючи за критерій міцності теорію найбільших нормальних напружень [6] на основі рис. 4 робимо висновок, що при навантаженні 150 МПа у включенні почнеться руйнування при куті його орієнтації від 0 до 10° .

Аналогічні розрахунки проведені для випадку веретеноподібного сфероїдного включення (відношення півосей сфероїда – $b/a = 10$). Результати розрахунків наведено на рис. 5.

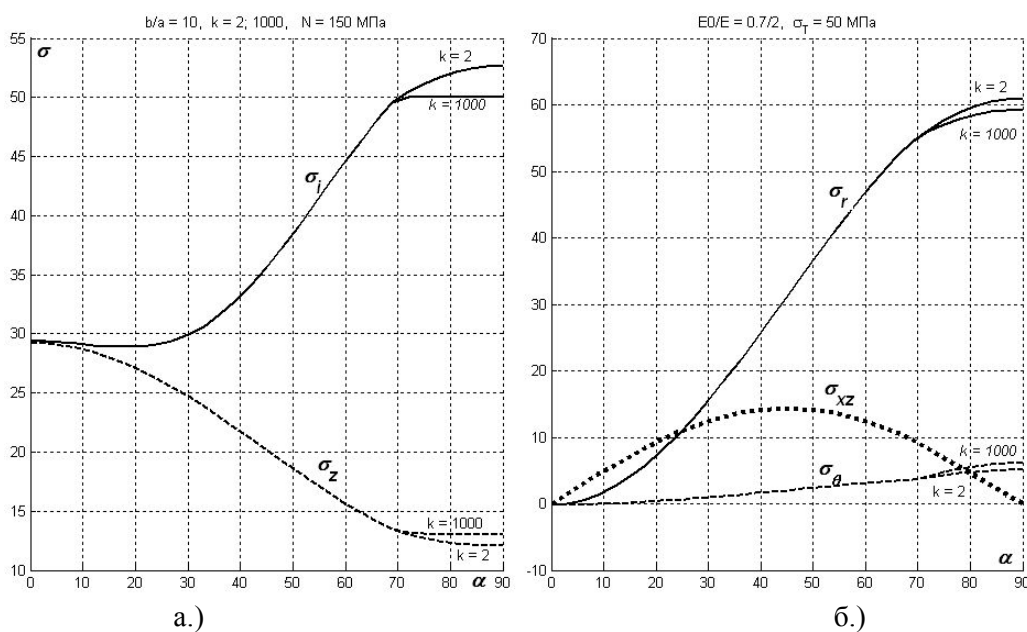


Рис. 5. Напруження у веретеноподібному включенні

З рисунку видно, що при $N = 3\sigma_T$ видовжене вздовж осі Oz включення переходить у пластичний стан при $\alpha = 70^\circ \dots 90^\circ$ (випадок поперечного розтягу); у пластичній зоні напруження σ_z та інтенсивність напружень σ_i залишаються сталими за випадку ідеальної пластичності; при поперечному розтязі інтенсивність напружень σ_i досягає максимального значення 52.5МПа при $k = 2$. Таким чином видно, що умови руйнування виявились близькими для матеріалів з істотним зміцненням і ідеально пластичних матеріалів.

Висновки. Запропонована методика дала можливість оцінити напружено-деформований стан металевих композитів із глобулярним та веретеноподібним наповненням. Зокрема, з'ясовано, що при просторовому напруженому стані пружно-пластичне деформування у включенні відбувається при значно більших зусиллях, ніж у випадку плоского напруженого стану. У сферичному включенні пластичні деформації починаються при зусиллях ~ 150 МПа, а для кругового включення – при ~ 70 МПа. Для веретеноподібних неоднорідностей при навантаженні 150 МПа у включенні почнеться руйнування при куті його орієнтації від 0 до 10° до осі навантажування.

1. Биргер И.А. Методы дополнительных деформаций в задачах теории пластичности //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963. – №1. – С.47-56.

2. Корнейчук. А.А. Квадратурная формула для сингулярных интегралов / А.А. Корнейчук // В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. // М.: Наука, 1964. – С. 64-74.

3. Космодамианский А.С. Анизотропные многосвязные среды: Учебн. пособие / А.С. Космодамианский. // Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1970. – С. 233.

4. Кунин И.А. Эллипсоидальная неоднородность в упругой сплошной среде / И.А. Кунин, Э.Г. Соснина // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 199. – № 3. – С. 571-574.

5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. / Н.Н. Малинин // М.: Машиностроение. – 1968. – 400 с.

6. Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения / Г. Плювинаж // Перев. с фр. под ред. Е.М. Морозова. // М.: Мир, 1993. – С. 450.

7. Подільчук Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости. / Ю.Н. Подільчук // Киев:Наук, думка, 1979. – 375 с.

8. Подільчук Ю.М. Напружений стан біля еліпсоїдального пружного включення. / Ю.М. Подільчук // Прикл. механіка, 1964, 10, № 5, – С. 527-532.

9. Eshelby J.D. The Determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems / J.D. Eshelby // Proceedings of Royal Society of London. – 1957. – A241. – P. 376-396.