ПРОЕКТУВАННЯ, АЛГОРИТМІЗАЦІЯ І ДІАГНОСТИКА СИСТЕМ АВТОМАТИЗОВАНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ КОМПЛЕКСАМИ

УДК 621.798
Дурняк Б.В., д.т.н., проф.*, **Млинко О.І.** **
**Українська академія друкарства*
*** Національний університет «Львівська політехніка»*

МАТЕМАТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПАПЕРОВИХ ПАКЕТІВ ДЛЯ ПАКУВАННЯ СИПКОЇ ПРОДУКЦІЇ

Досліджено, що для пакування сипкої продовольчої продукції використовують виготовлені з екологічно чистих пакувальних матеріалів паперові пакети з прямокутним дном з корпусом за формою паралелепіпеда та верхнім рукавом. Наголошено на необхідності обґрунтовування раціональних геометричних параметрів такого паковання для мінімізації витрат матеріальних ресурсів в умовах нарощування обсягів виробництва паперово-картонної тари. Запропонована методика їх пошуку, що ґрунтується на розв'язанні задачі зі знаходження мінімуму функції площі пакувального матеріалу за умови зв'язку між геометричними параметрами паперових пакетів. Для знаходження умовного екстремуму розглянуто функцію Лагранжа. Встановлені раціональні значення параметрів паперових пакетів у вигляді коефіцієнтів до заданих об'ємів сипкої продукції, що підлягає пакуванню.

Сипка продукція, паперовий пакет, геометричні параметри, функція Лагранжа, умовний екстремум, стаціонарна точка, частинні похідні.

На світових ринках та ринку України активно конкурує з іншими видами паковання з картону та паперу. Найпоширенішою тарою з паперово-картонного матеріалу є гофроящики, пачки та коробки, мішки та пакети, які використовуються для пакування різноманітної продукції. Їх ринок стабільно розвивається, про що свідчить виробництво у 2012 році 894 млн. м^2 гофрокартону для ящиків, 80,7 тис. тонн картонних пачок і коробок, 80,7 тис. тонн паковання з паперу. Важливим напрямком розвитку тари в нашій країні утвердилося паперове паковання: у 2012 році підприємства виготовили 500 млн. мішків і пакетів з цього пакувального матеріалу [1].

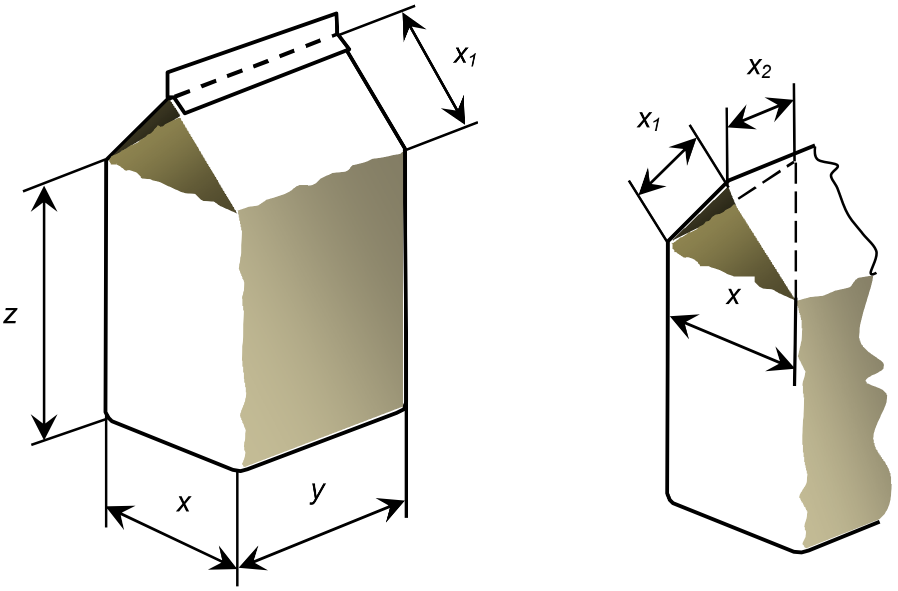
Впевнене нарощування обсягів виробництва паперово-картонних засобів пакування тісно пов'язане з необхідністю мінімізації у використанні матеріалів, енергоресурсів для виготовлення упаковки на одиницю упакованої продукції. Експерти пакування з різних країн світу визначили даний напрямок як найважливіший [2]. За умови обмеженої власної сировинної бази у нашій країні важливим резервом економії екологічно чистих пакувальних матеріалів є пошук раціональних геометричних параметрів тари. Серед інших рівних умов більш економне паковання з меншою витратою матеріалу [3]:

$$\frac{S_м}{V_п} \Rightarrow \min, \tag{1}$$

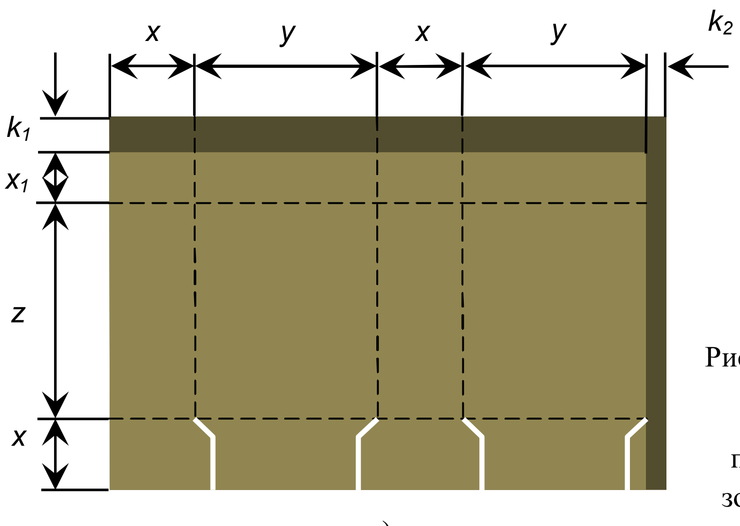
де $S_м$ – площа пакувального матеріалу, $V_п$ – корисний об'єм паковання.

У праці [4] обґрунтована послідовність оптимізації геометричних параметрів – ширини, довжини, висоти та інших розмірів складових елементів картонних пачок призматичної форми з різноманітною конструкцією елементів дна і покривки, яка включає етапи: вираження їх об'єму через габаритні розміри; математичне вираження загальної площі пакувального матеріалу, необхідне для виготовлення розгорток паковання; знаходження часткових похідних, прирівняних до нуля та розв'язування системи рівнянь. Проте, оптимізація геометричних розмірів паперових пакетів, які виготовляють великими обсягами для пакування сипкої продовольчої продукції з екологічно чистих пакувальних матеріалів, ґрунтовно не досліджена.

Найбільш розповсюджені паперові пакети (рис. 1, а) з прямокутним дном з корпусом за формою паралелепіпеда та верхнім рукавом, у поперечному напрямку який прошитий нитками чи заклеєний. Така конструкція пакета передбачає зовнішні незаповнені кишені (рис. 1, б) з параметрами $x_1 = x$, $x_2 = 0{,}5x$.



а) б)



в)

Рис. 1. Паперовий пакет для пакування сипкої продукції: зовнішній вигляд та геометричні параметри (а); форма та параметри зовнішньої незаповненої кишені (б); схема розгортки (в)

Задача дослідження зводиться до знаходження мінімуму функції площі пакувального матеріалу $S = S(x,y,z)$ за умови зв'язку між геометричними параметрами $\varphi(x,y,z) = 0$ (тут x, y, і z – відповідно, ширина, довжина і висота корпусу пакета).

У нашому випадку згідно з рис. 1,в:

$$S(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 2xz + 2yz, \tag{1}$$

$$\varphi(x,y,z) = xyz + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 y - \frac{\sqrt{3}}{12}x^3 - V, \tag{2}$$

де $x > 0$, $y > 0$ і $z > 0$.

Для знаходження умовного екстремуму розглянемо функцію Лагранжа [5]:

$$L(x, y, z, \lambda) = S(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z), \tag{3}$$

де λ – множник Лагранжа.

З урахуванням (1), (2) залежність (3) прийме вигляд:

$$L(x, y, z, \lambda) = 4x^2 + 4xy + 2xz + 2yz + \lambda\left(xyz + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 y - \frac{\sqrt{3}}{12}x^3 - V\right). \tag{4}$$

Дослідимо отриману функцію на безумовний екстремум. Запишемо необхідні умови існування екстремуму функції $L(x, y, z, \lambda)$ у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial S}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial S}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial S}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

У нашому випадку система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 8x + 4y + 2z + \lambda\left(yz + \dfrac{\sqrt{3}}{2}xy - \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) = 0, \\ 4x + 2z + \lambda\left(xz + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) = 0, \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ xyz + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 y - \dfrac{\sqrt{3}}{12}x^3 - V = 0. \end{cases} \tag{6}$$

З 3-го рівняння системи (6) запишемо:

$$\lambda = -2\frac{x + y}{xy}, \tag{7}$$

а з 2-го:

$$z = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)y - \frac{\sqrt{3}}{4}x. \tag{8}$$

Прирівнявши останній вираз до виразу для z з 4-го рівняння та виконавши деякі перетворення, отримаємо:

$$y^2 = \frac{V + \dfrac{\sqrt{3}}{12}x^3}{\left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)x}. \tag{9}$$

Підставивши вирази для λ, z і y в 1-ше рівняння системи (6), після деяких перетворень отримаємо рівняння:

$$x^9 + 7{,}631Vx^6 - 7{,}076V^2x^3 + 0{,}856V^3 = 0. \tag{10}$$

Зробивши заміну $u = x^3$, отримаємо кубічне рівняння:

$$u^3 + 7{,}631Vu^2 - 7{,}076V^2u + 0{,}856V^3 = 0 \tag{11}$$

Розв'язками є значення:

$$u_1 = -8{,}478V;\ u_2 = 0{,}703V;\ u_3 = 0{,}144V.$$

Тоді

$$x_1 = -\ 2{,}04V^{1/3};\ x_2 = 0{,}8891V^{1/3};\ x_3 = 0{,}5237V^{1/3}.$$

Взявши до уваги від'ємне значення x_1 та вирази (8), (9), отримаємо:

$$y_2 = 0{,}8891V^{1/3};\ y_3 = 1{,}1153V^{1/3};$$
$$z_2 = 1{,}0082V^{1/3};\ z_3 = 1{,}5208V^{1/3}.$$

Таким чином, маємо дві точки:

$$M_2(0{,}8891V^{1/3};\ 0{,}8891V^{1/3};\ 1{,}0082V^{1/3}),$$
$$M_3(0{,}5237V^{1/3};\ 1{,}1153V^{1/3};\ 1{,}5208V^{1/3}).$$

Враховуючи залежність (7), отримуємо $\lambda_2 = -\ 4{,}5\ /V^{1/3}$ і $\lambda_3 = -\ 5{,}612\ /V^{1/3}$.

Отже $\left.\dfrac{\partial L}{\partial x}\right|_{M_2} = 7{,}1132V^{1/3} \neq 0,$ тобто M_2 не є розв'язком системи (5), а отже не є стаціонарною точкою.

Оскільки $\left.\dfrac{\partial L}{\partial x}\right|_{M_3} = 0;\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial y}\right|_{M_3} = 0;\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial z}\right|_{M_3} = 0;\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{M_3} = 0,$ то M_3 є стаціонарною точкою.

Для того, щоб стаціонарна точка була точкою екстремуму достатньо, щоб у цій точці d^2L був знаковизначеним. Запишемо:

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz, \tag{12}$$

Враховуючи, що

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0, \tag{14}$$

$$dz = \frac{\varphi'_x dx + \varphi'_y dy}{-\varphi'_z}. \tag{15}$$

Підставивши останній вираз у (12) та виконавши деякі перетворення, отримаємо:

$$\begin{aligned} d^2L = \frac{1}{(\varphi'_z)^2}\Big\{&\left[L''_{xx}(\varphi'_z)^2 + L''_{zz}(\varphi'_x)^2 - 2L''_{xz}\varphi'_x\varphi'_z\right]dx^2 + \\ &+ 2\left[L''_{zz}\varphi'_x\varphi'_y + L''_{xy}\left(\varphi'_{xy}\right)^2 - L''_{xz}\varphi'_y\varphi'_z - L''_{yz}\varphi'_x\varphi'_z\right]dxdy + \\ &+ \left[L''_{yy}(\varphi'_z)^2 + L''_{zz}\left(\varphi'_y\right)^2 - 2L''_{yz}\varphi'_y\varphi'_z\right]dy^2\Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Обчислимо другі частинні похідні функції L:

$$L''_{xx} = 8 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda(y - x); \tag{17}$$

$$L''_{yy} = L''_{zz} = 0; \tag{18}$$

$$L''_{xy} = 4 + \lambda\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right); \tag{19}$$

$$L''_{xz} = 2 + \lambda y; \tag{20}$$

$$L''_{yz} = 2 + \lambda x. \tag{21}$$

Частинні похідні функції φ:

$$\varphi'_x = yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xy - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2; \quad (22)$$

$$\varphi'_y = xz + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2; \quad (23)$$

$$\varphi'_z = xy.$$

Після обчислень, отримуємо, що у точці M_3

$$d^2L = 35{,}504dx^2 + 5{,}886dxdy + 2{,}943dy^2. \quad (24)$$

Для перевірки знаковизначеності даної квадратичної форми скористаємося виразом:

$$\Delta_2 = AC - B^2, \quad (25)$$

де A = 35,504, $B = C$ = 2,943.

Оскільки Δ_2 = 95,825 > 0, та $\Delta_1 = A$ = 35, 504 > 0, то $d^2\ L$ – додатньовизначена квадратична форма (критерій Сильвестра) і точка M_3 з координатами $x = 0{,}5237V^{1/3}$; $y = 1{,}1153V^{1/3}$ і $z = 1{,}5208V^{1/3}$ є мінімумом функцій $L\ (x,y,z,\lambda)$ і $S(x,y,z)$.

Значення функції S в точці мінімуму $S_{\min} = 8{,}4186\ V^{2/3}$. Будь-яке інше значення пов’язане з надлишковими витратами пакувального матеріалу.

Висновки. Нарощування обсягів виробництва паперово-картонної тари тісно пов’язане з необхідністю мінімізації матеріальних та енергоресурсів на одиницю упакованої продукції. Саме такий напрямок експерти пакування з різних країн світу визначили як найважливіший, а для економії екологічно чистих пакувальних матеріалів важливо обґрунтовувати раціональні геометричні параметри тари. Для пакування сипкої продовольчої продукції з екологічно чистих пакувальних матеріалів використовують паперові пакети з прямокутним дном з корпусом у вигляді паралелепіпеда та верхнім рукавом, у поперечному напрямку який прошитий нитками чи заклеєний. Оптимізація геометричних розмірів таких паперових пакетів, які виготовляють великими накладами, ґрунтовно не досліджена. Вирішена задача зі знаходження мінімуму функції площі пакувального матеріалу за умови зв’язку між геометричними параметрами паперового пакета. Встановлено, що раціональними значеннями його довжини, ширини та висоти є, відповідно, $0{,}5237V^{1/3}$; $1{,}1153V^{1/3}$ і $1{,}5208V^{1/3}$.

1. Колчина И.А. Рынок картона в Украине (состояние и проблемы) // Упаковка. – 2013. – № 2. – С. 22– 26.

2. Кривошей В.М. Сьогодення та майбутнє упаковки в Україні (стан та шляхи вдосконалення) // Упаковка. − 2006. − № 1. − С. 22−26.

3. Шредер В.Л., Пилипенко С.Ф. Упаковка из картона. – К.: ИАЦ «Упаковка», 2004. – 560 с.

4. Регей І.І., Млинко О.І. Оцінка ефективності використання пакувальних матеріалів (на прикладі виробництва споживчого картонного паковання) // Упаковка. – 2012. – № 1. – С. 34–36.

5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1988. – 576 с.