

УДК 519.62

ПРИСКОРЕНИЙ РОЗРАХУНОК ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМІВ СЛАБО ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМ

В. Григоренко, І. Романів, Я. Шмигельський

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua*

Для слабо дисипативних динамічних систем з періодичною зовнішньою дією розглянуто метод прискореного розрахунку динамічних режимів. Цей метод дозволяє швидко відслідковувати перехідні процеси і значно прискорює пошук встановленого режиму. Наводяться результати чисельного експерименту з розрахунку перехідних процесів в електронній схемі випрямляча напруги.

Ключові слова: слабо дисипативні системи, динамічні режими, прискорений розрахунок.

Вступ. Для слабо дисипативних періодичних динамічних систем характерним є не тільки велика тривалість перехідного процесу, але й “повільність” його характеристик (наприклад, повільна зміна огинаючої перехідного процесу, або середнього значення змінних системи протягом періоду встановлених коливань тощо). Ця особливість слабо дисипативних систем лежить в основі групи методів чисельного інтегрування, що діють за наступним принципом: зміна стану системи за період вимушених коливань використовується для прогнозу траєкторії системи на декілька періодів вперед, а потім певним чином відбувається їх корекція.

Такі методи вперше почали застосовуватися в задачах небесної механіки для обчислення орбіт небесних тіл, де вони дістали назву “багатооборотних» [1]. Стосовно задач радіоелектроніки подібні методи були запропоновані в [2]. Нижче розглянуто один з таких методів.

Математичні основи методу. Нехай математична модель динамічної періодичної за часом системи має вигляд:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t+T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \forall t, T > 0$. Вектор-функцію $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ вважаємо неперервною за t та неперервно диференційованою за \mathbf{x} . Розв’язок системи (1) (траєкторію), що відповідає початковій умові $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, будемо позначати $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$.

Розглянемо послідовність точок траєкторії $\mathbf{x}(t)$ в моменти часу, кратні періоду T :

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{x}(sT), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

Введемо відображення точки \mathbf{y}_s вздовж траєкторії системи (1) за період T .

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}_s) = \boldsymbol{\varphi}(t_s + T, t_0, \mathbf{y}_s) \quad (3)$$

де $t_s = sT$. Тоді:

$$\mathbf{y}_{s+1} = \mathbf{p}(\mathbf{y}_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для довільної точки послідовності $\{\mathbf{y}_s\}$ можна записати:

$$\mathbf{y}_{s+1} = \mathbf{y}_s + \dot{\mathbf{y}}_s \cdot T + O(T^2), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

де $\dot{\mathbf{y}}_s$ означає похідну за часом в момент $t = sT$.

Для слабо дисипативних систем послідовність $\{\mathbf{y}_s\}$ є повільною функцією s , тобто її характерні часи є набагато більші від періоду T . Тоді з (4) і (5) маємо:

$$\dot{\mathbf{y}}_s \cong \frac{1}{T} (\mathbf{p}(\mathbf{y}_s) - \mathbf{y}_s) \quad (6)$$

Співвідношення (4) можна розглядати як диференціальне рівняння, яке зв'язує точки послідовності $\{\mathbf{y}_s\}$.

Введемо на часовій осі дві сітки:

$$\omega: \{t_{m+1} = t_m + h_m, h_m > 0, m = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Omega: \{t_{M+1} = t_M + M \cdot H, H > 0, M = 0, 1, 2, \dots\}$$

Сітку ω будемо використовувати для чисельного інтегрування системи (1), а сітку Ω - для чисельного інтегрування рівняння (4). Для спрощення викладу крок сітки Ω вибрано постійним.

Алгебраїзуємо похідну $\dot{\mathbf{x}}$ на сітці ω та похідну $\dot{\mathbf{y}}$ на сітці Ω за допомогою неявних формул диференціювання назад порядку r :

$$\dot{\mathbf{x}}_m = -\frac{1}{h_m} \sum_{i=0}^r \alpha_i \cdot \mathbf{x}_{m-i}, \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_M = -\frac{1}{H} \sum_{i=0}^r \beta_i \cdot \mathbf{y}_{M-i}, \quad (8)$$

де α_i та β_i - коефіцієнти методу.

Крок H покладемо кратним періоду T , тобто $H = N \cdot T$, де $N > 0$ - задане ціле число. Тоді з (6) і (8) отримаємо:

$$\frac{N - \beta_0}{N} \cdot \mathbf{y}_M - \mathbf{p}(\mathbf{y}_M) - \mathbf{d} = 0, \quad (9)$$

де $\mathbf{d} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^r \beta_i \cdot \mathbf{y}_{M-i}$ - вектор, що не залежить від \mathbf{y}_M

Розв'язавши (7) методом Ньютона, одержимо ітераційний процес:

$$\mathbf{y}_M^{k+1} = \mathbf{y}_M^k - \left[\frac{N - \beta_0}{N} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{p}'(\mathbf{y}_M^k) \right]^{-1} \cdot \left[\frac{N - \beta_0}{N} \cdot \mathbf{y}_M^k - \mathbf{p}(\mathbf{y}_M^k) - \mathbf{d} \right] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

де I - одинична матриця, а p' - похідна відображення p .

В ітераційному процесі відображення $p(y_M^k)$ знаходиться чисельним інтегруванням системи (1) на сітці ω з початковими умовами $t_0 = 0$, $x_0 = y_M^k$ протягом періоду T . Похідну $p'(y_M^k)$ можна обчислити разом із $p(y_M^k)$ відомими і добре розробленими методами [3].

Таким чином, інтегруючи (4) на великій сітці Ω і використовуючи при цьому значення, отримані при інтегруванні системи (1) на малій сітці ω протягом періоду, можна знаходити точки послідовності $\{y_s\}$, а отже відслідковувати перехідний процес в системі (1) значно швидше, ніж рухаючись по траєкторії $x(t)$.

Чисельне інтегрування на малій сітці ω будемо називати внутрішнім інтегруванням, а чисельне інтегрування на великій сітці Ω - зовнішнім інтегруванням. Відмітимо, що зовнішнє інтегрування можна також вести зі змінним кроком, автоматично вибираючи його, наприклад, за заданою межею локальної похибки апроксимації для формули (6). Тільки при цьому крок великої сітки завжди повинен залишатися кратним періоду T .

Чисельний експеримент. Розглянемо моделювання динамічних процесів у найпростішому випрямлячі, схема якого наведена на рис. 1.

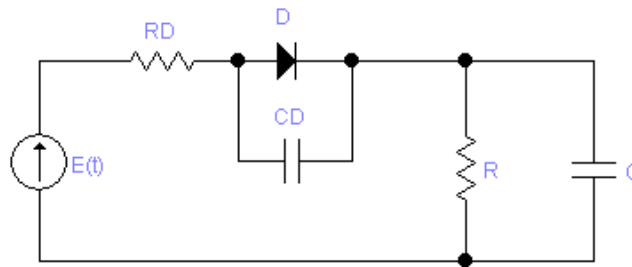


Рис.1. Схема випрямляча.

Математична модель випрямляча має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{R_D C_D} (-x_1 - x_2 + E(t)) - \frac{1}{C_D} I_D, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_D C} \left(-x_1 - \left(1 + \frac{R_D}{R} \right) x_2 + E(t) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

де $x_1 = U_{C_D}$, $x_2 = U_C$, $I_D = I_0 (\exp(\vartheta x_1) - 1)$, I_0 і ϑ - константи, що характеризують діод. Параметри схеми при моделюванні мали такі значення: $R_D = 1$ Ом, $C_D = 1$ мкФ, $I_0 = 10^{-6}$ А, $\vartheta = 0,025$, $R = 6,75$ Ом, $C = 9000$ мкФ. На вхід випрямляча подавалась гармонічна напруга $E(t) = E_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t)$ з амплітудою $E_0 = 140$ В і періодом $T = 50$ мкс.

Перехідні процеси в математичній моделі (11) розраховувалися на відрізьку часу рівному 200 періодам вхідного сигналу. Спочатку безпосереднім інтегруванням системи (11) знаходились точки послідовності $\{y_s\}$ для $s = 0, 1, 2, \dots, 200$. Для цього використовувались формули (7) другого порядку ($r = 2$) з автоматичним вибором кроку h_m . Після цього точки послідовності $\{y_s\}$ для $s = 0, N, 2N, \dots, 200$ знаходились за допомогою ітераційного процесу (10) при різних N . Внутрішнє інтегрування рівнянь (11) для знаходження відображення $p(y_k)$ виконували тим же методом, що і в попередньому випадку. Похідну відображення за період $p'(y_M^k)$ для ітераційного процесу (10) шукали одночасно із обчисленням $p(y_M^k)$ як розв'язок рівнянь у варіаціях для системи (11) уздовж траєкторії $x(t) = \Phi(t, 0, y_M^k)$:

$$\dot{\Phi}_k = J_k(t) \cdot \Phi_k, \quad \Phi_k(0) = I, \quad (12)$$

де $\Phi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $J_k(t) = \frac{\partial f}{\partial x}$ при $x(t) = \Phi(t, 0, y_M^k)$. Тут $x = [x_1, x_2]^T$ - вектор змінних стану, а $f(x) = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]^T$ - вектор правих частин системи (11).

Систему у варіаціях (12) інтегрували на відрізьку $[0, T]$ тим же методом, що й основну систему (11), і приймали $p'(y_M^k) = \Phi_k(T)$.

Зовнішнє інтегрування проводили за формулами (8) першого порядку ($r = 1$) з постійним кроком $H = N \cdot T$ при різних N .

Критерієм закінчення ітераційного процесу служила умова:

$$\|y_M^{k+1} - y_M^k\| \leq \varepsilon = 10^{-4} \quad (13)$$

де в якості норми вектора $x \in \mathbb{R}^n$ приймалась ∞ -норма:

$$\|x\| = \max_i |x_i| \quad (14)$$

На рис. 1 представлені результати чисельного експерименту:

- (\times) - точки послідовності $\{y_s\}$, знайдені безпосереднім інтегруванням системи (11);
- (\bullet) - точки послідовності $\{y_s\}$, розраховані за методом (10) з кроком $H = 20 \cdot T$;
- ($*$) - точки послідовності $\{y_s\}$, розраховані за методом (10) з кроком $H = 40 \cdot T$

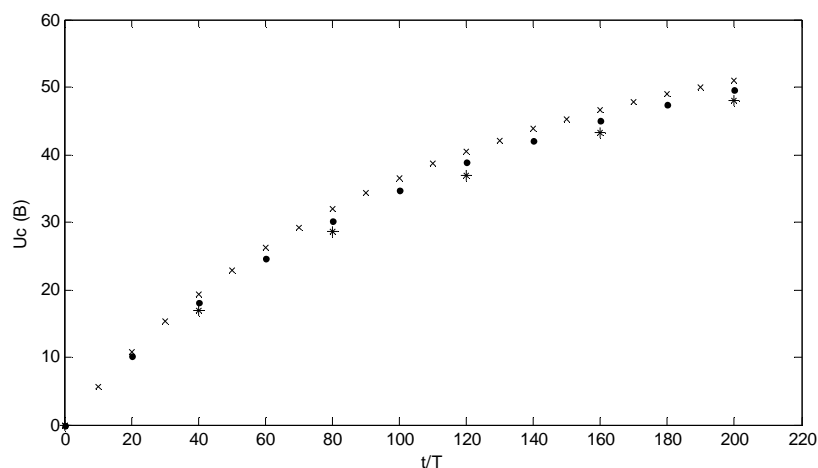


Рис. 2. Результати моделювання схеми випрямляча.

В кінцевій точці розрахунку $t = 200 \cdot T$ відносна глобальна похибка визначення U_C методом (10) становить 2,6% для кроку $H = 20 \cdot T$ і 5,4% - для кроку $H = 40 \cdot T$. Зрозуміло, що ці похибки можна зменшити, використовуючи для зовнішнього інтегрування метод (8) 2-го порядку та вище і зменшивши ε в критерії (13).

1. Бородовицьна Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: “Наука”, 1984. – 136 с.
2. Stroband P.H., Laur L., Engl W.L. TNTP – an efficient method to simulate nonlinear RF networks in time domain // IEEE Journal of solid state circuits. 1977. Vol. SC-12. №3. – P. 243-246.
3. Скельбоэ С. Временной стационарный анализ нелинейных электрических систем // ТИИЭР. 1982. Т. 70. №10.- С. 89-111.

ACCELERATED CALCULATION OF DYNAMIC MODES IN WEAKLY DISSIPATIVE SYSTEMS

V. Hryhorenko, I. Romaniv, Ya. Shmygelsky

Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

We consider a method for accelerated calculation of dynamic modes for the case of weakly dissipative systems with periodic external influence. The method enables rapid tracing of transient processes and essentially reduces the process of searching for the steady state. We report the results of numeric experiment concerned with calculations of transient processes occurring in the electronic scheme of a voltage rectifier.

Key words: weakly dissipative systems, dynamic modes, accelerated calculation.

**УСКОРЕННЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ
СЛАБО ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ**

В. Григоренко, И. Романив, Я. Шмигельский

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua*

Для слабо диссипативных систем с периодическим внешним воздействием рассмотрен метод ускоренного расчета динамических режимов. Этот метод позволяет быстро отслеживать переходные процессы и значительно ускоряет поиск установившегося режима. Приведены результаты численного эксперимента по расчету переходных процессов в электронной схеме выпрямителя напряжения.

Ключевые слова: слабо диссипативные системы, динамические режимы, ускоренный расчет.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2011
Прийнята до друку 21.06.2011