

АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ ТА СИСТЕМ

УДК 537.8

ВЗАЄМОДІЯ ПЛАНАРНОЇ *CL*-СХЕМИ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЮ ХВИЛЕЮ

Ю. Мочульський

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
mochulsky@ukr.net*

Досліджено взаємодію магнітної складової електромагнітної хвилі, яка поширюється в площині планарної *CL*-схеми, з індуктивностями схеми. Унаслідок цієї взаємодії змінюється відносна магнітна проникність матеріалу. Знайдено залежність дійсної та уявної частини відносної магнітної проникності середовища з планарною *CL*-схемою від параметрів схеми і частоти електромагнітної хвилі. З'ясовано, що в певній області частот дійсна частина магнітної проникності змінює знак на від'ємний. Цей факт підтверджує можливість існування матеріалів з від'ємним показником заломлення електромагнітної хвилі.

Ключові слова: метаматеріали, електромагнітна хвиля, планарна *CL*-схема, відносна магнітна проникність.

Про можливість існування матеріалів з від'ємним показником заломлення вчені заявили ще в середині XX ст. [1]. Однак лише на початку XXI ст. вдалося отримати експериментальні результати [2] Це так звані метаматеріали, у яких завдяки вкрапленню мініатюрних елементів можна отримати багато нових властивостей матеріалу [3]. Нижче наведено теоретичне обґрунтування принципів створення матеріалів з від'ємною магнітною проникністю.

Як відомо, якщо діелектрик помістити в магнітне поле, то спіни електронів, орбітальний рух електронів довкола атомних ядер і спіни атомних ядер, орієнтуючись відносно зовнішнього магнітного поля, створюють власне магнітне поле.

Позначимо комплексне діюче значення магнітної індукції (далі скорочено називатимемо магнітною індукцією) зовнішньої електромагнітної хвилі \dot{B}_0 , а магнітної індукції, викликаной молекулярними струмами, \dot{B}_m . Тоді сумарна магнітна індукція

$$\dot{B} = \dot{B}_0 + \dot{B}_m = \mu_1 \cdot \dot{B}_0, \quad (1)$$

де μ_1 – відносна діелектрична проникність діелектрика.

Аналогічно, якщо в діелектрику розмістити мікроскопічні *LC*-контури, то електромагнітна хвиля взаємодіятиме з ними так само, як взаємодіє з електронами і ядрами. Тобто змінне магнітне поле індукватиме в індуктивностях схеми електричний струм,

який створить своє додаткове магнітне поле. Це приведе до зміни відносної діелектричної проникності діелектрика.

Розглянемо діелектричний шар, у якому вертикально рівномірно на відстані Δx і Δy розміщені мініатюрні котушки індуктивності з індуктивністю L (рис. 1). Нижні кінці всіх котушок з'єднані між собою, а верхні з'єднані через мініатюрні конденсатори ємністю C . Якщо на довжині електромагнітної хвилі розмістити достатньо багато котушок індуктивності (сотню або більше), то залежність магнітної індукції від координати буде майже гармонічною.

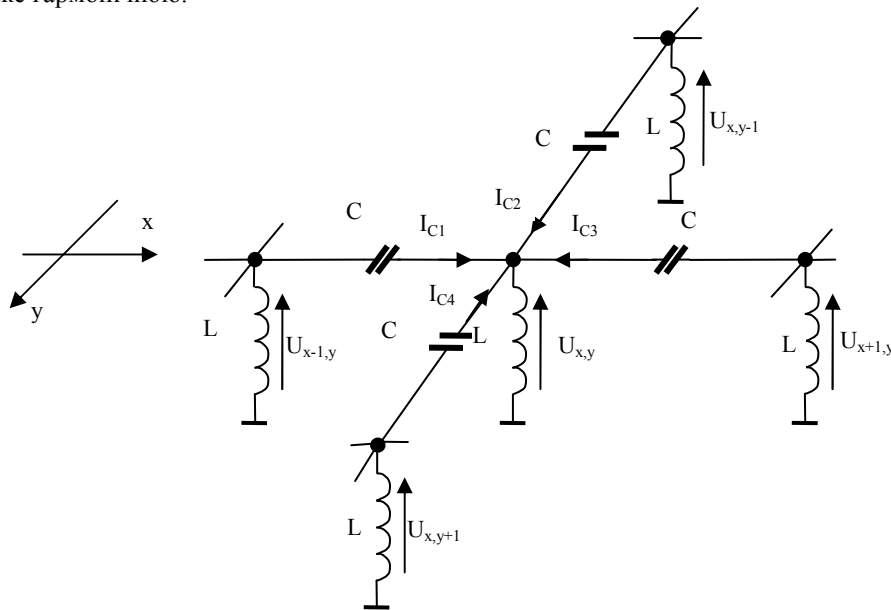


Рис. 1. Планарна CL -схема.

Індукований у котушці індуктивності струм створює потік магнітної індукції \dot{B}_L , який визначають формулою

$$\dot{\Phi} = \dot{B}_L \cdot S = L \cdot \dot{I} . \quad (2)$$

Отже, сумарна магнітна індукція з урахуванням CL -схеми

$$\dot{B} = \dot{B}_0 + \dot{B}_m + \dot{B}_L = \left(\mu_1 + \frac{\dot{B}_L}{\dot{B}_0} \right) \cdot \dot{B}_0 = \mu \cdot \dot{B}_0 , \quad (3)$$

де $\mu = \mu_1 + \frac{\dot{B}_L}{\dot{B}_0}$ – відносна діелектрична проникність діелектрика з урахуванням CL -схеми.

Як бачимо з цієї формули, для її визначення необхідно знайти співвідношення між \dot{B}_L та \dot{B}_0 . Магнітну індукцію, створену струмом через котушку індуктивності, визначають

формулою $\dot{B}_L = \frac{L}{S} \cdot \dot{I}$. Тобто для знаходження зв'язку між \dot{B}_L та \dot{B}_0 необхідно знайти

залежність струму через котушку індуктивності від магнітної індукції зовнішнього поля \dot{B}_0 .

Уведемо нормовану систему координат, у якій за одиницю довжини виберемо Δx і Δy . Тоді координати вузлів, у яких розміщені всі котушки індуктивності, будуть цілими числами.

Позначимо напруги на котушках індуктивності через $U_{x,y}$, де x і y – координати вузла, у якому розміщена котушка індуктивності, тоді зможемо записати для струмів через конденсатори такі рівняння:

$$\begin{aligned} I_{C1} &= j \cdot \omega \cdot C \cdot (\dot{U}_{x-1,y} - \dot{U}_{x,y}); & I_{C2} &= j \cdot \omega \cdot C \cdot (\dot{U}_{x,y-1} - \dot{U}_{x,y}); \\ I_{C3} &= j \cdot \omega \cdot C \cdot (\dot{U}_{x+1,y} - \dot{U}_{x,y}); & I_{C4} &= j \cdot \omega \cdot C \cdot (\dot{U}_{x,y+1} - \dot{U}_{x,y}) \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді, врахувавши, що струм через котушку індуктивності з координатами x , y дорівнює $I_{C1} + I_{C2} + I_{C3} + I_{C4}$, знайдемо

$$\dot{I}_{xy} = j\omega C(\dot{U}_{x-1,y} + \dot{U}_{x+1,y} + \dot{U}_{x,y-1} + \dot{U}_{x,y+1} - 4\dot{U}_{x,y}) \quad (5)$$

З іншого боку, напруга на котушці індуктивності складається з напруги самоіндукції $j\omega L \dot{I}$, напруги, індукованої зовнішнім полем $j\omega S \dot{B}_1$ та спадом напруги на активному опорі котушки індуктивності $R \dot{I}$, тобто

$$\dot{U}_{xy} = j\omega L \dot{I}_{xy} + j\omega S \dot{B}_{1,xy} + R \dot{I}_{xy} = (j\omega L + R) \dot{I}_{xy} + j\omega S \dot{B}_{1,xy}. \quad (6)$$

Підставимо це рівняння в (5), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{I}_{xy} &= j\omega C[(j\omega L + R) \dot{I}_{x-1,y} + j\omega S \dot{B}_{1,x-1,y} + (j\omega L + R) \dot{I}_{x+1,y} + j\omega S \dot{B}_{1,x+1,y} + \\ &+ (j\omega L + R) \dot{I}_{x,y-1} + j\omega S \dot{B}_{1,x,y-1} + (j\omega L + R) \dot{I}_{x,y+1} + j\omega S \dot{B}_{1,x,y+1} - \\ &- 4((j\omega L + R) \dot{I}_{xy} + j\omega S \dot{B}_{1,xy})] \end{aligned} \quad (7)$$

Розділимо в цьому рівнянні струми та магнітні індукції та врахуємо зв'язок струму зі створеною ним магнітною індукцією $\dot{I}_{x,y} = \frac{S}{L} \cdot \dot{B}_{L,x,y}$, одержимо

$$\begin{aligned} &(-\omega^2 LC + j\omega RC) \cdot (\dot{B}_{L,x-1,y} + \dot{B}_{L,x+1,y} + \dot{B}_{L,x,y-1} + \dot{B}_{L,x,y+1}) - \\ &- (1 + 4 \cdot (-\omega^2 LC + j\omega RC)) \cdot \dot{B}_{L,x,y} = \\ &= \omega^2 LC (\dot{B}_{1,x-1,y} + \dot{B}_{1,x+1,y} + \dot{B}_{1,x,y-1} + \dot{B}_{1,x,y+1} - 4\dot{B}_{1,x,y}) \end{aligned} \quad (8)$$

Залежність магнітної індукції від координат можна виразити через проекції хвильового вектора k на осі координат:

$$\dot{B}_{1,x,y} = \dot{B}_1 \cdot e^{j(k_x x + k_y y)}; \quad \dot{B}_{L,x,y} = \dot{B}_L \cdot e^{j(k_x x + k_y y)},$$

де \dot{B}_1 та \dot{B}_L – комплексні діючі значення, відповідно, зовнішньої магнітної індукції та магнітної індукції, створеної струмом через котушку індуктивності.

Підставимо ці вирази в рівняння (8), отримаємо

$$\begin{aligned} & \dot{B}_L \cdot (e^{j(k_x(x-1)+k_y y)} + e^{j(k_x(x+1)+k_y y)} + e^{j(k_x x+k_y(y-1))} + e^{j(k_x x+k_y(y+1))} - \\ & - \frac{1+4 \cdot (-\omega^2 LC + j\omega RC)}{-\omega^2 LC + j\omega RC} e^{j(k_x x+k_y y)}) = \\ & = \frac{\omega^2 LC}{-\omega^2 LC + j\omega RC} \cdot \dot{B}_1 \cdot (e^{j(k_x(x-1)+k_y y)} + e^{j(k_x(x+1)+k_y y)} + \\ & + e^{j(k_x x+k_y(y-1))} + e^{j(k_x x+k_y(y+1))} - 4e^{j(k_x x+k_y y)}) \end{aligned} \quad (9)$$

Після скорочення на $e^{j(k_x x+k_y y)}$ одержимо зв'язок між зовнішньою магнітною індукцією та магнітною індукцією, створеною струмом через котушку індуктивності

$$\dot{B}_L = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - j\omega RC} \cdot (4 - e^{-jk_x} - e^{jk_x} - e^{-jk_y} - e^{jk_y}) \cdot \dot{B}_1 = \dot{K} \cdot \dot{B}_1, \quad (10)$$

$$\text{де } \dot{K} = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - j\omega RC} \cdot (4 - e^{-jk_x} - e^{jk_x} - e^{-jk_y} - e^{jk_y}) \cdot \frac{1}{\omega^2 LC - j\omega RC}.$$

Використаємо формулу $\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos(\alpha)$ та введемо позначення $A = 4 - 2 \cdot \cos(k_x) - 2 \cdot \cos(k_y)$, отримаємо

$$\dot{K} = \frac{\omega^2 LC \cdot A}{1 - A \cdot \omega^2 LC + jA\omega RC}. \quad (11)$$

Повернувшись до формул (3) та (10), отримаємо відносну магнітну проникність діелектрика з CL -ланкою, яка взаємодіє з електромагнітною хвилею

$$\dot{\mu} = \dot{\mu}_1 \cdot (1 + \dot{K}). \quad (12)$$

Розглянемо для простоти хвилю, яка поширюється в напрямі осі x . Тоді $k_x = k$, а $k_y = 0$. Отже, $A = 4 - 2 \cdot \cos(k)$. Оскільки $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а в нормованій системі координат довжина хвилі λ дорівнює кількості котушок індуктивності N , розміщених на довжині

хвилі, то $A = 4 - 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{N})$. Як бачимо з формул (11) та (12), залежність відносної магнітної проникності від частоти хвилі визначена добутками LC , RC та числом N .

Якщо втрат у діелектрику нема (μ_1 – дійсне число) і опір котушки індуктивності дорівнює нулю, то, як бачимо з формули (12), відносна магнітна проникність μ також буде дійсною, бо

$$K = \frac{\omega^2 LC \cdot A}{1 - A \cdot \omega^2 LC} \tag{13}$$

Остаточню вираз для відносної магнітної проникності набуде такого вигляду:

$$\mu = \mu_1 \left(1 + \frac{\omega^2 LC [4 - 2 \cos(\frac{2\pi}{N})]}{1 - \omega^2 LC [4 - 2 \cos(\frac{2\pi}{N})]} \right) \tag{14}$$

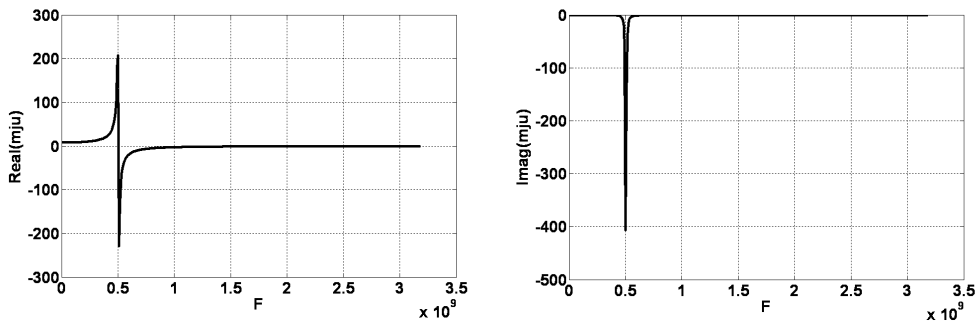


Рис. 2. Залежність дійсної та уявної частин відносної магнітної проникності від частоти для $LC = 5 \cdot 10^{-20}$ та $RC = 5 \cdot 10^{-12}$.

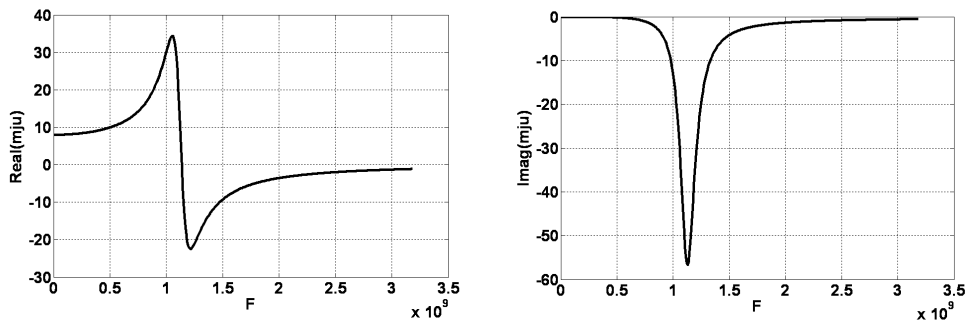


Рис. 3. Залежність дійсної та уявної частин відносної магнітної проникності від частоти для $LC = 1 \cdot 10^{-20}$ та $RC = 2 \cdot 10^{-11}$.

Якщо на довжині хвилі розміщено більше сотні котушок індуктивності, то $\cos(\frac{2\pi}{N}) \approx 1$, і тоді відносну магнітну проникність можна наближено обчислити за формулою

$$\mu = \mu_1 \left(1 + \frac{2\omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC} \right). \quad (15)$$

Як бачимо, другий доданок у дужках при $2\omega^2 LC > 1$ буде від'ємним, меншим від -1 і зі збільшенням частоти прямуватиме до -1. Тобто в такій системі відносна магнітна проникність за частоти електромагнітної хвилі $\omega > \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ буде від'ємною.

На рис. 2, 3 показана залежність дійсної та уявної частин відносної магнітної проникності діелектрика з CL-схемою від частоти для різних значень LC та RC при $N = 1000$ і $\mu_1 = 8$.

1. *Веселаго В. Г.* Электродинамика материалов с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // Успехи физ. наук. 1967. – Т. 92. – № 3. – С. 517–526.
2. *Pendry J. B.* Negative refraction // Contemp. Phys. – 2004. – Vol. 45. – P. 191–202.
3. *Болестта І. М.* Метаматеріали // Електроніка та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 1. – С. 3–17.

INTERACTION PLANAR CL-CIRCUIT WITH ELECTROMAGNETIC WAVE

Yu. Mochulsky

*Ivan Franko National University of Lviv
107 Tarnavsky Str., UA-79017 Lviv, Ukraine
mochulsky@ukr.net*

The interaction of inductances with magnetic component of electromagnetic wave in planar CL-circuit was investigated. As a result of this interaction the relative magnetic permeability of the medium is changed. Relation real and imaginary part of permeance of medium with a planar CL-circuit from the parameters of circuit and frequency of electromagnetic wave is find. Real part of permeance of medium with a planar CL-circuit change sign on negative in defined region of frequency. This fact confirm possibility of existence of material with negative refractive index.

Key words: metamaterials, electromagnetic wave, planar CL-circuit, index of refraction, magnetic permeability

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАНАРНОЙ CL-СХЕМЫ
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ****Ю. Мочульский**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина
mochulsky@ukr.net*

Исследовано взаимодействие магнитной составляющей, распространяющейся в плоскости планарной CL -схемы электромагнитной волны с индуктивностями схемы. В результате этого взаимодействия изменяется относительная магнитная проницаемость среды. Найдено зависимость действительной и мнимой части магнитной проницаемости среды с планарной CL -схемой от параметров схемы и частоты электромагнитной волны. Показано, что в определенной области частот действительная часть магнитной проницаемости изменяет знак на отрицательный. Этот факт подтверждает возможность существования искусственного материала с отрицательным коэффициентом преломления.

Ключевые слова: метаматериалы, электромагнитная волна, планарная CL -схема, относительная магнитная проницаемость.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.2012

Прийнята до друку 17.04.2012