ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2012. Випуск 2. С. 148–153
Electronics and information technologies. 2012. Issue 2. P. 148–153

УДК 519.62

ДО ПИТАННЯ КОНВЕРГЕНТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В. Григоренко, І. Романів, Я. Шмигельський
Львівський національний університет імені Івана Франка

вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

Для встановлення достатніх умов конвергентності нелінійної динамічної системи пропонується застосовувати теорему Далквіста про стійкість, що використовує поняття міри матриці Якобі математичної моделі. Показано, що таким шляхом можна отримати достатні умови конвергенції значно простіше і вони в деяких випадках можуть бути привабливішими з точки зору практичного застосування.

Ключові слова: динамічна система, конвергентність, міра матриці.

Конвергентними називають динамічні системи , у яких під дією зовнішньої періодичної сили встановлюється один і той самий єдиний періодичний режим, незалежно від початкових умов. Відомо, що лінійна система з постійними параметрами при періодичній зовнішній дії є конвергентною, якщо усі нулі її передаточної функції лежать строго у лівій півплощині [1,2]. Нелінійні системи, взагалі кажучи, не володіють властивістю конвергентності. Але існує цілий клас нелінійних систем, для яких конвергентність необхідна, бо є основою їх функціонування. Це функціональні перетворювачі, випростувачі, помножувачі частоти, енергетичні системи тощо. Тому важливою для практики задачею було і є знаходження умов, які б дозволяли за виглядом математичної моделі системи визначати, чи володіє вона властивістю конвергентності.

Розглянемо математичну модель динамічної системи у вигляді звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t+T) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) \quad \forall t,\ T > 0$

Сформулюємо властивість конвергенції для математичної моделі (1).

Визначення 1. Систему (1) будемо називати конвергентною [1,2], якщо

1) при періодичній зовнішній дії в системі існує періодичний режим з періодом зовнішнього збудження *T*;

2) для будь-яких для будь-яких двох розв’язків $\boldsymbol{u}(t)$ і $\boldsymbol{v}(t)$, що відповідають різним початковим умовам виконується умова:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)\right\| = 0\,. \tag{2}$$

Дослідження достатніх умов конвергентності системи (1) широко проводилось у другій половині XX століття (посилання на деякі праці можна знайти в [1,2]). Але внаслідок загальності задачі усі отримані результати виявились мало придатними для практичного застосування.

Нижче показано, що для встановлення достатніх умов конвергентності зручно використовувати міру матриці Якобі математичної моделі нелінійної динамічної системи.

Поняття міри матриці було введено незалежно Лозинським [3] і Далквістом [4] для вирішення питань, пов'язаних з похибками чисельних методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. З того часу це поняття успішно застосовувалося в теорії електричних кіл [5], в теорії систем керування [6], при аналізі чисельних методів [7] тощо.

Для заданої матриці $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ міра матриці $\mu[\boldsymbol{A}]$ (її ще називають логарифмічною нормою) визначається формулою:

$$\mu[\boldsymbol{A}] = \lim_{h \to 0+} \frac{\|\boldsymbol{I} + h\boldsymbol{A}\| - 1}{h}, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{I}$ - одинична матриця. Задана таким чином міра матриці коректно визначена (в сенсі існування границі) для будь-якої $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [6,7].

Для найбільш уживаних матричних норм міра матриці $\mu[\boldsymbol{A}]$ відома [6,7]. Нехай $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, тоді для норми l^1 :

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_i \sum_i |a_{ij}|, \qquad \mu_1[\boldsymbol{A}] = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right); \tag{4}$$

для норми l^2:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})}, \qquad \mu_2[\boldsymbol{A}] = \max_i \lambda_i \left(\frac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T}{2} \right); \tag{5}$$

для норми l^∞ :

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \qquad \mu_\infty[\boldsymbol{A}] = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right), \tag{6}$$

де $\lambda_i(\boldsymbol{M})$ - i-те власне значення матриці $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Міра матриці, як інструмент дослідження динамічних систем, в багатьох випадках є зручнішою за відповідну норму матриці. Міра матриці може бути меншою за норму. Із рівності $\mu[\boldsymbol{A}] = 0$ не випливає, що $\boldsymbol{A} = 0$. І, нарешті, міра матриці може бути від'ємною.

Далквістом отриманий наступний фундаментальний результат:

Теорема [4]. Нехай $\|\bullet\|$ - задана норма в $\mathbb{R}^n$ і $q \in \mathbb{R}$ таке, що виконується нерівність $\mu[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}, t)] \le q, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Тоді для будь-яких двох розв'язків $\boldsymbol{u}(t)$ і $\boldsymbol{v}(t)$ системи (1) має місце нерівність:

$$\|\boldsymbol{u}(t+\tau)-\boldsymbol{v}(t+\tau)\| \le e^{q\tau}\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)\|, \quad \forall\tau>0 . \tag{7}$$

(тут $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}$ - матриця Якобі системи (1)).

Теорема показує, що для дослідження конвергентності можна застосовувати міру матриці Якобі системи (1). А саме, якщо

$$\mu[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x},t)] \le q < 0, \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n , \tag{8}$$

то з (7) випливає, що виконується умова (2). Крім того, коли має місце (8), система (1) буде дисипативною [7]. А це означає, що при періодичній зовнішній дії вона володіє періодичним розв’язком з періодом зовнішнього збудження [2]. А отже забезпечуються обидві умови з визначення 1.

Відзначимо, що умова конвергентності, що випливає з нерівності $\mu_2[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x},t)] \le q < 0, \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, збігається з відомим критерієм Демидовича [2], який був отриманий іншим шляхом.

З (4), (5) і (6) видно, що $\mu_1[\boldsymbol{A}]$ і $\mu_\infty[\boldsymbol{A}]$ неважко обчислити, а от $\mu_2[\boldsymbol{A}]$ в більшості випадків можна лише оцінити і то не завжди, якщо система нелінійна. Саме тому критерій Демидовича для систем вище другого порядку практично не застосовується.

Покажемо що, умови конвергентності, що базуються на використанні $\mu_1[\boldsymbol{A}]$ і $\mu_\infty[\boldsymbol{A}]$, не тільки достатньо просто одержуються, але у деяких випадках можуть розширяти область конвергентності у просторі параметрів системи порівняно з критерієм Демидовича.

Визначення 2. Матриця $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ називається діагонально домінантною по стрічкам якщо:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\ne i}|a_{ij}|, \quad \forall i , \tag{9}$$

і діагонально домінантною по стовпцям, якщо:

$$|a_{jj}| > \sum_{i\ne j}|a_{ij}|, \quad \forall j . \tag{10}$$

Визначення 3. Матриця $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ називається від’ємно визначеною, якщо:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0 \quad \forall \boldsymbol{x}\ne 0 . \tag{11}$$

Надалі скористаємося класифікацію матриць із праці [8]. Якщо у матриці $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ усі діагональні елементи від’ємні і вона є до домінантною по стрічкам (стовпцям), будемо говорити, що вона належить класу D_r^- (D_c^-). Якщо матриця $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ є від’ємно визначеною, будемо говорити, що вона належить класу S^-. Тоді з (4), (5) і (6) випливають очевидні співвідношення:

1) $\mu_1[\boldsymbol{A}] < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in D_c^-$;

2) $\mu_2[\boldsymbol{A}] < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in S^-$;

3) $\mu_\infty[\boldsymbol{A}] < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in D_r^-$.

Взаємозв'язок між класами матриць D_c^-, D_r^- і S^- схематично показаний на рис.1 [8]:

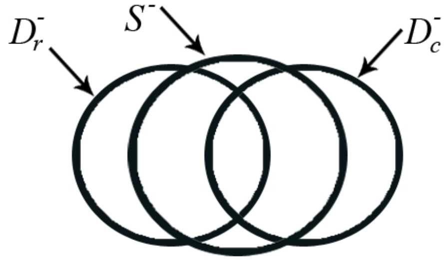

Рис. 1. Взаємозв'язок між класами матриць.

З рис.1 видно, що умови належності матриці Якобі системи (1) до класу D_c^- або до класу D_r^- може розширити область конвергентності системи і зробити їх привабливішими з точки зору практичного застосування.

Приклад.

Розглянемо електричну схему (рис.2):

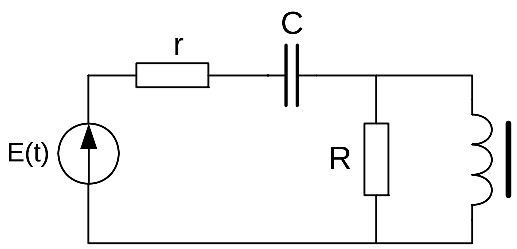

Рис.2. Нелінійний RLC-контур.

Математична модель цієї схеми:

$$\frac{du_C}{dt} = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-1} \left(-\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}E(t)\right),$$
$$\frac{d\psi_L}{dt} = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-1} \left(-u_C - ri_L + E(t)\right), \tag{12}$$
$$i_L = f(\psi_L).$$

де u_C - напруга на ємності, ψ_L, i_L - потокозчеплення та струм індуктивності, $f(\psi_L)$ - неперервно диференційована функція, що характеризує вебер-амперну характеристику індуктивності.

Спробуємо визначити умови конвергентності математичної моделі (12) за критерієм Демидовича. Матриця Якобі для (12) має вигляд:

$$\boldsymbol{J} = \eta \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} f' \\ -1 & -rf' \end{bmatrix}, \tag{13}$$

де $f' = \dfrac{di_L}{d\psi_L} = \dfrac{1}{L_d}$ - величина, обернена до диференціальної індуктивності, $\eta = \left(1 + \dfrac{r}{R}\right)^{-1}$.

Симетрична частина матриці Якобі:

$$\boldsymbol{J}_S = \frac{\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^T}{2} = \eta \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{2C}(f' - C) \\ \dfrac{1}{2C}(f' - C) & -rf' \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Умова від'ємної визначеності матриці $\boldsymbol{J}_S$:

$$4\frac{r}{R} Cf' > (f' - C)^2. \tag{15}$$

Розв'язок цієї нерівності дає:

$$C\left[1 + 2\frac{r}{R}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{R}{r}}\right)\right] < \frac{1}{L_d} < C\left[1 + 2\frac{r}{R}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{R}{r}}\right)\right].$$

Тоді як при використанні критерію (8) з мірою $\mu_\infty[\boldsymbol{J}]$ одержимо: $\dfrac{1}{L_d} < \dfrac{1}{R}$ і одночасно $\dfrac{1}{L_d} < \dfrac{1}{r}$. Тобто $L_d > \max(R, r)$.

---

1. *Данилов Л.В. и др.* Теория нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 256 с.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Демидович Б.П. – М.: "Наука", 1967. – 472 с.
3. *Лозинский С.М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 1 / Лозинский С.М. // Известия ВУЗов. Математика. 1958. №5(6). – С.52-90.
4. *Dahlkuist G.* Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations / Dahlkuist G. // Trans. Royal Inst. of Technology. Stockholm. 1959. №130.

5. *Desoer C.*, *Haneda H.* The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithms for circuit analysis / Desoer C., Haneda H. // IEEE Trans. Circuit Theory. 1972. V. 19. – P.480-486.
6. *Дезоер Ч., Видьясагар М.* Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения: Пер. с англ. / Дезоер Ч., Видьясагар М. – М.: "Наука", 1983. – 280 с.
7. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / Деккер К., Вервер Я. – М.: "Мир", 1988. – 334 с.
8. *Синицкий Л.А.* О свойствах матриц, применяемых в теории электрических цепей / Синицкий Л.А // Теоретическая электротехника. 1989. Вып. 47. – С. 39-45.

ON THE CONVERGENCE OF NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

V. Hryhorenko, I. Romaniv, Ya. Shmygelsky

Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA–79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

It proposed to exploit the Dahlquist equivalence theorem that uses the measure of the Jacobi matrix definition in order to establish the conditions of the convergence of a non-linear dynamic system. It is demonstrated that using this approach, the sufficient conditions can be reached in a simpler manner and in some cases they can be more suitable for practical applications.
Key words: dynamic system, convergence, similarity matrix.

К ВОПРОСУ О КОНВЕРГЕНТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Григоренко, И. Романив, Я. Шмигельский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

Для установления достаточных условий конвергентности нелинейной динамической системы предлагается применять теорему Далквиста об устойчивости, которая использует понятие меры матрицы Якоби математической модели. Показано, что таким путем можно получить достаточные условия конвергентности значительно проще и они, в некоторых случаях, могут быть более привлекательными с точки зрения практического использования.
Ключевые слова: динамическая система, конвергентность, мера матрицы.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2012
Прийнята до друку 19.06.2012