

УДК 531.8

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ СТАБІЛІЗАЦІЇ КВАДРОКОПТЕРА У ПОЛЬОТІ

Б. Благітко, Ю. Мочульський

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
blagitko@electronics.lnu.edu.ua , mochulsky@ukr.net*

Наведено результати досліджень математичної моделі квадрокоптера у польоті з урахуванням властивостей електродвигунів. Математична модель представлена системою алгебро-диференціальних рівнянь у формі Коші 12-го порядку. Вхідною інформацією є значення висоти польоту квадрокоптера, значення кутів тангажу, крену, ролу та зміни їх у часі. Розглянуто спосіб пропорційно-диференціального (ПД) керування для стабілізації квадрокоптера у польоті та оптимального виведення квадрокоптера на заданий режим. ПД-регулятор змінює прорости сили тяги чотирьох електродвигунів-гвинтів, знак проростів та моменти часу, у які повинні відбуватися всі ці зміни. Стабілізація квадрокоптера у польоті перевірена на прикладі автоматичного виконання фігури простого пілотажу, – горизонтальної вісімки –, як з правим, так і з лівим поворотами.

Ключові слова: квадрокоптер, стабілізація польоту, керування.

Класичний літальний апарат (ЛА), планер, конструктивно володіє такою властивістю як стійкість. Стійкість – властивість ЛА відновлювати без дії пілота кінематичні параметри незбуреного руху і повертатися до вихідного режиму польоту після закінчення дії збурення. Саме ця властивість суттєво полегшує управління класичним ЛА.

Квадрокоптер, конструктивно, такою властивістю не володіє. Квадрокоптер у польоті є статично нестійкий і при найменшому зовнішньому збуренні відразу ж починається некерований процес його зниження, перевертання, простіше кажучи, квадрокоптер падає на поверхню Землі.

Динамічна модель руху квадрокоптера в повітрі розглядалася в [1,2]. У статтях [6,7] підкреслено, що, навіть у простих ситуаціях вертикальних злету або приземлення, забезпечити стабільність польоту квадрокоптера при ручному управлінні важко або неможливо. Різноманітні методи автоматичного управління польотом квадрокоптера, включаючи використання PID регуляторів, розглядалися в [3,5]. Більшу увагу в цитованих працях приділялося особливостям моделювання руху квадрокоптера, а питання стабілізації польоту квадрокоптера, на наш погляд, висвітлені недосить повно.

Основне завдання цієї статті полягає в тому, щоб забезпечити управління процесом стабілізації квадрокоптера, як однієї із основних фігур пілотажу квадрокоптера, тобто зробити квадрокоптер стійким у польоті.

З точки зору теорії автоматичного управління (ТАУ) для того, щоб ефективно управляти системою необхідно:

- знати, в якому стані ми хочемо утримувати систему;
- мати можливість визначити, в якому стані знаходиться система в даний момент;
- мати можливість вводити управляючу дію на систему.

Для визначення стану системи в даний момент використовуються різноманітні сенсори (гіроскопи, акселерометри, магнітометри та ін.). Ці сенсори забезпечують обернений зв'язок у системі управління.

Вводити управляючу дію на систему можна шляхом зміни швидкості обертання роторів електричних двигунів із повітряними гвинтами. Наприклад, для того, щоб розвернути квадрокоптер навколо однієї з горизонтальних осей, необхідно збільшити оберти одного електродвигуна і зменшити оберти протилежного електродвигуна. Змінюючи на однакову величину оберти відразу всіх електродвигунів, можна змінювати загальну підймальну силу і управляти висотою ЛА.

Для стабілізації польоту необхідно утримувати систему в режимі зависання в повітрі. Найпростішим методом, який може забезпечити підтримання режиму зависання, є метод управління за кутовими швидкостями обертання навколо всіх трьох осей. На Рис.1 показані три кути: тангажу (pitch), крену (roll) і рискання (yaw), за значеннями яких вираховуються кутові швидкості обертання ЛА навколо всіх трьох осей. Там же показані додатні напрями кутових швидкостей обертання ЛА.

Тангаж – кутовий рух літального апарата відносно головної поперечної осі інерції. Кут тангажу θ – кут між поздовжньою віссю літального апарата і горизонтальною площиною.

Крен – кутовий рух літального апарата відносно головної поздовжньої осі інерції. Кут крену γ – кут між поперечною віссю літального апарата і горизонтальною площиною

Рискання – кутові рухи літального апарата відносно вертикальної осі, кут рискання ψ – кут повороту корпусу літального апарата в горизонтальній площині, відлічуваний від напрямку на північ.

Введемо три системи координат. Перша – нерухома система координат, прив'язана до місця старту на Землі. Вісь Y направлена на північ, вісь X направлена на схід від місця на Землі, де знаходиться оператор, а вісь Z направлена вертикально догори. В другій системі координат (рис. 1) початок відліку співпадає з центром мас квадрокоптера, а напрям осей X_1, Y_1, Z_1 співпадає з напрямом відповідних осей першої системи, причому координати $z_1=z$. В третій системі координат вісь Y_2 направлена від центру мас квадрокоптера до його носу (точки $A1$), вісь X_2 – від центру мас до правого двигуна, а вісь Z_2 – перпендикулярно до осей X_2, Y_2 догори, причому координати $x_1=x_2, y_1=y_2$.

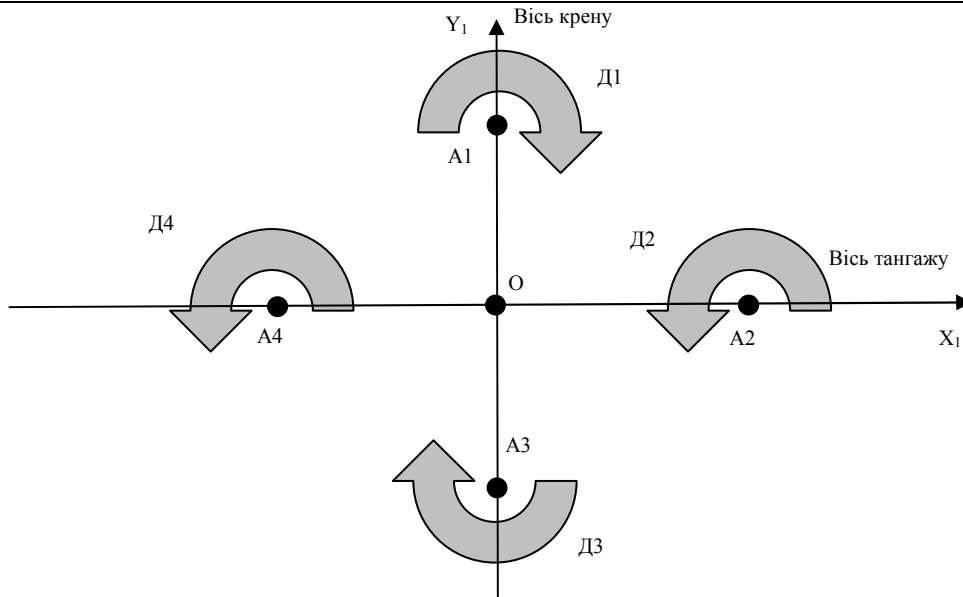


Рис.1. Схематичний вигляд квадрокоптера зверху, напрями обертання гвинтів та три осі тангажу (pitch), крену (roll) і ролання (yaw) обертання ЛА навколо всіх трьох осей.

Чотири двигуни квадрокоптера розміщені на кінцях балок на однакових відстанях L від центра мас і обертаються в напрямках, вказаних на рисунку. До кожного з двигунів прикріплені пропелери, які створюють силу тяги. Двигун Д1 створює силу тяги $F_1 = k \cdot \omega_1^2$, яка пропорційна до квадрату швидкості обертання ротора двигуна ω_1 і напрямлена вздовж осі Z . Для обертання ротора до нього прикладений відносно точки А1 момент сили $M_1 = b \cdot \omega_1^2 + J_p \cdot \dot{\omega}_1$, де b – коефіцієнт аеродинамічного опору, J_p – момент інерції ротора. Вплив другого доданка на момент сили незначний і, знехтувавши ним, отримуємо $M_1 = b \cdot \omega_1^2 = \frac{b}{k} \cdot F_1 = k_1 \cdot F_1$, тобто, момент сили M_1 пропорційний до сили тяги і направлений проти осі Z_1 .

За третім законом Ньютона до корпусу квадрокоптера прикладається в точці А1 такий самий момент сили M_1 , тільки направлений вздовж осі Z_1 . Момент сили $M_{1\psi}$, перерахований відносно осі ролання, дорівнюватиме M_1 . Крім цього, сила F_1 створює відносно осі тангажу момент сили $M_{1\theta} = F_1 \cdot L$. Таким чином, двигун Д1 створює в точці А1 силу тяги F_1 , направлену в додатному напрямку осі ролання, момент сили відносно осі ролання $M_{1\phi} = k_1 \cdot F_1 = b \cdot \omega_1^2$, направлений вздовж осі ролання, і момент сили відносно осі тангажу $M_{1\theta} = F_1 \cdot L = k \cdot L \cdot \omega_1^2$, направлений вздовж осі крену.

Аналогічно двигун Д2 при швидкості обертання ротора двигуна ω_2 створює в точці А2 силу тяги $F_2 = k \cdot \omega_2^2$, направлену в додатному напрямку осі ролання, момент сили

відносно осі рискання $M_{2\phi} = -k_1 \cdot F_2 = -b \cdot \omega_2^2$, направлений проти осі рискання, і момент сили відносно осі крену $M_{2\gamma} = -F_2 \cdot L = -k \cdot L \cdot \omega_2^2$, направлений проти осі тангажу.

Двигун Д3 при швидкості обертання ротора двигуна ω_3 створює в точці А3 силу $F_3 = k \cdot \omega_3^2$, направлену в додатному напрямку осі рискання, момент сили відносно осі рискання $M_{3\phi} = k_1 \cdot F_3 = b \cdot \omega_3^2$, направлений вздовж осі рискання, і момент сили відносно осі тангажу $M_{3\theta} = -F_3 \cdot L = -k \cdot L \cdot \omega_3^2$, направлений проти осі крену.

Двигун Д4 при швидкості обертання ротора двигуна ω_4 створює в точці А4 силу тяги $F_4 = k \cdot \omega_4^2$, направлену в додатному напрямку осі рискання, момент сили відносно осі рискання $M_{4\phi} = -k_1 \cdot F_4 = -b \cdot \omega_4^2$, направлений проти осі рискання, і момент сили відносно осі крену $M_{4\gamma} = F_4 \cdot L = k \cdot L \cdot \omega_4^2$, направлений вздовж осі тангажу.

Всі сили тяги мають однаковий напрям і їх можна замінити однією силою тяги

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = k \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \quad (1)$$

прикладеною до центра мас квадрокоптера.

Сумарний момент сил відносно осі тангажу дорівнює

$$M_\theta = M_1 + M_3 = L \cdot (F_1 - F_3) = k \cdot L \cdot (\omega_1^2 - \omega_3^2), \quad (2)$$

а сумарний момент сил відносно осі крену –

$$M_\gamma = M_2 + M_4 = L \cdot (F_4 - F_2) = k \cdot L \cdot (\omega_4^2 - \omega_2^2). \quad (3)$$

Сумарний момент сил відносно осі рискання визначається, як

$$M_\phi = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = k_1 \cdot (F_1 - F_2 + F_3 - F_4) = b \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2). \quad (4)$$

Якщо швидкості обертання всіх двигунів однакові ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_0$), то всі сили тяги будуть рівними ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4$) і всі моменти сил M_θ , M_γ та M_ψ дорівнюватимуть нулю, тобто квадрокоптер не буде обертатися.

Для скорочення запису надалі крапка над змінною означатиме першу похідну по часі, дві крапки – другу похідну.

За законами динаміки для обертового руху можна записати наступні рівняння

$$J \cdot \ddot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (J \cdot \dot{\vec{\omega}}) + J_G \cdot \dot{\vec{\omega}} \times [0 \ 0 \ 1]^T \cdot \omega_G = \vec{M}, \quad (5)$$

де другий доданок враховує доцентрові сили, а третій – гіроскопічні сили, причому знак \times означає векторний добуток.

В формулі (5) використані наступні позначення

$J = \text{diag}(J_\gamma, J_\theta, J_\phi)$ – діагональна матриця моментів інерції,

$\vec{\omega} = [\omega_\gamma \ \omega_\theta \ \omega_\phi]^T$ – вектор кутових швидкостей квадрокоптера,

$\dot{\vec{\omega}} = [\dot{\omega}_\gamma \ \dot{\omega}_\theta \ \dot{\omega}_\phi]^T$ – вектор кутових прискорень квадрокоптера,

$\vec{M} = [M_\gamma \quad M_\theta \quad M_\phi]^T$ – вектор моментів сил, який визначається наступним чином

$$\vec{M} = \left[k \cdot L \cdot (\omega_4^2 - \omega_2^2) \quad k \cdot L \cdot (\omega_1^2 - \omega_3^2) \quad b \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \right]^T,$$

$\omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$ – сумарний вектор кутових швидкостей двигунів.

Для моделювання просторового переміщення квадрокоптера необхідно силу тяги F (рівняння (1)), визначену в системі координат X_2, Y_2, Z_2 , перевести в систему координат X, Y, Z . Для цього використовуємо матрицю повороту системи координат

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\gamma) & \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) + \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) & \cos(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\phi) \cdot \cos(\gamma) & -\sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \cdot \sin(\theta) & \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Враховавши те, що в системі координат X_2, Y_2, Z_2 сила тяги F направлена вздовж осі Z_2 , і використавши матрицю повороту системи координат, в системі координат X, Y, Z силу тяги F можна записати у векторному вигляді

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cdot (\cos(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)) \\ F \cdot (-\sin(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)) \\ F \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Враховавши силу тяжіння mg , рівняння просторового переміщення в системі координат X, Y, Z матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = -g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F}{m} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де третій доданок враховує опір повітря.

Це рівняння разом з рівнянням (5), переписаним у вигляді

$$\dot{\vec{\omega}} = J^{-1} \cdot (-\vec{\omega} \times (J \cdot \vec{\omega}) - J_\Gamma \cdot \vec{\omega} \times [0 \quad 0 \quad 1]^T \cdot \omega_\Gamma + \vec{M}) \quad (9)$$

визначають переміщення квадрокоптера в просторі та його обертання навколо осей тангажу, крену та ристання.

Швидкості обертання роторів двигунів ω залежать від прикладеної до обмотки напруги U . Знайдемо цю залежність. Еквівалентна електрична схема двигуна (Рис. 2) складається з омичного опору обмотки R , її індуктивності L та джерела е.р.с. E , яка наводиться в обмотці під час обертання ротора.

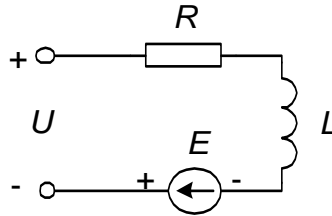


Рис. 2. Еквівалентна електрична схема двигуна

Запишемо рівняння електричного кола двигуна

$$U = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + k_D \cdot \omega. \quad (10)$$

За законом динаміки обертового руху можна записати

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_T - M_H, \quad (11)$$

де $M_d = k_D \cdot i$ – обертовий момент двигуна, а M_T – момент сили сухого тертя, $M_H = k \cdot \omega^2$ – момент навантаження, k_D – постійний коефіцієнти двигуна, k – коефіцієнт навантаження, J – момент інерції ротора.

Зауважимо, що е.р.с. E пропорційна до швидкості обертання ротора з тим самим коефіцієнтом пропорційності, що і для обертового моменту.

Виключивши з цих рівнянь струм обмотки двигуна, отримаємо нелінійне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{k}{J} \cdot \frac{d\omega^2}{dt} + \frac{k_D^2}{JL} \omega + \frac{Rk}{JL} \cdot \omega^2 + \frac{RM_T}{JL} = \frac{k_D}{JL} \cdot U \quad (12)$$

Враховавши, що індуктивність обмотки двигуна досить мала, це рівняння можна спростити до першого порядку

$$\frac{d\omega}{dt} + a_1 \cdot \omega + a_2 \cdot \omega^2 + a_0 = b \cdot U \quad (13)$$

де $a_1 = \frac{k_D^2}{JR}$, $a_2 = \frac{k}{J}$, $a_0 = \frac{M_T}{J}$, $b = \frac{k_D}{JR}$.

З рівняння (13) можна знайти формулу для швидкості обертання ротора в установившому режимі при прикладанні постійної напруги

$$\omega = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0 + 4a_2bU}}{2a_2}, \quad (14)$$

а також, яку напругу необхідно прикласти для того, щоб в установившому режимі отримати задану швидкість обертання

$$U = (a_1 \cdot \omega + a_2 \cdot \omega^2 + a_0) / b. \quad (15)$$

В першому наближенні, якщо знехтувати інерційністю двигуна, рух квадрокоптера можна описати наступною системою диференціальних і алгебричних рівнянь

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{V}_X \\ \dot{V}_Y \\ \dot{V}_Z \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\omega}_\gamma \\ \dot{\omega}_\theta \\ \dot{\omega}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ F \cdot (\cos(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)) / m - Ax \cdot V_X / m \\ F \cdot (-\sin(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)) / m - Ay \cdot V_Y / m \\ -g + F \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) / m - Az \cdot V_Z / m \\ \omega_\gamma \\ \omega_\theta \\ \omega_\phi \\ ((J_y - J_z) \cdot \omega_\theta \cdot \omega_\phi - J_\Gamma \cdot \omega_\theta \cdot \omega_\Gamma + M_\gamma) / J_x \\ ((J_z - J_x) \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\phi + J_\Gamma \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\Gamma + M_\theta) / J_y \\ ((J_x - J_y) \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\theta + M_\phi) / J_z \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0 + 4a_2bU_1}}{2a_2},$$

$$\omega_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0 + 4a_2bU_2}}{2a_2},$$

$$\omega_3 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0 + 4a_2bU_3}}{2a_2},$$

$$\omega_4 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0 + 4a_2bU_4}}{2a_2}, \quad (16)$$

де величини F , M_γ , M_θ та M_ϕ виражаються через швидкості ω_1 , ω_2 , ω_3 та ω_4 відповідно до рівнянь (1), (2), (3) та (4).

Для стабілізації польоту квадрокоптера необхідно ввести регулятор. Розглянемо пропорційно-диференціальний регулятор, який описується наступними рівняннями

$$\begin{aligned} e(t) &= x_d(t) - x(t) \\ u(t) &= K_p \cdot e(t) + K_d \cdot \dot{e}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

В формулі (17) $e(t)$ – різниця між заданим значенням параметра x_3 та біжучим x , u – регулююча сила. K_p та K_d – коефіцієнти пропорційного та диференціального регулятора, відповідно.

Положення квадрокоптера задається шістьма величинами: просторовими координатами X, Y, Z та кутами θ, γ, ψ . Але змінювати їх ми можемо лише за допомогою чотирьох величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 . Тому виберемо для регулятора чотири змінні: Z, θ, γ та ψ .

Як видно з рівняння (8), в системі координат X, Y, Z в напрямку осі Z діє сила

$$F_Z = F \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\phi) - mg. \quad (18)$$

При пропорційно-диференціальному регуляторі ця сила повинна дорівнювати

$$F_{pez} = K_{zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp} \cdot (Z_d - Z), \quad (19)$$

де Z_d – задана висота, Z – бажана висота, K_{zd} та K_{zp} – коефіцієнти диференціального та пропорційного регулятора висоти відповідно.

Прирівнявши сили F_Z та F_{pez} , отримаємо

$$F = \frac{mg + K_{zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp} \cdot (Z_d - Z)}{\cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)}. \quad (20)$$

Аналогічно для моментів сил обертання можна записати

$$\begin{aligned} M_\theta &= K_{\theta p} \cdot (\theta_d - \theta) + K_{\theta d} \cdot (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}), \\ M_\gamma &= K_{\gamma p} \cdot (\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d} \cdot (\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma}), \\ M_\phi &= K_{\phi p} \cdot (\phi_d - \phi) + K_{\phi d} \cdot (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}), \end{aligned} \quad (21)$$

де $\theta_d, \gamma_d, \psi_d$ – задані кути тангажу, крену та рискання відповідно, а θ, γ, ψ – бажані кути.

Виразивши кутові швидкості з рівнянь (1), (2), (3) та (4) через F, M_θ, M_γ та M_ψ , отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{F}{4k} + \frac{M_\theta}{2kL} + \frac{M_\phi}{4b}, \\ \omega_2^2 &= \frac{F}{4k} - \frac{M_\gamma}{2kL} - \frac{M_\phi}{4b}, \\ \omega_3^2 &= \frac{F}{4k} - \frac{M_\theta}{2kL} + \frac{M_\phi}{4b}, \\ \omega_4^2 &= \frac{F}{4k} + \frac{M_\gamma}{2kL} - \frac{M_\phi}{4b}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рівняння (22) разом з рівняннями (20) і (21) задають закон зміни швидкостей обертання роторів двигунів в залежності від висоти Z і кутів тангажу, крену та рискання

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{mg + K_{Zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{Zp} \cdot (Z_d - Z)}{4k \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)} - \frac{K_{\theta p} \cdot (\theta_d - \theta) + K_{\theta d} \cdot (\dot{\theta}_d - \dot{\theta})}{2kL} - \\
&\quad - \frac{K_{\phi p} \cdot (\phi_d - \phi) + K_{\phi d} \cdot (\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}; \\
\omega_2^2 &= \frac{mg + K_{Zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{Zp} \cdot (Z_d - Z)}{4k \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)} - \frac{K_{\gamma p} \cdot (\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d} \cdot (\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma})}{2kL} + \\
&\quad + \frac{K_{\phi p} \cdot (\phi_d - \phi) + K_{\phi d} \cdot (\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}; \\
\omega_3^2 &= \frac{mg + K_{Zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{Zp} \cdot (Z_d - Z)}{4k \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)} + \frac{K_{\theta p} \cdot (\theta_d - \theta) + K_{\theta d} \cdot (\dot{\theta}_d - \dot{\theta})}{2kL} - \\
&\quad - \frac{K_{\phi p} \cdot (\phi_d - \phi) + K_{\phi d} \cdot (\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}; \\
\omega_4^2 &= \frac{mg + K_{Zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{Zp} \cdot (Z_d - Z)}{4k \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)} + \frac{K_{\gamma p} \cdot (\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d} \cdot (\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma})}{2kL} + \\
&\quad + \frac{K_{\phi p} \cdot (\phi_d - \phi) + K_{\phi d} \cdot (\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}.
\end{aligned} \tag{23}$$

За отриманими з рівняння (23) значеннями квадратів кутових швидкостей двигунів можна згідно рівняння (16) обчислити напруги, які необхідно прикласти до кожного з двигунів.

При обчисленнях використовувалися такі параметри електродвигунів:

- момент інерції ротора (J) = 0.01 кг м²;
- демпфівальний коефіцієнт (b) = 0.1 Н м с;
- коефіцієнт е.р.с. (k) = 0.01 Н м /А;
- опір обмотки (R) = 1 Ом;
- індуктивність обмотки (L) = 0.5 Гн.

Для перевірки математичної моделі квадрокоптера була вибрана фігура простого пілотажу – горизонтальна вісімка. При виконанні цієї фігури квадрокоптер повинен в горизонтальній площині виконати повне коло, а після цього – друге коло в протилежному напрямку. Для руху по колу на заданій висоті до квадрокоптера повинна бути прикладена направлена догори вертикальна сила, яка дорівнює mg , та горизонтальна доцентрова сила, величина якої визначатиме радіус кола. Для створення доцентрової сили необхідно нахилити квадрокоптер, тобто задати ненульовий кут тангажу або крену або обидва кути одночасно. Тоді силу тяги пропелерів можна розкласти на дві складові – горизонтальну та вертикальну. При русі по колу вектор доцентрової сили рівномірно змінює свій напрям. Таку доцентрову силу можна створити задавши певний постійний кут тангажу або крену та рівномірно в часі змінювати кут рискання. Для описування вісімки після того, як квадрокоптер, описавши коло, повернеться в початкову точку, необхідно поміняти напрям зміни кута рискання на протилежний і описати ще одно коло.

Для моделювання руху квадрокоптера по горизонтальній вісімці розглянутому вище регулятору задається стала висота $Z_d=5$ м, а кут крену постійно дорівнює нулю. Кут тан-

гажу задається рівним 0,05 радіана, а заданий для регулятора кут рискання змінюється за законом $\phi_d = 0.19 \cdot t$ до 33 с, а після цього за законом $\phi_d = 2\pi - 0.19 \cdot (t - 33)$ (рис. 3). При таких даних квадрокоптер виконує політ у вигляді фігури простого пілотажу – горизонтальної вісімки. Якщо задати кут тангажу 0,1 радіана, то радіус вісімки збільшиться вдвічі. На Рис. 4 зображений графік польоту квадрокоптера по маршруту горизонтальної вісімки.

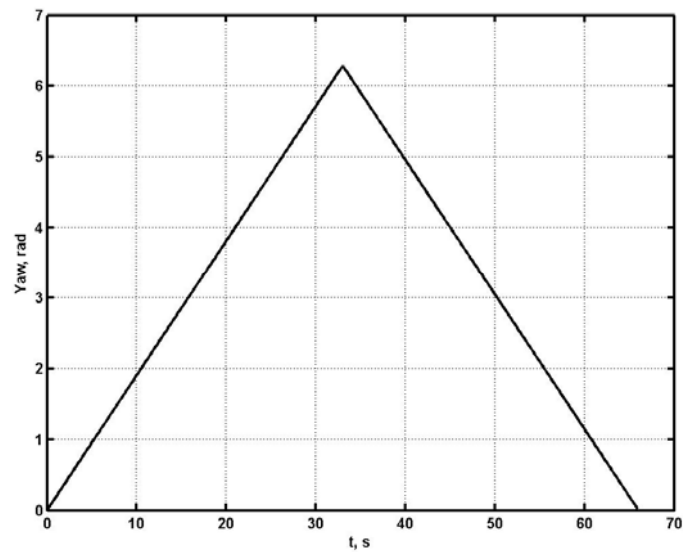


Рис. 3. Графік зміни кута рискання.

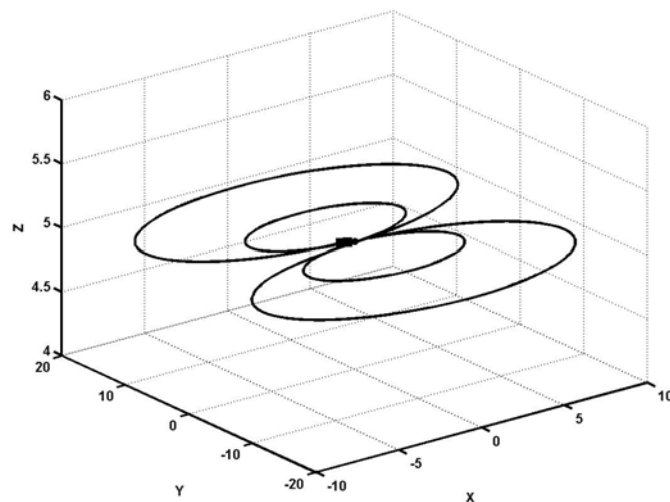


Рис. 4. Графік польоту квадрокоптера по маршруту горизонтальної вісімки.

1. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment / G. M. Hoffmann, H. Huang, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Aug. 2007.
2. Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin // IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3277–3282, May 2009.
3. *Tayebi A. and McGilvray S.* Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot / A. Tayebi and S. McGilvray // 43rd IEEE Conference on Decision and Control, vol. 2, pp. 1216–1221, 2004.
4. Attitude control of a quadrotor / I. C. Dikmen, A. Arısoy, and H. Temelta // 4th International Conference on Recent Advances in Space Technologies, pp. 722–727, 2009.
5. Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors / P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul // IEEE Control Systems Magazine, pp. 45–55, Dec. 2005.
6. *Благітко Б. Я.* Способи ручного керування вертикальним злетом і приземленням квадрокоптера / Б. Я. Благітко, Ю. С. Мочульський // Електроніка та інформаційні технології. - 2012. - Вип. 2. - С.77-87.
7. Моделювання процесу керування вертикальним злетом і приземленням безпілотного квадрокоптера / Благітко Б., Мочульський Ю., Кіт Л., Заячук І. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2012. - Вип. 16. - С.23-31.
8. *Мочульський Ю.* MatLab у фізичних дослідженнях:[навч. - метод. посіб.] / Ю. Мочульський — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. — 121 с.

MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS QUADROPTER STABILIZATION IN FLIGHT

B. Blahitko, Yu. Mochulsky

*Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine
blagitko@electronics.lnu.edu.ua, mochulsky@ukr.net*

The results of investigation of quadcopter in flight mathematical model with the properties of electric motors are considering. The mathematical model is presented by system of algebraic-differential equations in the Cauchy form of the 12th order. Input information is the value of quadcopter altitude, of pitch angle, roll angle, yaw angle and their changes with timeflow. The proportional-differential (PD) control is used in order to stabilize a quadcopter in flight and to ensure the optimal output of a quadcopter into the specified mode. PD controller changes the variations of the thrust of the four traction engine, screws, sign variations and times at which all of these changes should be applied. Stabilization quadcopter tested in flight for example automate simple aerobatics figure, – a horizontal figure eight –, as a right-hand and left-hand turns.

Key words: quadcopter, stabilization of flight, control.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
СТАБИЛИЗАЦИИ КВАДРОКОПТЕРА В ПОЛЁТЕ****Б. Благітко, Ю. Мочульський**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франка,
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина
blagitko@electronics.lnu.edu.ua, mochulsky@ukr.net*

Приведено результати досліджень математическої моделі квадрокоптера в польоті з урахуванням властивостей електродвигачів. Математическа модель представляє собою систему алгебро-дифференціальних рівнянь в формі Коши 12-го порядку. Вхідною інформацією слугує значення висоти польоту квадрокоптера, значення кутів тангажа, крена, рыскання і їх змінення во времени. Розглянуто спосіб пропорційно-дифференціального (ПД) управління для стабілізації квадрокоптера в польоті і оптимального виводу квадрокоптера на заданий режим. ПД-регулятор змінює величину приращення тягової сили чотирьох електродвигачів-вінчів, знак приращення і моменти времени, когда происходят эти изменения. Стабілізація квадрокоптера в польоті перевірена на прикладі автоматического виконання фігури простого пілотажа, – горизонтальної восьмерки – , як з правим, так і з левим поворотами.

Ключевые слова: квадрокоптер, стабілізація польоту, управління.

Стаття надійшла до редколегії 09.04.13

Прийнята до друку 25.04.13