

УДК 004.4+539.3:551.24.03

## ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТЕПЛОВОЇ МОДЕЛІ ІЗ КОНВЕКЦІЄЮ ВЕРХНЬОЇ МАНТІЇ ЗЕМЛІ

В. Фурман

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
79005 м. Львів, вул. Грушевського, 4  
fourman@franko.lviv.ua*

Описано залежність теплового стану мантії від можливих варіацій температури і побудовано теплову модель верхньої мантії Землі. Наголошено, що визначення мантійних температур за даними про спостережуваний тепловий потік містить фактор невизначеності, пов'язаний із труднощами з'ясування внеску кори за результатами інтерпретації спостережуваного теплового потоку. Виявлено зв'язок між інтенсивністю конвективних процесів теплоперенесення в верхній мантії і тепловим потоком у корі Землі.

*Ключові слова:* конвекція; верхня мантія; тепла модель; варіації температури.

Мантія поки що недоступна для безпосереднього вивчення, однак про неї вже накопичено значну інформацію, що ґрунтується на застосуванні різних непрямих методів дослідження. Вплив мантії на поверхню Землі досить різноманітний. Сучасні дані свідчать, що структура верхньої мантії континентів є визначальною для еволюції Землі. Раніше передбачали, що континенти – це пасивні утворення, які просто впливають за мантійними потоками, структура й еволюція яких не залежить явно від структури і властивостей континентальної літосфери. Зіставлення й ототожнення процесів, що відбуваються в середині Землі, і просто теплової машини, має певні обмеження. Інтенсивність підігріву в Землі значно перевершує природні можливості теплообміну всередині рідини завдяки теплопровідності, унаслідок чого виникають конвекційні потоки. У випадку з Землею, якби не було підігріву речовини зсередини, залишалося б розглядати теплообмінні процеси як процес вистигання планети зовні. У цьому разі конвекційні потоки могли б виникнути через нерівномірність вистигання поверхні Землі. Однак теплопередавання залежить від градієнта температур, і вистигання відбувається швидше там, де градієнт більший. Тобто локальний більший градієнт температур (що виникає незрозуміло як) у природних умовах повинен неодмінно знижуватися. Система, відповідно до законів термодинаміки, повинна прагнути до термодинамічної рівноваги. Отже, для виникнення і розбіжності градієнтів потрібні надійні джерела енергії. Тому їх потрібно шукати, і не тільки для конвекційних потоків; вони потрібні для горизонтального руху літосферних плит, фактично для руху континентів. Де джерела енергії для цих рухів?

**Теплоперенесення та конвективні процеси в мантії.** Із чим же пов'язані високі температури в глибині Землі? Дискусії на цю тему тривають протягом багатьох років. За

однією з найпоширеніших гіпотез, джерелом тепла в надрах планети слугують радіоактивні елементи в її ядрі, а головним теплоносієм – глибинні флюїди, особливо характерні для зовнішнього ядра. Зрозуміло, що проміне ще багато років, перш ніж будуть накопичені додаткові відомості й удосконалені теоретичні гіпотези, і ми зможемо одержати чіткіше уявлення про структуру і динамічні властивості мантії. Моделі конвекції запропоновані для пояснення того, як процеси, що відбуваються в мантії, можуть надавати рух шарам літосфери. Конвекція полягає в тому, що тепла речовина піднімається вгору, а холодна опускається вниз. Різні гіпотези щодо можливого механізму цього процесу [1–6] передбачають великі конвекційні контури, що охоплюють усю товщу мантії. Альтернативна схема ґрунтується на аргументах, що поглинання тепла під час фазових переходів може обмежувати область конвекції поверхневими шарами мантії. У ще іншій моделі конвективна область обмежена астеносферою, тобто шаром мантії, що простягається на глибині від 100 до 300 км. Водночас зони, де літосфера може “провалюватися” у мантію і, отже, брати участь у конвекції, охоплюють глибини до 700 км. Нарешті, є ще одна модель, у якій передбачено, що конвекційний механізм полягає в утворенні всередині мантії теплових “стовпів”. Згідно з цією моделлю, усі висхідні потоки сконцентровані приблизно в 20 таких стовпах з основою на межі між мантією і кожний з них має діаметр близько кількох сотень кілометрів. Зустрічний (спадний) потік складається з усієї речовини мантії, яка повільно знижується. Коли висхідний потік досягає літосфери, він розпливається у горизонтальному напрямі, утворює нагріті зони, що на поверхні мають вулканічну активність. Він також може піднімати літосферу, зумовлюючи рух її шарів. За будь-якого механізму конвекції вертикальне переміщення речовини в мантії призводить до змін розподілу температури всередині мантії. Отже, унаслідок конвекції в речовині мантії, що зазнає зміни тиску і температури, відбуваються фазові зміни, через що вона набуває стану рівноваги з навколишнім середовищем.

Головні теплові джерела в мантії Землі – це запас тепла, що залишився ще з часів раннього розплавленого стану, і тепло, що утворилося під час розпаду радіоактивних елементів. Середній вміст радіоактивних елементів у земній корі не перевищує тисячних часток грама на кілограм породи, однак генерований ними тепловий потік впливає на теплові властивості Землі загалом [2, 5].

Таблиця 1

Теплофізичні константи Землі

Показник	Константа
Повний тепловий потік $Q_{\oplus}$	$4,4 \cdot 10^{13}$ Вт
Питома масова ізобарна теплоємність $C_p$ , верхня мантія	1 250 Дж/кг·К
Питома масова ізобарна теплоємність $C_p$ , нижня мантія	1 260 Дж/кг·К
Теплопровідність $k_p$ , верхня мантія	5 Вт/м·К
Теплопровідність $k_p$ , нижня мантія	10 Вт/м·К

Про тепловий запас надр Землі можна судити з розподілу температур. Найнадійнішим вважають визначення температур, які ґрунтуються на температурах плавлення глибинних надр. Сучасна техніка ще не в змозі прямо змоделювати відповідні умови, екстраполюючи результати експериментів, виконаних з використанням ударних хвиль. Тому розбіжність моделей розподілу поля температур є в межах однієї–двох тисяч градусів. Серед цих моделей найбільшу температуру плавлення – 8 240 К у центрі Землі навів

О. Вільямсон та ін. [7, 8], а Р. Бухлер [9] визначив найменшу температуру – 5 150 К. Розрахункові значення температур плавлення беруть трохи нижчими з огляду на наявність легкого компонента, причому відхилення може становити від 500 до 1 000 К [2]. Водночас існують і досить відомі та зрозумілі сучасні значення теплофізичних величин. На тепловий стан Землі значно впливає тепловий потік  $Q_{\oplus}$  з її поверхні, який визначають досить упевнено [2]. Не менш важливий тепловий потік з ядра в мантію багато в чому визначений конвективними процесами, що відбуваються в ядрі та мантії Землі, інтенсивність яких, відповідно, впливає на магнітне поле, що генерується в ньому. Розходження в оцінці цього теплового потоку з ядра Землі є в межах  $(0,3-2,0) \cdot 10^{13}$  Вт, як зазначено ще в [4]. У працях [2, 10–13] побудовано самоузгоджені моделі теплового стану сферично-симетричної Землі, що спираються на моделі температур плавлення та залежності між безрозмірними термодинамічними і теплофізичними параметрами. Недоліком подібних праць є використання параметрів, мало пов'язаних з умовами в глибинних надрах Землі. У [14–18] змодельовано пряму задачу ефективного теплоперенесення, причому задано розподіл як радіоактивних джерел, так і ефективної теплопровідності. Сьогодні цей підхід розвинуто в працях, присвячених числовому моделюванню теплової конвекції в мантії Землі [19–24]. Однак у подібних працях сферично-симетричне теплоперенесення у мантії фактично задане споконвічно через фіксовані джерела тепла, температури і/або теплові потоки меж мантії. Наша мета – визначення цілком самоузгодженої довготермінової (на години до декількох сотень мільйонів років) моделі сферично-симетричного теплоперенесення в мантії на підставі [15]. Передбачуваний результат моделювання – фізична залежність теплоперенесення від малої кількості таких параметрів, які можна оцінювати й уточнювати незалежно. Основою моделі є значення температур фазового переходу між оболонками Землі і теплового потоку з її поверхні. У підсумку вірогідно оцінено зв'язок між інтенсивністю конвективних процесів теплоперенесення в мантії, значенням теплового потоку з ядра Землі і середнім вмістом радіоактивних джерел тепла в корі Землі.

**Моделі мантійної конвекції.** У праці [14] уперше з'ясовано, що тепла конвекція у верхній мантії під континентами придушена, і, відповідно, зменшений (утричі) тепловий потік, що виходить через континенти. Водночас океанічна літосфера не може сильно гальмувати винесення тепла з мантії, тому що океанічні літосферні плити беруть участь у конвективному колообігу речовини мантії. Автори [11–20] довели, що нерухомий континент спочатку пригнічує мантійну конвекцію під собою і розширює конвективну комірку, а потім, через декілька сотень мільйонів років, після прогрівання субконтинентальної мантії під континентом виникає гарячий висхідний мантійний потік. Оскільки континенти не фіксовані в просторі, а плавають по мантії, то їхній вплив на структуру мантійної конвекції виявляється ще сильнішим. У перших працях враховували тільки механічну взаємодію мантії з рухомими плитами у вигляді ефективної граничної умови. У місцях перебування плити замість умови вільної межі задавали горизонтальні швидкості [21–25]. У [22] наведено результати розрахунку числової двовимірної моделі мантійної конвекції з урахуванням механічної і теплової взаємодії з континентами, що плавають. У цьому разі для запобігання розтіканню в'язких континентів використано штучний прийом фіксації крайніх точок континентів. Дослідники [12, 14–16] побудували перші самоузгоджені тривимірні числові моделі мантійної конвекції з двома тривимірними твердими континентами, що вільно плавають, на підставі прямого розв'язування

взаємозалежної системи рівнянь теплової конвекції і рівнянь руху твердих континентів. Автори [15] на прикладі двовимірної моделі детально виклали математичне формулювання задачі та метод її розв'язування. Вони розглянули ближчу до реальної Землі модель конвекції з числом Релея  $R_a = 10^6$  на сітці  $200 \times 80$  з тонким континентом товщиною  $d = 90$  км і горизонтальним розміром  $l = 6$  тис. км. З порівняння еволюції нестационарної конвекції в мантії без континенту і з континентом у ті ж моменти часу бачимо, що рухомий континент кардинально змінює структуру мантійної конвекції. Сучасні досягнення в науках про Землю ґрунтуються на дослідженнях, де головним завданням є аналіз сейсмічних і гравітаційних даних про будову і динаміку глибинних структур, тому було б неправильним обійти результати інтерпретації даних про тепловий потік, що прямо пов'язаний з розподілом температур у корі та мантії. Незважаючи на прямий зв'язок, виявляється, що інтерпретація цих даних становить велику проблему. Під час опрацювання виміряних на поверхні значень теплового потоку необхідно визначити і відняти складову, зумовлену теплогенеруванням радіоактивних елементів кори. В областях давніх кратонів внесок цієї складової в повний тепловий потік становить близько 70 %, тоді як похибка її визначення велика. Оптимістичний прогноз похибки визначення різниці теплового (мантійного) потоку – близько 5–7 мвт/м<sup>2</sup>с [26], величина порівнянна зі спостережуваними значеннями. Крім того, техніка інтерпретації може значно відрізнятись, наприклад, поправку за зміни клімату враховують далеко не всі дослідники.

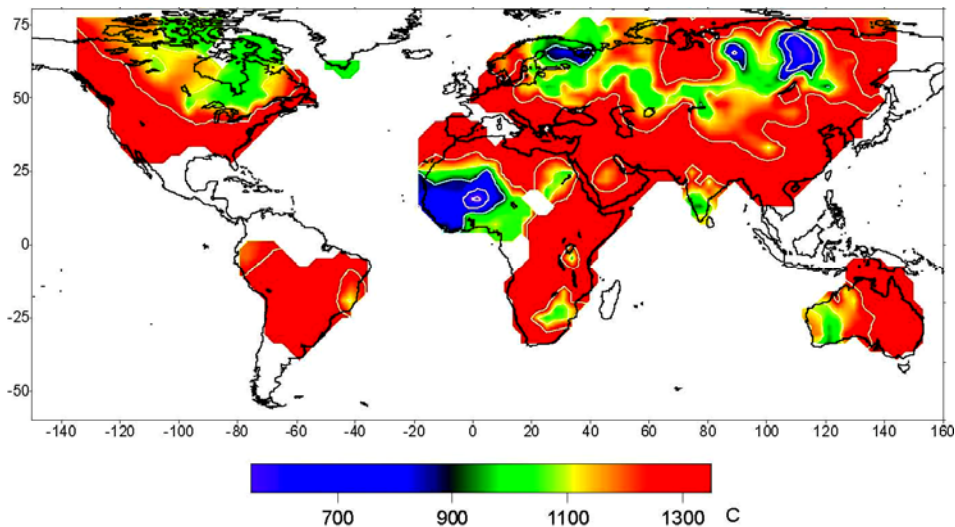


Рис. 1. Розподіл температури на глибині 150 км за результатами інтерпретації даних про тепловий потік, отриманий у [27].

Отже, результати, отримані різними дослідниками для різних структур, порівнювати прямо не можна; більшість дослідників дає близькі значення мантійного теплового потоку під кратонами. У праці [26] отримано значення мантійного потоку під Канадським – 10–15 мвт/м<sup>2</sup>с, що трохи менше від значення, обчисленого цими ж дослідниками для Південної Африки (17–18 мвт/м<sup>2</sup>с). Ця розбіжність відповідає різниці мантійних температур близько 100 °С, що узгоджується з сейсмічними, згідно з якими аномалія швидкості під Південною Африкою також менша. Автори узагальнили наявні дані про тепловий

потік і теплогенерування в корі та побудували серію карт (рис. 1), що відображають розподіл температури на різних глибинах під континентами [26, 27]. Ці розрахунки ґрунтуються на розв'язку стаціонарної теплової задачі і доповнені даними інших дослідників, отриманими для тектонічно активних районів континентів. На глибині 150 км температура під усіма кратонами знижена і становить 700–1 100 °С, причому найменше значення відповідає Східному Сибіру і Північно-Західній Африці. За межами кратонів температура практично однакова (~ 1 300 °С) і дорівнює адіабатичній температурі, яку повинна мати конвектувальна мантія.

Трохи пізніше запропоновано кілька моделей літосфери, що вистигає, які дають змогу пояснити цей феномен [28]. Серед них можна виділити дві головні моделі: плити, що вистигає, і півпростору [29]. З моделі плити, що вистигає, найбільше розроблена, зокрема, з урахуванням сферичності Землі, формула для розподілу температури  $T$  з глибиною  $h$  залежно від віку  $\tau$ :

$$T(h, \tau) = \frac{T_0}{\left(1 - \frac{h}{R_{\oplus}}\right)} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi h}{L_{\max}}\right)}{n} \exp\left[-\left(\frac{n\pi h}{L_{\max}}\right)^2 \tau\right] - \left(1 - \frac{R_{\oplus}}{L_{\max}}\right) \frac{h}{R_{\oplus}} \right\},$$

де  $T_0 = 1\,300$  °С – температура конвективної мантії в основі океанічної літосферної плити;  $R_{\oplus}$  – радіус Землі,  $L_{\max} = 120\text{--}130$  км – максимальна потужність літосферної плити;  $k$ , – коефіцієнт теплопровідності. Розподіл густини з глибиною можна визначити за коефіцієнтом теплового розширення

$$\rho(h) = \rho_0 [1 - \alpha T(h, \tau)],$$

де  $\rho_0 = 3\,350$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 3,3 \cdot 10^{-5}$ /К. Для континентальних районів, як і в початковій стандартній моделі, вважали, що розподіл густини відповідає старому океанові (180 млн років). Донедавна всі глобальні конвективні моделі розраховували на підставі припущення, що мантійні неоднорідності густини зумовлені винятково варіаціями поля температури. Однак, мабуть, це припущення не працює для верхньої мантії континентів. Сейсмічні й теплові дані засвідчують, що температура верхньої мантії під давніми кратонами різко знижена, принаймні на 400–600 °С, порівняно з молодшими континентальними й океанічними структурами [27]. Отже, якщо не брати до уваги інші чинники, то густина мантії під ними повинна бути підвищена, тобто має бути сила, що дестабілізує ці утворення, унаслідок чого континентальна частина верхньої мантії матиме тенденцію до занурення, а це різко обмежить час існування таких структур. Наприклад, розрахунки В. Трубіцина засвідчують, що, навіть беручи до уваги підвищену в'язкість, час існування кратонів не повинен перевищувати мільярда років [30, 31], тоді як реальний час існування цих структур принаймні у кілька разів більший. Щоб узгодити цю суперечність, Т. Джордан [32] запропонував гіпотезу, відповідно до якої збільшення густини, зумовлене зниженням температури, скомпенсоване під кратонами завдяки змінам хімічного складу, що спричинені виплавленням з первинної мантійної речовини деяких компонентів на формування кори. У підсумку корені континентів зберігають нейтральну плавучість щодо навколишньої мантії, і час їхнього існування різко збільшується, тому що визначений тільки підвищеною (низькотемпературною) в'язкістю континентальної літосфери.

Правильність гіпотези Т. Джордана підтверджена експериментальними даними, отриманими на підставі аналізу зразків перидотитів з різних кратонів, згідно з якими густина мантійної речовини під ними може бути знижена (за однакових  $T$ - $P$ -умов) на 1,5–2,5 % щодо верхньої мантії молодих континентальних або океанічних структур [33–35]. Проте ступінь цієї компенсації дотепер не визначений, також не з'ясовано, до яких глибин можуть поширюватися теплові й хімічні аномалії під континентами. Звичайно вважають, що верхня мантія давньої континентальної літосфери 'суха', тому що вода вилучена з первинної мантійної речовини під час виплавлення кори.

**Мантійна теплова конвекція.** Теплову конвекцію в'язкої мантії описують розподілом вектора конвективних швидкостей  $V_i(x, y, z)$ , розподілом температури  $T(x, y, z)$  і тиску  $p(x, y, z)$  [30, 31, 36]. У наближенні Бусінеска ці невідомі функції знаходять, розв'язуючи систему трьох рівнянь: рівняння перенесення імпульсу, рівнянь перенесення тепла і маси:

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{i3}; \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k \partial T}{\partial x_i} \right) + Q; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (V_i \rho)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

де  $\rho$  – густина мантії;  $g_i$  – прискорення вільного падіння;  $T$  – температура, яку відлічують від адіабатичного розподілу;  $k$  – коефіцієнт теплопровідності;  $Q$  – термометрична густина теплових джерел;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера (дорівнює 1, якщо  $i = j$ , і 0, якщо  $i \neq j$ );  $S_{ij}$  – девіаторний тензор в'язких напружень;

$$S_{ij} = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

де  $\mu$  – кінематична в'язкість. Відносне значення інерційних членів у лівій частині рівняння перенесення імпульсу в'язкої рідини (2) порівняно з членами у правих частинах рівнянь має порядок  $k\rho/\mu \approx 10^{-23}$ . Тому цими інерційними членами можна знехтувати. У наближенні Бусінеска прийемо  $\rho = \rho_0(1 - \alpha T)$  в останньому члені плавучості рівняння (1) і  $\rho = \rho_0$  у всіх інших членах рівнянь (1)–(3). Відлічуватимемо тиск від його гідростатичного розподілу  $p_0(z)$ , який визначають з умови  $\Delta p_0 = \rho_0 \gamma$ . Уведемо безрозмірні змінні, приймаючи за одиницю вимірювання для довжини товщину мантії  $D$ , для швидкості –  $D/k$ , для часу –  $D^2/k$ , для температури –  $T_0$ , для в'язкості –  $\mu$ , для тиску і напружень –  $\mu_0 k/D^2$ , для густини теплових джерел –  $kT_0/D^2$ . У цих змінних рівняння конвекції (1)–(3) набудуть вигляду

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + R_a T \delta_{i3} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

де  $R_a$  – число Релея,

$$R_a = \frac{\alpha \rho_0 g T_0 D^3}{k \mu_0}. \quad (8)$$

Рівняння для розподілу температури  $T_c$  усередині твердого континенту в початковій нерухомій системі координат зводиться до рівняння теплопровідності з адвективним перенесенням тепла зі швидкостями, що задовольняють співвідношення

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T_c = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T_c}{\partial x_i} \right) + Q_c, \quad (9)$$

де  $Q_c$  – густина теплових джерел усередині континенту. Рівняння мантійної конвекції (1)–(3) і рівняння для руху континенту та перенесення тепла в ньому (9) пов'язані між собою через граничні умови. Як уже зазначено, для мантійних плинів на нижній і бічній межах розрахункової області приймаємо умову непротікання і прослизання (дорівнює нулю нормальна складова швидкості рідини і дорівнюють нулю тангенціальні складові в'язких сил):

$$V_k n_k = 0, S_{ki} \tau_i = 0, i = 1, 2, \quad (10)$$

де  $n_k$  – одиничний вектор, нормальний до заданої поверхні;  $\tau_i$  – одиничні вектори, дотичні до неї. На межі твердих рухомих континентів приймаємо умову непротікання і прилипання, тобто рівність швидкостей рідкої мантії і швидкостей континенту на всій поверхні зануреної в мантію частини континенту:

$$V_i = u_i. \quad (11)$$

Температура на нижній межі області фіксована:  $T = 1$ . На бічних межах приймаємо умову нульового теплового потоку

$$\frac{\partial T}{\partial n_k} = 0, \quad (12)$$

де  $n_k$  – одиничний вектор, нормальний до поверхні області. На верхній поверхні температура мантії дорівнює нулю ( $T = 0$ ) тільки в океанічній області поза континентом. На поверхні зануреного в мантію континенту приймаємо умову безперервності температури і теплового потоку між мантією і континентом:

$$T = T_c, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial T_c}{\partial \mathbf{n}}. \quad (13)$$

На верхній поверхні континенту температуру вважаємо такою, що дорівнює нулю:

$$T_c = 0. \quad (14)$$

Отже, математична проблема зводиться до такого. Маємо три невідомі функції координат і часу для мантійної конвекції: вектор швидкостей мантійних плинів  $V_i(x, y, z, t)$ , розподіл температури  $T(x, y, z, t)$  і розподіл тиску  $p(x, y, z, t)$ , а також чотири невідомі функції часу для руху континентів як цілих: два компоненти миттєвої швидкості поступального руху центра ваги  $u_0(t)$  і  $v_0(t)$ , один компонент миттєвої кутової швидкості обертання континенту навколо центра ваги  $\omega(t)$  і розподіл температури в континенті  $T_c(x, y, z, t)$ . Для їхнього розрахунку є система взаємозалежних рівнянь: три диференціальні рівняння конвекції (1)–(3), три інтегральні співвідношення (5)–(7), до яких звелися

рівняння Ейлера, і рівняння перенесення тепла в континенті (9). Знаючи в заданий момент положення і швидкості континенту  $u_0(t)$ ,  $v_0(t)$  і  $\omega(t)$ , можна знайти його положення в наступний момент часу  $\tau$ . Для визначення сталих інтегрування диференціальних рівнянь слугують граничні умови (10)–(14). Знайдені в такий спосіб розподіли температури  $T(x, y, z, t)$  з розв'язків наведених вище рівнянь дають нам змогу відшукати зв'язок між процесами мантійної теплової конвекції та тепловим потоком з верхньої мантії Землі, якщо дотримуватися міркувань наближення сферично-симетричного теплоперенесення мантії Землі [6].

Таблиця 2

Значення температур фазових переходів на межах шарів

Межа	Радіус, км	Температура, °С	Середня густина $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Теплоємність $c_p$ , Дж/кг С
Поверхня Землі	6371	0	3 165,22	1 250
Зона плавлення вулканічних лав	6271	1 160–1 240	3 385,42	1 250
Перша зона фазового переходу	5971	1 600	3 841,85	1 250
Друга зона фазового переходу	5 771	1 900	4 861,23	1 260
Ядро-мантія	3 480	3 000–5 000		

**Модель теплоперенесення в мантії Землі.** У найпростішому випадку, використовуючи ефективну теплопровідність [37, 38], Землю можна уявити у вигляді сферичних шарів, що мають сталі теплофізичні властивості. Тоді задача про охолодження Землі для сферичного шару зі сталими значеннями питомої масової теплоємності  $c_p$ , теплопровідності  $k_i$  і середнім для шару значенням густини  $\rho$  зводиться до розв'язування такого рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(r, \tau) = a \nabla^2 T(r, \tau) + \frac{q_v(r, \tau)}{c_p \rho}, \quad (15)$$

де  $a = k_i / c_p \rho$  – температуропровідність;  $T$  – температура;  $q_v(r, \tau)$  – функція об'ємної потужності внутрішніх джерел тепла;  $r$  – радіальна координата;  $\tau$  – час. Як граничні умови на зовнішній межі шару  $R$  на підставі відомих даних задамо змінні в часі температуру і тепловий потік. У підсумку відповідні граничні умови набудуть такого вигляду:

$$T(R_0, \tau) = \varphi(\tau),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} T(r, \tau) \right|_{r=R_0} = -\frac{\psi(\tau)}{4\pi R_0^2}, \quad (16)$$

Умова (16) відповідає завданню для теплового потоку:

$$Q(R_0) = -4\pi R_0^2 \left. \frac{\partial}{\partial r} T(r, \tau) \right|_{r=R_0} = \psi(\tau). \quad (17)$$

Початкові умови, при  $\tau = 0$ ,  $T(r, \tau)$  приймаємо як функцію, залежну тільки від  $r$ :  $T(r, 0) \Rightarrow f(r)$ . Для одержання аналітичного розв'язку задачі запишемо всі функції (температури і теплового джерела) у рівнянні (15) як розвинення в ряд Тейлора за часом:

$$T(r, \tau) = T_0(r) + T_1(r) \cdot \tau + T_2(r) \cdot \tau^2 + \dots + T_n(r) \cdot \tau^n + \dots; \quad (18)$$



$$q_v(r, \tau) = q_{v0}(r) + q_{v1}(r) \cdot \tau + q_{v2}(r) \cdot \tau^2 + \dots + q_{vn}(r) \cdot \tau^n + \dots \quad (19)$$

Скористаємось лінійним наближенням і розглядатимемо тільки нульовий і перший члени розвинення (19):

$$\begin{aligned} T(r, \tau) &= T_0(r) + T_1(r) \cdot \tau; \\ q_v(r, \tau) &= q_{v0}(r) + q_{v1}(r) \cdot \tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Таке наближення для часу близько 100 млн років привносить у розв'язок досить малу похибку близько кількох відсотків, тому що характерний час теплоперенесення – близько 10 млрд років [39]. Така похибка цілком допустима, тому що теплофізичні характеристики порід, які формують надра Землі, відомі зі ще значно більшою похибкою. Також прийнятне і те, що розподіл радіоактивних елементів може не змінюватися з часом, а змінюється тільки потужність тепловиділення:

$$q_v(r, \tau) = q(r)(q_0 - q_1 r), \quad (21)$$

де  $q_0$  – відносна густина розподілу внутрішніх джерел. Підставимо (20) і (21) у рівняння (15), одержимо таке співвідношення:

$$c_p \rho T_1(r) = k \nabla^2 T_0(r) + k \nabla^2 T_1(r) \cdot \tau + q(r)(q_0 - q_1 r). \quad (22)$$

Тоді, прирівнявши члени при однакових ступенях  $\tau$ , перепишемо (22) як систему рівнянь

$$\begin{cases} k \nabla^2 T_0(r) = c_p \rho T_1(r) - q_0 q(r); \\ k \nabla^2 T_1(r) = q_1 q(r). \end{cases} \quad (23)$$

Граничні ж умови в цьому випадку необхідно змінити так:

$$\begin{aligned} T_0(R_0) &= \varphi_0; \quad \left( \frac{\partial T_0(r)}{\partial r} \right)_{r=R_0} = - \frac{\Psi_0}{4\pi R_0^2}; \\ T_1(R_0) &= \varphi_1; \quad \left( \frac{\partial T_1(r)}{\partial r} \right)_{r=R_0} = - \frac{\Psi_1}{4\pi R_0^2}; \end{aligned} \quad (24)$$

У такому разі система рівнянь (23) з граничними умовами (24) допускає вже не наближений, а точний аналітичний розв'язок

$$Q_1(r) = 4\pi \int_{R_0}^1 \xi^2 q_{v1} \rho_v(\xi) \partial \xi + \Psi_1, \quad (25)$$

$$T_{\{0,1\}}(r) = - \frac{1}{4\pi k} \int_{R_0}^r \frac{1}{\eta^2} Q_{\{0,1\}}(\eta) \partial \eta + \varphi_{\{0,1\}} = \quad (26)$$

$$- \frac{1}{k} \int_{R_0}^r \frac{1}{\eta^2} \int_{R_0}^{\eta} \xi^2 q_{v1} \rho_v(\xi) \partial \xi \partial \eta + \frac{\Psi_{\{0,1\}}}{4\pi k} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} \right) + \varphi_{\{0,1\}},$$

$$Q_0(r) = 4\pi \int_{R_0}^r \xi^2 (q_{v1} \rho_v(\xi) - c_p \rho T_1(\xi)) \partial \xi + \Psi_0, \quad (27)$$

Якщо підставити в (24)–(27) функцію розподілу джерел тепла й ефективні коефіцієнти теплоперенесення, можна прямо одержати шукані розподіли температури і теплового

поток. Однак якщо цілком припустимо вважати, що радіоактивні джерела розташовані винятково у верхніх шарах земної кори, то щодо значення ефективної теплопровідності можна зробити лише дуже грубі оцінки, що в цьому випадку не прийнятне. Подолати ці труднощі можна, якщо з достатньою точністю знати температури фазових переходів [1] на межах поділу шарів, що формують оболонки Землі (див. табл. 2).

Урахування цих надлишкових даних дає змогу сформулювати зворотну задачу теплопровідності, у якій невідомими будуть значення ефективної теплопровідності в кожному зі структурних шарів Землі [6]. Для дослідження розподілу теплового потоку в мантії розділимо її на  $N - 1$  сферичних шарів з різними фазовими станами (рис. 2). Закони збереження потребують безперервності температури і теплового потоку, тобто для членів розкладання в ряд (20) на межі між двома сусідніми шарами  $n - 1$  і  $n$

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)}(R_r^{(n)}) &= Q_1^{(n-1)}(R_r^{(n)}), T_1^{(n)}(R_r^{(n)}) = T_1^{(n-1)}(R_r^{(n)}), \\ Q_0^{(n)}(R_r^{(n)}) &= Q_0^{(n-1)}(R_r^{(n)}), T_0^{(n)}(R_r^{(n)}) = T_r^{(n)}, \\ T_0^{(n)}(R_r^{(n+1)}) &= T_r^{(n+1)}, \end{aligned} \tag{26}$$

де  $T_0^n$  –  $n$ -не значення температури фазового переходу;  $R_n$  –  $n$ -й радіус поділу на сферичні оболонки. На зовнішній межі для верхнього шару задамо значення загального теплового потоку  $Q_{\oplus}$  і знехтуємо зміною температури в часі (різкий фазовий перехід між оболонками тверда земна кора–атмосфера)

$$Q_0^1(R_r^1) = Q_{\oplus}, T_1^1(R_r^1) = 0. \tag{27}$$

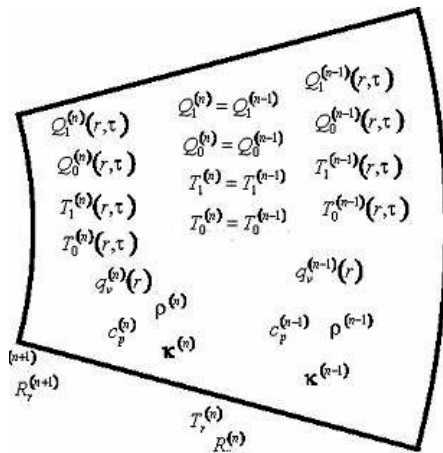


Рис. 2. Схема поділу мантії на сферичні шари.

Аналогічно для найнижчого шару

$$T_1^{N-1}(R_r^N) = 0, T_0^{N-1}(R_r^N) = T_r^N. \tag{28}$$

Остаточно одержимо трансцендентну систему з  $5N$  рівнянь, складених з (26)–(28) відповідно до (22)–(25). Невідомі тут стали інтегрування  $\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n$ , ефективні теплопровідності  $k^n$  для  $n > 1$  і середнє значення функції розподілу радіоактивних джерел тепла  $\rho_V(r) = \rho_V^n = \text{const}$ .

Для моделювання процесів мантійної теплової конвекції та її взаємодії з тепловим потоком з верхньої мантії Землі у наближенні сферично-іметричного теплоперенесення мантії Землі як розв'язку систем нелінійних рівнянь (15)–(17), автори [6] розробили програму, за допомогою якої отримано фізично значимі для Землі результати, відображені на рис. 3.

Аналогічно до [2], область від межі ядро–мантія до поверхні розділяли на чотири сферичні шари. Для визначення середніх значень густини шарів використовували модель будови Землі **PREM** (Preliminary Reference Earth Model) [40]. Температури фазових переходів (див. табл. 2)?? та дані про тепловий потік з поверхні Землі  $Q_{\oplus}$  узяті з [1].

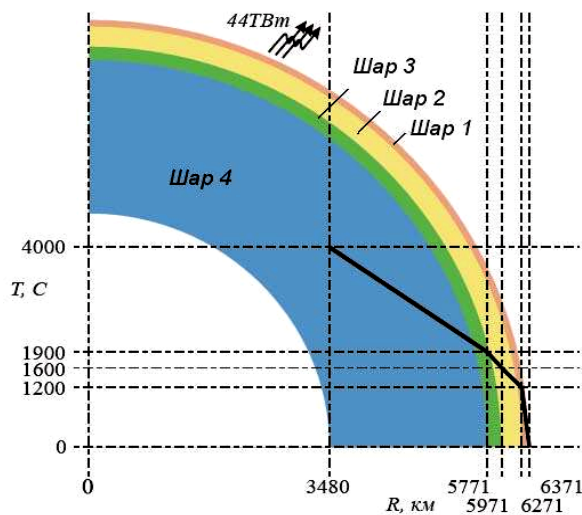


Рис. 3. Модель теплоперенесення у верхній мантії Землі в наближенні чотирьох шарів. (Сталі радіоактивні значення для (7) з [1] такі:  $Q_{\oplus} = 44 \cdot 10^{12}$  Вт = 44ТВт;  
 $q_0 = 4,722375 \cdot 10^{-9}$  ;  
 $q_1 = -2,680118 \cdot 10^{-26}$  )

Отже, метод побудови простої самоузгодженої теплової моделі мантії Землі та її конвекції є незалежним від інших методом визначення розподілу температури і теплового потоку у верхній мантії Землі. Дослідження структури розподілу густини мантії має вирішальне значення для розуміння еволюції Землі, тому що саме диференціація густини в мантії, пов'язана з варіаціями як температури, так і хімічного складу, є рушійною силою мантійної конвекції. І все-таки всі наявні інформаційні дані, які ми наразі можемо мати, недостатні для повного розуміння природи термодинамічних та конвективних процесів, що відбуваються в мантії, хоча вони є ключовими положеннями до пояснення багатьох геофізичних і геологічних явищ. Виконаний аналіз можливостей побудови простої самоузгодженої теплової моделі мантії Землі та її конвекції, що ґрунтується тільки на вірогідно відомих даних, свідчить про залежність теплового стану мантії від можливих варіацій температури на межі ядро–мантія. Результати цієї праці дають змогу отримати функціональні залежності для розподілів температури і теплового потоку в надрах Землі, обчислити їх, а також спроектувати еволюцію залежно від температур фазових переходів, концентрацій радіоактивних джерел і характеристик теплопровідності верхньої твердої частини мантії і кори Землі.

1. *Takesi Yukutake*. The inner core and the surface heat flow as clues to estimating the initial temperature of the Earth's core / Takesi Yukutake // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2000. – Vol. 121. – P. 103–137.
2. *Trubitsyn V.P.* Principles of the tectonics of floating continents / V.P. Trubitsyn // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth.* – 2000. – Vol. 36. – P. 708–741.
3. *Trubitsyn V.P.* A 3-D spherical model of mantle convection with floating continents / V.P. Trubitsyn, V.V. Rykov // U.S. Geological Survey, Open File Report. – 2000. – Vol. 00-218. – P. 2–44.
4. *Van der Lee S.* Upper mantle S-velocity structure of North America / S. Van der Lee, G. Nolet // *J. Geophys. Res.* – 1997. – Vol. 102. – P. 22815–22838.
5. *Van Schmus W.R.* Natural radioactivity of the crust and mantle / W.R. Van Schmus // *Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants. AGU Reference Shelf 1. Am. Geophys.* – 1995. – P. 283–291.
6. *Степанов А.А.* Сферически-симметричный теплоперенос в мантии / А.А. Степанов, С.В. Старченко // Исследовано в России : электрон. науч. журн. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/169.pdf>
7. *Williams Q.* The high-pressure melting curve of iron: a technical discussion / Q. Williams, E. Knittle, R. Jeanloz // *J. Geophys. Res.* – 1991. – Vol. 96. – P. 2171–2184.
8. *Anderson O.L.* Experimental melting curve of iron revisited / O.L. Anderson, A. Duba // *J. Geophys. Res.* – 1997. – Vol. 102. – P. 22659–22669.
9. *Bouhler R.* Temperature in the Earth's core from melting point Measurements of iron at high static pressures / R. Bouhler // *Nature.* – 1993. – Vol. 363. – P. 534–536.
10. *Stein C.* The effect of rheological parameters on plate behaviour in a self-consistent model of mantle convection / C. Stein, J. Schmalzl, U. Hansen // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2004. – Vol. 142. – P. 225–255.
11. *Walzer U.* The effects of a variation of the radial viscosity profile on mantle evolution / U. Walzer, R. Hendel, J. Baumgardner // *Tectonophysics.* – 2004. – Vol. 384. – P. 55–90.
12. *Roberts P.H.* Geodynamo theory and simulations / P.H. Roberts, G.A. Gladzmaier // *Review of Modern Physics.* – 2000. – Vol. 72, N 4. – P. 1081–1123.
13. *Старченко С.В.* Источники и потоки тепла в мантии Земли / С.В. Старченко, А. А. Степанов // Докл. АН. – 2002. – Т. 384, № 3. – С. 391–394.
14. *Трубицын В.Р.* Тепловая конвекция в мантии, вызванная горизонтальным и вертикальным градиентом температуры / В.Р. Трубицын, А.М. Бобров, В.В. Кубышкин // *Физика Земли.* – 1991. – № 5. – С. 12–23.
15. *Трубицын В.П.* Тепловая конвекция в мантии с переменной вязкостью и континентальной плитой конечных размеров / В.П. Трубицын, Ю.Ф. Белавина, В.В. Рыков // *Физика Земли.* – 1994. – N 7/8. – С. 5–17.
16. *Parmentier E.M.* Turbulent 3-D thermal convection in an infinite Prandtl number, volumetrically heated fluid; Implication for mantle dynamics / E.M. Parmentier, C. Sotin, B.J. Travis // *Geophys. J. Int.* – 1994. – Vol. 116. – P. 241–254.
17. *Sotin C.* Three-dimensional thermal convection in an iso-viscous, infinite Prandtl number fluid heated from within and from below: applications to the transfer of heat through planetary mantles / C. Sotin, S. Labrosse // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 1999. – N 112. – P. 171–190.
18. *Летников Ф.* К проблеме источника внутреннего тепла Земли / Ф. Летников // Докл. АН. – 2001. – Т. 378, № 3. – С. 387–389.

19. *Loddoch A.* Temporal variations in the convective style of planetary mantles / A. Loddoch [et al.] // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2006. – Vol. 251. – P. 79–89.
20. *Allen K. McNamara.* The influence of thermochemical convection on the fixity of mantle plumes / Allen K. McNamara, Shijie Zhong // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2004. – Vol. 222. – P. 485–500.
21. *Zhong S.* Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection / S. Zhong, M.T. Zuber, L. Moresi, M. Gurnis // *J. Geophys. Res.* – 2000. – Vol. 105. – P. 11063–11082.
22. *Hansen U.* Extended-Boussinesq thermal – chemical convection with moving heat sources and variable viscosity / U. Hansen, D.A. Yuen // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2000. – Vol. 176. – P. 401–411.
23. *Montague N.L.* Numerical models of adense layer at the base of the mantle and implications for the geodynamics at DU / N.L. Montague, L.H. Kellogg // *J. Geophys. Res.* – 2000. – Vol. 105. – P. 11101–11114.
24. *Davaille A.* How to anchor hotspots in a convecting mantle? / A. Davaille, F. Girard, M. Le Bars // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2002. – Vol. 203. – P. 621–634.
25. *Wen L.* Seismic evidence for a thermo-chemical boundary at the base of the Earth's mantle / L. Wen, P. Silver, D. James, R. Kuehnell // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2001. – Vol. 189. – P. 141–153.
26. *Кабан.* Структура верхней мантии континентов по сейсмическим и гравитационным данным // *Вестник отделения наук о Земле : электрон. информ. журн.* – 2002. – № 1. – С. 20–41. [http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h\\_dgggms/1-2002/scpub-11.htm#begin](http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h_dgggms/1-2002/scpub-11.htm#begin)
27. *Artemieva I.M.* Thermal thickness and evolution of Precambrian lithosphere: A global study / I.M. Artemieva, W.D. Mooney // *J. Geophys. Res.* – 2001. – Vol. 106. – P. 16387–16414.
28. *Cazenave A.* Global Relationship between oceanic geoid and topography / A. Cazenave, K. Dominh, C.J. Allegre, J.G. Marsh // *J. Geophys. Res.* – 1986. – Vol. 91. – P. 11439–11450.
29. *Hager B.H.* Global isostatic geoid anomalies for plate and boundary layer models of the lithosphere / B.H. Hager // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 1983. – Vol. 63. – P. 97–109.
30. *Trubitsyn V.P.* Principles of the tectonics of floating continents / V.P. Trubitsyn // *Izvestiya. Phys. of the Solid Earth.* – 2000. – Vol. 36. – P. 708–741.
31. *Abbott D.H.* Extraterrestrial influences on mantle plume activity / D.H. Abbott, A.E. Isley // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2002. – Vol. 205. – P. 53–62.
32. *Jordan T.H.* Composition and development of the continental tectosphere / T.H. Jordan // *Nature.* – 1978. – Vol. 274. – P. 544–548.
33. *Poudjom Djomani Y.H.* The density structure of subcontinental lithosphere through time / Y.H. Poudjom Djomani, S.Y. O'Reilly, W.L. Griffin, P. Morgan // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2001. – Vol. 184. – P. 605–621.
34. *Ritsema J.* New seismic model of the upper mantle beneath Africa / J. Ritsema, H. van Heijst // *Geology.* – 2000. – Vol. 28. – P. 63–66.
35. *Röhm, A.H.E., Snieder, R., Goes, S. and Trampert, J., 2000.* Thermal structure of continental upper mantle inferred from S-wave velocity and surface heat flow / A.H.E. Röhm, R. Snieder, S. Goes, J. Trampert // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2000. – Vol. 181. – P. 395–407.
36. *Фурман В.В.* Особливості моделювання геодинамічних процесів та термодинамічні характеристики глибинних структур / В.В. Фурман, О.М. Павлюк // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. геол.* – 2004. – Вип. 18. – С. 112–136.

37. *Parmentier E.M.* Turbulent 3-D thermal convection in an infinite Prandtl number, volumetrically heated fluid; Implication for mantle dynamics / E.M. Parmentier, C. Sotin, B.J. Travis // *Geophys. J. Int.* – 1994. – Vol. 116. – P. 241–254.
38. *Sleep N.H.* Mantle plumes from top to bottom / N.H. Sleep // *Earth-Science Reviews.* – 2006. – Vol. 77. – P. 231–271.
39. *Стэйси Ф.* Физика Земли / пер. с англ. / Ф. Стэйси. – М. : Мир, 1972. – 344 с.
40. *Dziewonski A.M.* Preliminary Reference Earth Model / A.M. Dziewonski, D.L. Anderson // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 1981. – Vol. 25. – P. 297–356.

### FEATURES OF CONSTRUCTION OF THERMAL MODEL FROM BY CONVECTION OF THE UPPER EARTH'S MANTLE

V. Fourman

*Ivan Franko National University of L'viv  
Hrushevskogo Str., 4, UA-79005 Lviv, Ukraine  
fourman@franko.lviv.ua*

The correlation mantle thermo state from possible temperature variations are showed and Earth's upper mantle them model is constructed. The obtaining mantle's temperature from observer about the thermal flooding including factor uncertainty, which connected with complexity determination crust's component from the results of interpretation of the observer thermal flooding. It should be noted about correlation between thermal process convection into upper mantle and value of thermal flooding in the Earth' crust.

*Key words:* convection; upper mantle; thermo model; temperature variations.

### ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ МОДЕЛИ С КОНВЕКЦИЕЙ ВЕРХНЕЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ

В. Фурман

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Грушевского, 4, 79005, Львов, Украина.  
fourman@franko.lviv.ua*

Описано зависимость теплового состояния мантии от возможных вариаций температуры и построено тепловую модель верхней мантии Земли. Отмечено, что определения мантийных температур по данным о наблюдаемом тепловом потоке содержит фактор неопределенности, связанный с трудностью выяснения вклада коры по результатам интерпретации наблюдаемого теплового потока. Выявлено связь между интенсивностью конвективных процессов теплопереноса в верхней мантии и тепловым потоком в коре Земли.

*Ключевые слова:* конвекция; верхняя мантия; тепловая модель; вариации температуры.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2012

Прийнята до друку 29.05.2013