ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2013. Випуск 3. С. 232–236
Electronics and information technologies. 2013. Issue 3. P. 232–236

УДК 519.62

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ І ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

В. Бригілевич, С. Вельгош, В. Григоренко, Я. Шмигельський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
shmygelsky@electronics.lnu.edu.ua

Виділено клас консервативних динамічних систем, для яких при чисельному моделюванні методом середньої точки зберігається властивість консервативності.

Ключові слова: динамічна система, консервативність, чисельні методи.

Аналітичні розв'язки динамічних систем часто володіють деякими специфічними властивостями якісного характеру, до яких, зокрема, відносяться і закони збереження певних величин. Звичайно хотілося б, щоб і розв'язки отримані за допомогою чисельних методів володіли тими ж властивостями. Але в більшості випадків це не так. Стандартні чисельні методи дозволяють лише апроксимувати відповідну поведінку аналітичного розв'язку.

Розглянемо математичну модель автономної динамічної системи у вигляді звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Говорять, що розв'язок $\boldsymbol{x}(t)$ системи (1) задовольняє лінійному закону збереження, якщо існує постійний вектор-стовбець $\boldsymbol{c}$ такий, що

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_0 = const. \tag{2}$$

Якщо для системи (1) виконується умова $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$, то її розв'язок $\boldsymbol{x}(t)$ задовольняє (2). Дійсно:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t)\right) = \boldsymbol{c}^T \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3}$$

Лінійними законами збереження є закон збереження маси, закон збереження заряду тощо. В [1] показано, що усі стандартні чисельні методи розв'язання ЗДР з точністю до похибок заокруглення зберігають для системи (1) властивість, що виражається у вигляді будь-якого лінійного закону збереження. Зовсім інша ситуація з нелінійними законами збереження, наприклад із законом збереження енергії для консервативної системи (1). Стандартні чисельні методи не зберігають властивість консервативності. Тому на достатньо великих інтервалах інтегрування поведінка чисельного розв'язку може набути таких властивостей, які зовсім не відповідають якісній поведінці системи (1). На практиці для стандартних чисельних методів виконання нелінійних законів збереження намагаються забезпечити, задаючи підвищену точність розрахунку. Але це приводить до значних обчислювальних затрат і при цьому дає ефект на відносно невеликих інтервалах інтегрування. Альтернативою може бути використання спеціальних чисельних методів, що зберігають для системи (1) енергію, момент кількості руху тощо [2]. Їх недолік полягає в тому, що обчислювальну процедуру доводиться будувати заново для кожної нової задачі.

В загальному випадку для системи (1) закони збереження визначають перші інтеграли. Неперервно диференційована функція $V: D \to \mathbb{R},\ (D \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ називається першим інтегралом системи (1) в області $D \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, якщо $V(\boldsymbol{x}(t))$ є постійною на будь-якому розв'язку $\boldsymbol{x}(t)$. Функція $V(\boldsymbol{x})$ є першим інтегралом для системи (1) тоді і тільки тоді, коли її похідна за напрямом векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) = \left(\mathrm{grad}V(\boldsymbol{x})\right)^T \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4}$$

для всіх $\boldsymbol{x} \in D$ [3,4]. Якщо $D = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, тобто система (1) має перший інтеграл (нетривіальний) у всьому просторі $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, то вона називається консервативною [4].

Метод чисельного інтегрування системи (1) породжує послідовність $\{\boldsymbol{x}_m\}$, $m = 0,1,2,...$, яка є наближеним розв'язком системи (1) на часовій сітці

$$\omega: \ \{t_{m+1} = t_m + h_{m+1},\ h_{m+1} > 0,\ m = 0,1,2,...\}.$$

Метод чисельного інтегрування називають консервативним (по відношенню до першого інтеграла $V(\boldsymbol{x})$), якщо для усіх елементів послідовності $\{\boldsymbol{x}_m\}$

$$\Delta V = V(\boldsymbol{x}_{m+1}) - V(\boldsymbol{x}_m) = 0,\ m = 0,1,2,... \tag{5}$$

Надалі для моделювання системи (1) розглядатимемо метод середньої точки:

$$\boldsymbol{x}_{m+1} = x_m + h_{m+1}\boldsymbol{F}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{m+1} + \boldsymbol{x}_m}{2}\right). \tag{6}$$

Нехай функція $V(\boldsymbol{x})$ така, що нею можна нормувати простір $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ таким чином:

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = V(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Має місце наступний результат.

Теорема 1 [5].

Якщо в $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ можна ввести скалярний добуток $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, що породжує задану норму $\|\boldsymbol{x}\|$, тобто

$$V(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle ,$$

то метод середньої точки (6) є консервативним по відношенню до $V(\boldsymbol{x})$ для всіх $h_{m+1} > 0$.

Для того,щоб застосувати результати теореми 1 на практиці потрібно за заданим першим інтегралом (нормою) $V(\boldsymbol{x})$ спробувати побудувати в $\mathbb{R}^n$ скалярний добуток $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, що породжує норму (7). Відомо [6], що це можливо в тому і тільки в тому випадку, коли для заданої норми справджується тотожність паралелограма

$$V(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = 2\big(V(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{y})\big),$$

причому шуканим скалярним добутком буде

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{4}\big(V(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big).$$

Очевидно, що $V(\boldsymbol{x})$ в цьому випадку мусить бути додатно визначеною квадратичною формою

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} ,$$

де $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ - симетрична додатно визначена матриця. А шуканий скалярний добуток буде

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} .$$

Цей результат виділяє досить вузький клас систем (1) та їх перших інтегралів. Зокрема, перший інтеграл $V(\boldsymbol{x})$ має бути додатно визначеною функцією. Тоді як для багатьох систем (1) це не так. Наприклад, система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} ,$$

де $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{K}^T$ - кососиметрична матриця, має множину перших інтегралів $V_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}^{2i} \boldsymbol{x},\ i = 0,1,2,...$ Матриця $\boldsymbol{K}^{2i}$ - симетрична (як парна степінь кососиметричної матриці), але, взагалі кажучи, не є додатно визначеною. Тому в цьому випадку не може бути застосована теорема 1.

Покажемо справедливість наступного твердження.

Теорема 2.

Якщо система (1) має перший інтеграл $V(\boldsymbol{x})$ у вигляді квадратичної форми

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} , \tag{8}$$

де $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - деяка симетрична матриця, то метод середньої точки (5) є консервативним по відношенню до (8) для всіх $h_{m+1} > 0$.

Доведення.

Якщо (7) є першим інтегралом для (1), то згідно з (4)

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{BF}(\boldsymbol{x}) = 0\,. \tag{9}$$

Розглянемо першу різницю $V(\boldsymbol{x})$ на послідовності $\{\boldsymbol{x}_m\}$, $m = 0,1,2,\ldots$, що породжується методом (6):

$$\Delta V = V_{m+1} - V_m = \boldsymbol{x}_{m+1}{}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{m+1} - \boldsymbol{x}_m{}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_m = (\boldsymbol{x}_{m+1} + \boldsymbol{x}_m)^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_{m+1} - \boldsymbol{x}_m) =$$
$$= 2h_{m+1}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{m+1} + \boldsymbol{x}_m}{2}\right)^T \boldsymbol{BF}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{m+1} + \boldsymbol{x}_m}{2}\right) = 0$$

оскільки виконується (9).

Відмітимо, що для лінійної системи (1) з постійними параметрами метод середньої точки (5) і метод трапецій

$$\boldsymbol{x}_{m+1} = x_m + \frac{h}{2}\big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{m+1}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_m)\big) \tag{10}$$

приводять до однакових різницевих рівнянь. Тому в цьому випадку результати теорем в однаковій мірі відносяться і до методу трапецій.

1. *Shampine L.F.* Linear conservation laws for ODEs / Shampine L.F. // Computers and Mathematics with Applications. 1998. V.35. N.10 – P. 45-53.
2. *Синицкий Л.А.* Методы аналитической механики в теории электрических цепей. Львов. Издательское объединение «Вища школа», 1978. – 139 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Арнольд В.И. – М.: “Наука”, 1971. – 240 с.
4. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. / Эрроусмит Д., Плейс К. – М.: “Мир”, 1986. – 243 с.
5. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / Деккер К., Вервер Я. – М.: “Мир”, 1988. – 334 с.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. / Хорн Р., Джонсон Ч. – М.: “Мир”, 1989. – 655 с.

ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2013. Випуск 3

NUMERICAL METHODS AND CONSERVATION LAWS IN DYNAMICAL SYSTEMS

V. Brygilevych, S. Velgosh, V. Hryhorenko, Ya. Shmygelsky

Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA–79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@electronics.lnu.edu.ua

The class of conservative dynamical systems, for which the mid-point numerical simulation method retains the property of conservation, is emphasized.
Keywords: dynamic system, conservatism, numerical methods.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. Бригилевич, С, Вельгош, В. Григоренко, Я. Шмигельский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина
shmygelsky@electronics.lnu.edu.ua

Выделено класс консервативных динамических систем, для которых при численном моделировании методом средней точки сохраняется свойство консервативности.
Ключевые слова: динамическая система, консервативность, численные методы.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2013
Прийнята до друку 19.06.2013