Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 85, 2011, стор. 75–83
Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 85, 2011, pp. 75–83

ДИНАМІЧНІ ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ НА ЗРОСТАЮЧИХ ІНТЕРВАЛАХ ЧАСУ

УДК 519.21

В. С. КОРОЛЮК

Анотація. Розглядаються три основні схеми граничних теорем для випадкових еволюцій: усереднення, дифузійна апроксимація та асимптотика великих відхилень.

Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій на зростаючих інтервалах часу реалізується у схемі серій з малим параметром серії із використанням розв'язків проблеми сингулярного збурення для звідно оборотних операторів.

Аннотация. Рассматриваются три основные схемы предельных теорем для случайных эволюций: усреднение, диффузионная аппроксимация и асимптотика больших уклонений.

Асимптотический анализ случайных эволюций на возрастающих интервалах времени реализуется в схеме серий с малым параметром серии с использованием решений проблемы сингулярного возмущения для приводимо обратимых операторов.

Abstract. Three main schemes of limit theorems for random evolutions are studied: averaging, diffusion approximation and asymptotic of large deviations.

Asymptotic analysis of random evolutions on increasing time intervals is realized in the series scheme with small series parameter using solution of singular perturbation problem for reducible-invertible operator.

1. Вступ

Вивчення асимптотичної поведінки випадкових еволюцій на зростаючих інтервалах часу реалізується з використанням розв'язків *проблеми сингулярного збурення* для звідно оборотних операторів [1, Розд. 5]. Обґрунтування граничного переходу основано на мартингальній характеризації марковських процесів та умовах відносної компактності [3].

Асимптотичний аналіз для випадкових еволюцій реалізується у схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$ [1, Розд. 3]. Основним об'єктом асимптотичного аналізу випадкових еволюцій є *породжуючий оператор* (*генератор*) відповідного марковського процесу [1, 3].

У теорії випадкових процесів є три основні схеми граничних теорем: схема усереднення, або закон великих чисел; дифузійна апроксимація, або центральна гранична теорема; асимптотика великих відхилень, або оцінка експоненційно малих ймовірностей. Кожній з основних схем відповідають свої *умови нормування* параметром серії ε.

Існуюча література з граничних теорем для випадкових процесів, зокрема, для випадкових еволюцій, практично неосяжна. Краще за все звернутися до основних монографій, які наведені у списку літератури, а також використати літературу, наведену в указаних монографіях.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J55, 60B10, 60F17, 60K10; Secondary 60G46, 60G60.

Ключові слова і фрази. Динамічна випадкова еволюція, усереднення, дифузійна апроксимація, великі відхилення, експоненційний нелінійний оператор.

2. Динамічні випадкові еволюції

Марковські випадкові еволюції визначаються розв'язком динамічної системи диференціальних рівнянь

$$du(t)/dt = C(u(t); x(t)), \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Швидкість еволюції $C(u;x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $x \in E$, залежить від станів $x \in E$, однорідного марковського стрибкового регулярного процесу $x(t)$, $t \geq 0$, що задається генератором [6, 7]

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \qquad \varphi(x) \in \mathcal{B}_E, \tag{2}$$

на дійснозначних тест-функціях з нормою $|\varphi| := \sup_{x \in E} |\varphi(x)|$.

Відомо (див. напр. [6, 7]), що функція $q(x)$ в (2) визначає *інтенсивність часу перебування* θ_x у станах $x \in E$:

$$\mathsf{P}\{\theta_x \geq t\} = e^{-q(x)t}, \ t \geq 0.$$

Стохастичне ядро $P(x, dy)$, $x \in E$, $dy \in \mathcal{E}$, визначає *ймовірності переходу вкладеного ланцюга Маркова* $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$:

$$\mathsf{P}\{x_{n+1} \in B \mid x_n = x\} = P(x, B), \qquad x \in E, \ B \in \mathcal{E}.$$

Моменти відновлення (стрибків) τ_n, $n \geq 0$, визначаються співвідношенням

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, \qquad n \geq 0.$$

Отже, має місце рівність

$$\mathsf{P}\{\theta_{n+1} \geq t \mid x_n = x\} = \mathsf{P}\{\theta_x \geq t\} = e^{-q(x)t}.$$

Супроводжуючі еволюційні системи

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t); x), \qquad x \in E,$$

характеризуються *породжуючими операторами* (*генераторами*) [2, Розд.4]

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u) = C(u; x)\varphi'(u), \qquad \varphi(u) \in C^1(\mathbb{R}^d),$$

напівгруп

$$\mathbf{C}_t(x)\varphi(u) := \varphi(u_x(t)), \qquad u_x(0) = u.$$

Марковська випадкова еволюція (1)–(2) характеризується генератором [2, § 4.2] двокомпонентного марковського процесу $u(t)$, $x(t)$, $t \geq 0$:

$$\mathbf{L}\varphi(u, x) = Q\varphi(\cdot, x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u, \cdot).$$

3. Випадкові еволюції у схемі серій

Як вказано у вступі, розглядаються три основні схеми серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$:

усереднення, *дифузійна апроксимація* та *великі відхилення з асимптотично малою дифузією*

Основне припущення, з яким розглядаються випадкові еволюції у схемі серій, наступне.

Основне припущення. Марковський процес перемикань $x(t)$, $t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ *рівномірно ергодичний* з єдиним стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$.

Стаціонарний розподіл *вкладеного ланцюга Маркова* x_n, $n \geq 0$, визначається співвідношеннями:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \qquad q = \int_E \pi(dx)q(x),$$

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x, dy), \qquad \rho(E) = 1.$$

3.1. **Усереднення.** Динамічні випадкові еволюції у схемі усереднення задаються розв'язком динамічної системи

$$du^\varepsilon(t)/dt = C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon)), \qquad u^\varepsilon(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

з *марковськими перемиканнями* $x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon)$, що визначаються на зростаючих інтервалах часу $T_\varepsilon = t/\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

Здвоєний марковський процес

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon), \qquad t \geq 0,\ \varepsilon \to 0,$$

визначається генератором

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = [\varepsilon^{-1}Q + \mathbf{C}(x)]\varphi(u, x). \tag{4}$$

Асимптотичний аналіз випадкової еволюції (3), що характеризується генератором (4), реалізується з використанням розв'язку *проблеми сингулярного збурення* для звідно оборотного генератора Q [1, Розд. 5].

Рівномірна ергодичність марковського процесу перемикань $x(t)$, $t \geq 0$, забезпечує звідну оборотність генератора Q, тобто існування обмеженого *потенціалу* R_0, що визначається рівнянням [1, Розд. 5]

$$QR_0 = R_0Q = \Pi - I, \qquad \Pi\varphi(x) := \int_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Отже, існує єдиний розв'язок *рівняння Пуассона*:

$$Q\varphi(x) = \psi(x), \qquad \Pi\psi(x) = 0,$$

що визначається рівністю

$$\varphi(x) = -R_0\psi(x), \qquad \Pi\varphi(x) = 0.$$

Асимптотине представлення генератора (4) випадкової еволюції (3) реалізується на *збурених* тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u, x).$$

Лема 3.1. *Має місце асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = \widehat{C}\varphi(u) + \delta_l^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{5}$$

зі знехтуючим членом

$$\sup_{x \in E} |\delta_l^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,\ \varphi(u) \in C^2(\mathbb{R}^d).$$

Граничний оператор задається співвідношеннями

$$\widehat{C}\varphi(u) = \widehat{C}(u)\varphi'(u), \qquad \widehat{C}(u) = \int_E \pi(dx)C(u; x).$$

Асимптотичне представлення (5) є безпосереднім висновком застосування твердження 5.1 [1, Розд. 5] з $Q_1 = \mathbf{C}(x)$.

Асимптотичне представлення (5) служить основою для доведення слабкої збіжності

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow \widehat{u}(t), \qquad \varepsilon \to 0; \tag{6}$$

гранична еволюція визначається розв'язком еволюційного усередненого рівняння [1, Розд. 3, 5, 6]

$$d\widehat{u}(t)/dt = \widehat{C}(\widehat{u}(t)), \qquad \widehat{u}(0) = \widehat{u}_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Зауваження 3.1. Слабка збіжність (6) є одним із варіантів "принципу усереднення" для стохастичних систем, що має давню історію, починаючи з А. Пуанкаре, М. М. Боголюбова, І. І. Гіхмана та інш.

3.2. **Дифузійна апроксимація.** Динамічні випадкові еволюції у схемі дифузійної апроксимації задаются розв'язком динамічної системи

$$du^\varepsilon(t)/dt = C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2)), \qquad u^\varepsilon(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d \tag{7}$$

з марковськими перемиканнями $x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2)$. Тепер зростаючі інтервали часу мають нормування $T_\varepsilon = t/\varepsilon^2$, $\varepsilon \to 0$.

Швидкість еволюції тепер також залежить від малого параметра серії, а саме

$$C^\varepsilon(u; x) = C(u; x) + \varepsilon^{-1} C_0(u; x), \qquad u \in \mathbb{R}^d, \ x \in E. \tag{8}$$

Перша компонента $C(u; x)$ породжує усереднену еволюцію, а друга – $C_0(u; x)$ породжує дифузійні флюктуації при додатковій *умові балансу*:

$$\Pi C_0(u; x) = \int_E \pi(dx) C_0(u; x) \equiv 0. \tag{9}$$

Марковська випадкова еволюція (7)–(8) характеризується генератором двокомпонентного марковського процесу $u^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2)$, $t \geq 0$,

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u, x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} \mathbf{C}_0(x) + \mathbf{C}(x)] \varphi(u, x). \tag{10}$$

Тут

$$\mathbf{C}_k(x) \varphi(u) := C_k(u; x) \varphi'(u), \qquad k = 0, 1. \tag{11}$$

Асимптотичний аналіз випадкової еволюції (7)–(8) в умовах балансу (9) реалізується з використанням розв'язку *проблеми сингулярного збурення* для звідно оборотного оператора Q [1, Розд. 5], що визначає рівномірно ергодичний марковський процес переключень.

Асимптотичне представлення генератора (10)– (11) реалізується на збурених тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x).$$

Лема 3.2. *В умовах балансу* (9) *має місце асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = \widehat{\mathbf{L}} \varphi(u) + \delta_l^\varepsilon(x) \varphi(u), \tag{12}$$

зі знехтуючим членом

$$\sup_{x \in E} |\delta_l^\varepsilon(x) \varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \ \varphi(u) \in C^3(\mathbb{R}^d).$$

Граничний оператор $\widehat{\mathbf{L}}$ *обчислюється за формулою*

$$\widehat{\mathbf{L}} = \Pi \mathbf{C}(x) \Pi + \Pi \mathbf{C}_0(x) R_0 \mathbf{C}_0(x) \Pi. \tag{13}$$

Асимптотичне представлення (12)–(13) є безпосереднім висновком твердження 5.2 [1, Розд. 5] з $Q_1 = \mathbf{C}_0(x)$, $Q_2 = \mathbf{C}(x)$.

Висновок 3.1. *Асимптотичне представлення* (12)–(13) *служить висхідним при доведенні слабкої збіжності* [1, Розд. 6]

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

Граничний дифузійний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$, визначається генератором

$$\widehat{L}\varphi(u) = b(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2}B(u)\varphi''(u),$$
$$b(u) = \widehat{C}(u) + \widehat{C}_0(u), \qquad \widehat{C}_0(u) = \Pi C_0(u;x)R_0 C_0'(u;x)\Pi,$$
$$B(u) = 2\Pi C_0(u;x)R_0C_0(u;x)\mathbf{1}.$$

Тут, за означенням, $C_0'(u;x) := \partial C_0(u;x)/\partial u$.

Зауваження 3.2. Слабка збіжність (14) є одним із варіантів *дифузійної апроксимації флюктуацій* стохастичних систем, що має давню історію, починаючи з Р.З. Хасьмінського.

Зауваження 3.3. Локальна умова балансу (9) може бути замінена, наприклад, умовою "балансу з еквілібріумом" [1, §§ 3.5, 5.5]. Алгоритм обчислення граничного оператора при цьому значно ускладнюється. Змінюється також зміст формули (13) [1, § 5.5.2].

Зауваження 3.4. В монографії [1] наведені також алоритми усереднення та дифузійної апроксимації для динамічних випадкових еволюцій з напівмарковським процесом переключень $x(t)$, $t \geq 0$.

3.3. **Асимптотично мала дифузія.** Динамічна випадкова еволюція у схемі асимптотично малої дифузії визначається розв'язком еволюційного рівняння

$$du^\varepsilon(t)/dt = C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^3)) + \varepsilon^{-1}C_0(x(t/\varepsilon^3)). \tag{15}$$

Збурена швидкість

$$C^\varepsilon(u;x) = C(u;x) + \varepsilon^{-1}C_0(x), \qquad u \in \mathbb{R}^d,\ x \in E, \tag{16}$$

задовольняє *умову балансу*

$$\Pi C_0(x) = \int_E \pi(dx)C_0(x) = 0. \tag{17}$$

Марковська випадкова еволюція (15)–(17) характеризується генератором двокомпонентного марковского процесу $u^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^3)$, $t \geq 0$,

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{C}_0(x) + \mathbf{C}(x)]\varphi(u;x). \tag{18}$$

За означенням

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(x)\varphi'(u), \qquad \mathbf{C}(x)\varphi(u) = C(u;x)\varphi'(u). \tag{19}$$

Асимптотичний аналіз випадкової еволюції (15)–(17) реалізується майже так само, як і в попередньому § 3.2. А саме, генератор (18)–(19) розглядається на збурених тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^3\varphi_2(u,x).$$

Лема 3.3. *В умовах балансу* (17) *має місце асимптотичне представлення генератора* (18)–(19)

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \widehat{\mathbf{L}}^\varepsilon\varphi(u) + \delta_l^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

зі знехтуючим членом

$$\sup_{x\in E}|\delta_l^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,\ \varphi(u) \in C^3(\mathbb{R}^d).$$

Усереднений оператор $\widehat{\mathbf{L}}^\varepsilon$ обчислюється за формулою

$$\widehat{L}^\varepsilon = \Pi\mathbf{C}(x)\Pi + \varepsilon\Pi\mathbf{C}_0(x)R_0\mathbf{C}_0(x)\Pi. \tag{20}$$

Результат леми 3.3 стає очевидним, якщо записати генератор (18) у такому вигляді:

$$\mathbf{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-2}\mathbf{C}_0^\varepsilon(x) + \mathbf{C}(x), \qquad \mathbf{C}_0^\varepsilon(x) := \varepsilon\mathbf{C}_0(x),$$

та використати лему 3.2.

Асимптотичне представлення (20) означає, що має місце асимптотичне співвідношення

$$u^\varepsilon(t) \simeq \zeta^\varepsilon(t), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{21}$$

в якому дифузійний процес $\zeta^\varepsilon(t)$ задається розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$d\zeta^\varepsilon(t) = \widehat{C}(\zeta^\varepsilon(t))\,dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma\,dw(t). \tag{22}$$

Матриця варіацій визначається рівністю

$$B = \sigma^*\sigma, \;\; B = 2\int_E \pi(dx)C_0(x)R_0C_0(x). \tag{23}$$

Асимптотичне представлення (21)–(23) буде використано в аналізі *проблеми великих відхилень* для динамічних випадкових еволюцій (див. наступний § 4).

4. Великі відхилення для динамічних випадкових еволюцій у схемі асимптотично малої дифузії

Великі відхилення, або асимптотика малих імовірностей, для випадкових еволюцій вивчається методом асимптотичного аналізу *експоненційного* (*нелінійного*) *генератора* великих відхилень, розвинутого у монографії [4].

Експоненційний генератор великих відхилень для марковського процесу, що задається генератором L^ε у схемі серій, визначається співвідношенням [4, Частина I]

$$H^\varepsilon\varphi(u) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}. \tag{24}$$

Теорія великих відхилень для випадкових процесів базується на характеризації марковського процесу *експоненційним мартингалом* [4, Частина I]

$$\exp\left\{\varphi(u(t)) - \varphi(u(0)) - \int_0^t H\varphi(u(s))\,ds\right\} = \mu_t.$$

Тут експоненційний генератор H задається співвідношенням

$$H\varphi(u) = e^{-\varphi(u)}Le^{\varphi(u)},$$

де L є генератором марковського процесу $u(t)$, $t \geq 0$.

Проблема великих відхилень для марковських процесів може бути сформульована як гранична теорема у схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, а саме

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon \to H\varphi, \qquad \varphi^\varepsilon \to \varphi, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{25}$$

Приклад 4.1. Асимптотично мала дифузія $\zeta^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\sigma w(t)$, $t \geq 0$, визначається генератором

$$L^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u). \tag{26}$$

Експоненційний генератор асимптотично малої дифузії (26) легко обчислюється за формулою (24):

$$H^\varepsilon\varphi(u) = \frac{1}{2}\sigma^2[\varphi'(u)]^2 + \varepsilon\sigma^2\varphi''(u).$$

Отже, граничний експоненційний генератор асимптотично малої дифузії (26) визначається рівністю

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}\sigma^2[\varphi'(u)]^2. \tag{27}$$

Зауваження 4.1. Граничний експоненційний генератор достатньо, не зменшуючи загальності, обчислити в одновимірному евклідовому просторі R, тобто на числовій осі.

Зрозуміло, що в евклідовому просторі R^d, $d > 1$, експоненційний генератор (27) має вигляд

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} \sigma_{kr}\varphi'_k\varphi'_r, \qquad \varphi'_k := \partial\varphi(u)/\partial u_k, \qquad 1 \le k \le d.$$

Тут $\sigma^2 = [\sigma_{kr}; 1 \le k, r \le d]$ є матрицею варіацій броунівського руху.

Динамічні випадкові еволюції у схемі асимптотично малої дифузії задаються розв'язком еволюційного рівняння (15) з додатковою умовою балансу (17).

Випадкова еволюція (15) характеризується генератором (18)–(19).

Теорема 4.1. *За умовою балансу* (17) *та при виконанні основного припущення: рівномірної ергодичності марковського процесу переключень* $x(t)$, $t \ge 0$, *має місце збіжність експоненційних генераторів*

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) \to H\varphi(u), \qquad \varphi^\varepsilon(u,x) \to \varphi(u), \qquad \varepsilon \to 0,$$

на збурених тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x)].$$

Граничний експоненційний генератор задається рівністю

$$\begin{gathered} H\varphi(u) = \frac{1}{2}\sigma^2[\varphi'(u)]^2 + \widehat{C}(u)\varphi'(u), \\ \sigma^2 = 2\int_E \pi(dx)C_0(x)R_0C_0(x), \qquad \widehat{C}(u) = \int_E \pi(dx)C(u;x). \end{gathered} \tag{28}$$

Доведення теореми 4.1 основано на асимптотичному представленні експоненційних генераторів.

Лема 4.1. *Має місце асимптотичне представлення*

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + \mathbf{C}_0(x)\varphi] + [Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \mathbf{C}(x)\varphi] + \delta_h^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{29}$$

зі знехтуючим членом

$$\sup_{x\in E}|\delta_h^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \varepsilon \to 0, \varphi(u) \in C^3(R).$$

Доведення леми 4.1 забезпечують асимптотичні представлення трьох операторів, що визначають генератор (18).

Безпосередні обчислення дають такі результати:

$$\begin{aligned} H_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]^{-1}\varepsilon^{-2}Q[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]e^{\varphi/\varepsilon} \\ &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1 - \varepsilon\varphi_1 - \varepsilon^2\varphi_2]\varepsilon^{-2}Q[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]e^{\varphi/\varepsilon} + \delta_q^\varepsilon(x)\varphi \\ &= \varepsilon^{-1}Q\varphi_1 + Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \delta_q^\varepsilon(x)\varphi. \end{aligned}$$

Далі, аналогічно очислюються асимптотичні представлення

$$\begin{aligned} H_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= \varphi^{-\varphi/\varepsilon}[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]^{-1}\mathbf{C}_0(x)[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]e^{\varphi/\varepsilon} \\ &= \varepsilon^{-1}\mathbf{C}_0(x)\varphi + \delta_0^\varepsilon(x)\varphi. \end{aligned}$$

А також

$$\begin{aligned} H_c^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]^{-1}\varepsilon\mathbf{C}(x)[1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2]e^{\varphi/\varepsilon} \\ &= \mathbf{C}(x)\varphi + \delta_c^\varepsilon(x)\varphi. \end{aligned}$$

Підсумовуючи результати, маємо розклад (29).

Завершення доведення теореми 1 здійснюється з використанням розв'язків проблеми сингулярного збурення [1, Розд. 5]

$$Q\varphi_1 + \mathbf{C}_0(x)\varphi(u) = 0, \tag{30}$$

$$Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \mathbf{C}(x)\varphi(u) = \widehat{\mathbf{L}}\varphi(u). \tag{31}$$

Існування розв'язку рівняння (30) випливає з *умови балансу* (17). Отже, маємо

$$\varphi_1(u,x) = -R_0\mathbf{C}_0(x)\varphi(u) = -R_0 C_0(x)\varphi'(u). \tag{32}$$

Рівняння (31) з урахуванням (30) має вигляд

$$Q\varphi_2 + C_0(x)R_0C_0(x)[\varphi'(u)]^2 + C(u;x)\varphi'(u) = \widehat{\mathbf{L}}\varphi(u). \tag{33}$$

Граничний оператор $\widehat{\mathbf{L}}$ визначається з *умови розв'язності* рівняння (33), тобто має місце формула (28).

Зауваження 4.2. Проблема великих відхилень для марковських процесів розв'язується у чотири етапи [4, Розд.2].

1. Збіжність експоненційних генераторів.
2. Експоненційна щільність марковських процесів.
3. Принцип порівняння для граничного оператора.
4. Конструкція варіаційного представлення функціоналу дії.

Оскільки для граничного оператора асимптотично малої дифузії (27) та більш загальних (28) етапи 2–4 вже реалізовані (див. [4, 5]), тому тут реалізується лише перший етап: збіжність експоненційних генераторів (25).

Зауваження 4.3. Аналогічна проблема великих відхилень розглядалась в монографії [4, § 11.3] з двома (великими) параметрами серії n, $\beta_n \to \infty$, $n \to \infty$. Перехід до малого параметра серії $\varepsilon = 1/n = 1/\beta_n$, дає аналогічне нормування генератора двокомпонентного марковського процесу

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-1}C_0(x)]\varphi(u,x).$$

Проте розв'язок проблем сингулярного збурення дає граничний експоненційний генератор, що залежить від станів марковського процесу переключень.

Зауваження 4.4. Класична проблема великих відхилень для дифузійного процесу з асимптотично малою дифузією

$$du^\varepsilon(t) = \widehat{C}(u^\varepsilon(t))dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma dw(t),$$

розв'язуєтся з використанням експоненційного генератора

$$H^\varepsilon\varphi(u) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon},$$

з генератором процесу (22)

$$L^\varepsilon\varphi(u) = \widehat{C}(u)\varphi'(u) + \varepsilon\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u)$$

в такий спосіб:

$$H^\varepsilon_c\varphi(u) := e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\widehat{\mathbf{C}}e^{\varphi/\varepsilon} = \widehat{C}\varphi(u) = \widehat{C}(u)\varphi'(u),$$

$$H^\varepsilon_\sigma\varphi(u) := e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon^2\mathbf{B}e^{\varphi/\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma^2[\varphi'(u)]^2 + \varepsilon\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u).$$

Тут за означенням

$$\mathbf{B}\varphi(u) := \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u).$$

Отже, має місце збіжність експоненційних генераторів:

$$H^\varepsilon\varphi(u) \to H\varphi(u), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Граничний експоненційний генератор визначається рівністю

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}\sigma^2[\varphi'(u)]^2 + \widehat{C}(u)\varphi'(u).$$

Наступні три етапи проблеми великих відхилень реалізуються за схемою, наведеною в [5] або [4].

Література

1. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, WSP, 2005.
2. V. S. Korolyuk and V. V. Korolyuk, *Stochastic Models of Systems*, Kluwer, 1999.
3. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, J. Wiley&Sons, 1986.
4. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large Deviation for Stochastic Processes*, AMS, RI, 2006.
5. M. J. Freidlin and A. M. Wentzel, *Random Perturbation of Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1998.
6. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. II, John Wiley&Sons, 1966.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1977.

Інститут математики НАН України, Терещенківська, 3, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: korol@imath.kiev.ua

Надійшла 10/05/2011