Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 84–94

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 84–94

ПРО ГРАНИЧНУ ПОВЕДІНКУ СИМЕТРИЧНИХ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ З МЕМБРАНАМИ

УДК 519.21

А. Ю. ПИЛИПЕНКО І Ю. Є. ПРИХОДЬКО

Анотація. Нехай $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ — випадкове блукання на $\mathbb{Z}$, перехідні імовірності якого відрізняються від відповідних перехідних імовірностей симетричного випадкового блукання з одиничним стрибком лише в заданому околі нуля. В роботі доводиться слабка збіжність послідовності нормованих випадкових блукань $\{X_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} X(nk), k \geqslant 0\}_{n \geqslant 1}$. Основний результат роботи узагальнює результат J. M. Harrison'а та L. A. Shepp'а про слабку збіжність до косого броунового руху послідовності нормованих випадкових блукань з однією несиметричною точкою. Також вказано всі можливі граничні процеси.

Аннотация. Пусть $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ — случайное блуждание на $\mathbb{Z}$, переходные вероятности которого отличаются от переходных вероятностей симметричного случайного блуждания с единичным скачком только в фиксированной окрестности нуля. В работе доказана слабая сходимость последовательности нормированных случайных блужданий $\{X_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} X(nk), k \geqslant 0\}_{n \geqslant 1}$. Основной результат является обобщением результата J. M. Harrison'а и L. A. Shepp'а про слабую сходимость к косому броуновскому движению последовательности нормированных случайных блужданий, для которой симметричность переходных вероятностей нарушается в единственной точке. Также указаны все возможные предельные процессы для рассматриваемых блужданий.

Abstract. Let $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ be a random walk in $\mathbb{Z}$. Assume that transition probabilities of this walk coincide with transition probabilities of symmetric random walk except for a fixed neighborhood of zero. Weak convergence of a sequence of normed walks $\{X_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} X(nk), k \geqslant 0\}_{n \geqslant 1}$ is proved. The main result is a generalization of J. M. Harrison's and L. A. Shepp's theorem on a weak convergence to a skew Brownian motion in a case when a symmetricity of the random walk fails in a single point. All possible limits for the corresponding random walks are described.

1. Вступ

Нехай $\{S(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ — симетричне випадкове блукання на $\mathbb{Z}$, $S(0) = 0$ та $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$, $i \in \mathbb{Z}$.

Довизначимо послідовність $\{S(k), k \geqslant 0\}$ до неперервного процесу $\{S(t), t \geqslant 0\}$ як лінійну інтерполяцію значень в цілих точках і покладемо

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S(nt), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Добре відома теорема Донскера (див. напр. [2]), яка стверджує, що при $n \to \infty$ послідовність процесів $\{S_n(t), t \in [0,1]\}_{n \geqslant 1}$ слабко збігається в $\mathrm{C}[0,1]$ до вінерівського процесу.

В даній роботі розглядається питання слабкої збіжності аналогічно нормованих випадкових блукань $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$, перехідні ймовірності яких можуть відрізнятися від перехідних імовірностей $\{S(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ в деякому околі нуля $[-m, m]$. Цей окіл ми будемо називати мембраною.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F17, 60J10.

Ключові слова і фрази. Випадкові блукання, косий броунів рух, дифузія з мембраною.

Роботу виконано при частковій підтримці гранту Державного фонду фундаментальних досліджень України та Російського фонду фундаментальних досліджень, грант № Ф40.1/023.

Випадок мембрани, що складається з однієї точки (тобто при $m = 0$), розглядали J. M. Harrison та L. A. Shepp [3]. Вони довели, що якщо $p_{0,1} = p$, $p_{0,-1} = q = 1 - p$ та $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ при $i \neq 0$, то послідовність нормованих вказаним чином блукань $\{X_n\}$ слабко збігається до косого броунового руху $W_\gamma(\cdot)$, $\gamma = p - q$, тобто неперервного марковського процесу з перехідною густиною

$$p_t(x, y) = \varphi_t(x - y) + \gamma \operatorname{sign}(y)\varphi_t(|x| + |y|), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

де $\varphi_t(x) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t}$ — густина нормального розподілу $N(0, t)$.

Коефіцієнт $\gamma \in [-1, 1]$ називається коефіцієнтом проникнення. Відмітимо, що якщо $\gamma = +1$ (або -1), то W_γ — це броунів рух з відбиттям в нулі вгору (вниз), а якщо $\gamma = 0$, то W_γ — звичайний броунів рух.

Детальніше про дифузію з мембранами див. напр. в [4].

Р. А. Мінлос та О. А. Жижина [5] узагальнили результат [3] за допомогою напівгрупової теорії на випадок довільної обмеженої мембрани.

В даній роботі буде встановлено аналогічний результат, однак для його доведення використовуються імовірнісні методи, які виявились більш простими та зручнішими для узагальнень на складніші ситуації, а також наведено імовірнісну інтерпретацію коефіцієнта γ в термінах характеристик поведінки блукання всередині мембрани. Нами також описано всі можливі граничні процеси в залежності від властивостей мембрани.

Відмітимо також результати декількох робіт, близьких за тематикою до дослідження даної статті: див. [6]–[9], а також посилання в них.

2. Постановка задачі та основні результати

Розглянемо однорідний марковський ланцюг $\{X(k) = X(x_0, k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ на $\mathbb{Z}$ з початком в точці $x_0 \in \mathbb{Z}$ та перехідними імовірностями $p_{i,j}$ які можуть відрізнятися від відповідних імовірностей для симетричного випадкового блукання $\{S(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ тільки при $|i| \leqslant m$:

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2, \qquad i \notin \{-m, \ldots, m\}$$

і такими, що з точок множини $\{-m, \ldots, m\}$ ланцюг X може переходити у, взагалі кажучи, довільну точку множини $\{-m-1, \ldots, m+1\}$:

$$\sum_{j=-m-1}^{m+1} p_{i,j} = 1, \qquad i \in \{-m, \ldots, m\}.$$

Будемо інтерпретувати $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ як симетричне випадкове блукання з (несиметричною) мембраною в множині $\{-m, \ldots, m\}$.

Довизначимо $X(x_0, t)$ для всіх $t \geqslant 0$ неперервно за лінійністю:

$$X(x_0, t) := X(x_0, [t]) + (t - [t]) \left(X(x_0, [t] + 1) - X(x_0, [t]) \right).$$

Нехай $x \in \mathbb{R}$. Розглянемо наступну послідовність процесів:

$$X_n(t) = X_n(x, t) := \frac{1}{\sqrt{n}} X([\sqrt{n}x], nt), \qquad t \geqslant 0.$$

Для зручності формулювання основного твердження роботи введемо наступні імовірнісні міри на $\mathrm{C}[0, 1]$.

Позначимо через P_{x,W_γ} розподіл косого броунового руху $W_\gamma(\cdot)$ з початком в точці x, та $P_{x,0}$ — розподіл броунового руху з початком в точці x та залипанням в нулі.

2.1. **Основна теорема.**

Теорема 1. *Для довільного* $x \in \mathbb{R}$ *послідовність процесів* $\{X_n(x, t), t \in [0, 1]\}_{n \geqslant 1}$ *при* $n \to \infty$ *слабко збігається в* $\mathrm{C}[0, 1]$ *до неперервного процесу* $\{X_\infty(x, t), t \in [0, 1]\}$. *Зокрема:*

А. *Якщо принаймні один зі станів $-m-1$ та $m+1$ ланцюга $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$*

1) *є істотним та*
2) *досягається з імовірністю 1,*

то граничний процес X_∞ є косим броуновим рухом W_γ, параметр якого визначається наступним чином.

Якщо умови 1) і 2) виконуються для обох станів $-m-1$ та $m+1$, то

$$\gamma = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta},$$

де α — імовірність для блукання X потрапити з точки $-m$ в точку $m+1$, не потрапляючи в $-m-1$; а β — навпаки — з точки m в точку $-m-1$, не потрапляючи в $m+1$.

Якщо умови 1) і 2) одночасно виконуються тільки для одного зі станів $-m-1$ та $m+1$, то γ дорівнює знаку цього стану.

Б. *Нехай $x > 0$, а стан $-m-1$ є істотним та досягається ланцюгом $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ з імовірністю q, $0 < q < 1$. Тоді розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює $qP_{x,W_{-1}} + (1-q)P_{x,0}$. Аналогічно для $x < 0$ та стану $m+1$.*

В. *Нехай $x = 0$, а стани $-m-1$ та $m+1$ досягаються ланцюгом $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ з імовірностями q та p відповідно ($q, p \geqslant 0$) та є істотними*[1].

Якщо ці стани між собою не сполучаються, то розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює $qP_{0,W_{-1}} + pP_{0,W_{+1}} + (1-q-p)P_{0,0}$.

*Якщо стани $-m-1$ та $m+1$ сполучаються, то розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює $(q+p)P_{0,W_\gamma} + (1-q-p)P_{0,0}$, де γ визначається аналогічно до пункту **А**.*

Г. *Якщо будь-який (досяжний)*[1] *зі станів $-m-1$ та $m+1$ є неістотним, то граничний процес X_∞ є броуновим рухом із залипанням в нулі.*

Зауваження 1. При $m = 0$, тобто коли симетричність порушується в єдиній точці нуль, отримуємо результат, який встановили J.M. Harrison та L.A. Shepp [3].

Зауваження 2. Твердження теореми залишається справедливим, якщо умову

$$\sum_{j=-m-1}^{m+1} p_{i,j} = 1$$

в означенні X замінити на

$$\sum_{j=-m-N}^{m+N} p_{i,j} = 1$$

для наперед заданого N. Дійсно, в цьому випадку X можна розглядати як блукання з мембраною в $[-m-N, m+N]$ та відповідними перехідними імовірностями.

2.2. **Приклади.** а) Нехай симетричність порушується в двох точках -1 та 1.

Тобто $m = 1$ та

$$p_{i,i\pm1} = 1/2, \qquad i \notin \{-1, 1\},$$
$$p_{-1,-2} = q', \qquad p_{-1,0} = p',$$
$$p_{+1,0} = q'', \qquad p_{+1,+2} = p'',$$

де q', p', q'', p'' — додатні числа, такі що $q'+p' = q''+p'' = 1$. Можна перевірити, що $\alpha = p'p''/(q'+p'')$ та $\beta = q'q''/(q'+p'')$. Отже, за теоремою 1, послідовність таких

[1] Якщо якийсь стан є недосяжним, то його істотність чи неістотність для результату неважлива. Тому для простоти формулювання всі недосяжні стани в пункті **В** ми будемо вважати істотними, а в пункті **Г** — неістотними.

блукань, довизначених і нормованих вказаним чином, слабко збігається до косого броунового руху з параметром

$$\gamma = \frac{p'p'' - q'q''}{p'p'' + q'q''}.$$

b) Нехай перехідні імовірності $p_{i,j}$ ланцюга X відрізняються від відповідних перехідних імовірностей для випадкового блукання лише в точці нуль, з якої блукання вистрибує на деяку обмежену випадкову величину, тобто

$$p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 1/2 \text{ при } i \neq 0, \qquad \sum_{j=-N}^{N} p_{0,j} = 1, \; p_{0,0} \neq 1.$$

Застосуємо теорему 1 для $m = N$. Імовірності ρ_i (ймовірність потрапити в $m+1$ не потрапляючи в $-m-1$ при старті з i) задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \rho_{-m-1} = 0, \\ \rho_{-m} = \frac{1}{2}\rho_{-m+1} + \frac{1}{2}\rho_{-m-1}, \\ \dots \\ \rho_{-1} = \frac{1}{2}\rho_{-2} + \frac{1}{2}\rho_0, \\ \rho_0 = \sum_{j=-m}^{m} p_{0,j}\rho_j, \\ \rho_1 = \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{2}\rho_2, \\ \dots \\ \rho_m = \frac{1}{2}\rho_{m-1} + \frac{1}{2}\rho_{m+1}, \\ \rho_{m+1} = 1. \end{cases}$$

Помітимо, що точки $(-m-1, 0)$, $(-m, \rho_{-m})$, $\dots$, $(-1, \rho_{-1})$ та $(0, \rho_0)$ лежать на одній прямій. За координатами першої та останньої з них визначимо рівняння цієї прямої:

$$y = \frac{\rho_0 - 0}{0 - (-m-1)} x + \rho_0,$$

тобто $\rho_k = (1 + \frac{k}{m+1})\rho_0$, $k \leqslant 0$.

Аналогічно, $\rho_k = (1 - \frac{k}{m+1})\rho_0 + \frac{k}{m+1}$, $k \geqslant 0$.

Підставивши ці ρ_k в “середнє” рівняння системи, отримаєм рівняння для ρ_0:

$$\begin{aligned} \rho_0 = \sum_{j=-m}^{m} p_{0,j}\rho_j &= \sum_{j=-m}^{m} p_{0,j}(1 - \frac{|j|}{m+1})\rho_0 + \sum_{j=1}^{m} p_{0,j}\frac{j}{m+1} \\ &= \rho_0 - \sum_{j=-m}^{m} p_{0,j}\frac{|j|}{m+1}\rho_0 + \sum_{j=1}^{m} p_{0,j}\frac{j}{m+1}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\rho_0 = \frac{\sum_{j=1}^{m} j p_{0,j}}{\sum_{j=-m}^{m} |j| p_{0,j}}.$$

Таким чином, в цьому випадку маємо (для $\alpha = \rho_{-m}$ та $\beta = 1 - \rho_m$)

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^{m} |j| p_{0,j} - \sum_{j=-m}^{-1} |j| p_{0,j}}{\sum_{j=1}^{m} |j| p_{0,j} + \sum_{j=-m}^{-1} |j| p_{0,j}} = \frac{\sum_{j=-m}^{m} j p_{0,j}}{\sum_{j=-m}^{m} |j| p_{0,j}}.$$

Отже, якщо блукання X вистрибує з нуля на обмежену випадкову величину ξ з розподілом $\mathsf{P}(\xi = j) = p_{0,j}$, то граничний для послідовності $\{X_n\}$ процес X_∞ є косим броуновим рухом з параметром

$$\gamma = \frac{\mathsf{E}\,\xi_+ - \mathsf{E}\,\xi_-}{\mathsf{E}\,|\xi|} = \frac{\mathsf{E}\,\xi}{\mathsf{E}\,|\xi|}.$$

Цей результат (для довільної інтегровної випадкової величини ξ) відмітили без доведення J. M. Harrison та L. A. Shepp [3].

3. Доведення теореми 1

Доведемо теорему 1 для випадку, коли $x_0 > 0$, а стан $m{+}1$ є істотним і досягається ланцюгом X з імовірністю 1. Інші випадки розглядаються аналогічно.

3.1. **Побудова допоміжної послідовності.** Для дослідження граничної поведінки ланцюга Маркова $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ нам буде зручно представити його як деяку "склейку" двох незалежних ланцюгів Маркова $\{Y(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{Z(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$, що мають більш просту структуру: Y — модуль звичайного випадкового блукання, а Z — ланцюг Маркова на $\{-m{-}1, \ldots, m{+}1\}$, що описує рух процесу X в мембрані. Наведемо принцип побудови.

Розглянемо траєкторію $\{X(x_0, k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ з початком в точці $x_0 \in \mathbb{Z}$. Без втрати загальності можна вважати, що $x_0 > m$. Визначимо послідовність моментів зупинки $\{\tau_k, \sigma_k, k \geqslant 1\}$ наступним чином.

Позначимо $\tau_1 := \inf\{j > 0 \colon |X(x_0, j)| = m\}$ — момент першого досягнення процесом X точки m. Далі,

$$\sigma_k := \inf\{j > \tau_k \colon |X(x_0, j)| = m + 1\}, \qquad k \geqslant 1,$$
$$\tau_{k+1} := \inf\{j > \sigma_k \colon |X(x_0, j)| = m\}, \qquad k \geqslant 1$$

— моменти послідовних досягнень множин $\{-m{-}1, m{+}1\}$ та $\{-m, m\}$ відповідно.

Побудуємо процес $\{Y(k), k \geqslant 0\}$ наступним чином.

Покладемо $Y(k) := |X(x_0, k)| - m$, $k = 0, \ldots, \tau_1$. Цим ми одержуємо частину траєкторії Y, яка закінчилась в момент τ_1 потраплянням в точку нуль. Покладемо

$$Y(\tau_1 + 1) := 1,$$
$$Y(\tau_1 + 1 + k) := |X(x_0, \sigma_1 + k)| - m, \qquad k = 1, \ldots, \tau_2{-}\sigma_1,$$
$$Y(\tau_1 + 1 + \tau_2 - \sigma_1 + 1) := 1,$$
$$Y(\tau_1 + 1 + \tau_2 - \sigma_1 + 1 + k) := |X(x_0, \sigma_2 + k)| - m, \qquad k = 1, \ldots, \tau_3{-}\sigma_2,$$
$$Y(\tau_1 + 1 + \tau_2 - \sigma_1 + 1 + \tau_3 - \sigma_2 + 1) := 1,$$

і так далі.

Легко бачити, що $\{Y(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ — симетричне випадкове блукання на $\mathbb{Z}_+$ з відбиттям в нулі, тобто

$$\mathsf{P}(Y(k+1) = i \pm 1 / Y(k) = i) = 1/2, \quad i \neq 0; \qquad \mathsf{P}(Y(k+1) = 1 / Y(k) = 0) = 1.$$

Помітимо, що послідовність $\{Y(k)\}$ будувалася по тій частині траєкторії $\{X(k)\}$, яка знаходиться поза мембраною $[-m, m]$. По іншій частині траєкторії X побудуємо послідовність $\{Z(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$:

$$Z(0) := m,$$
$$Z(k) := X(x_0, \tau_1 + k), \qquad k = 1, \ldots, \sigma_1 - \tau_1,$$
$$Z(\sigma_1 - \tau_1 + 1) := m \operatorname{sign}(Z(\sigma_1 - \tau_1)),$$
$$Z(\sigma_1 - \tau_1 + 1 + k) := X(x_0, \tau_2 + k), \qquad k = 1, \ldots, \sigma_2 - \tau_2,$$
$$Z(\sigma_1 - \tau_1 + 1 + \sigma_2 - \tau_2 + 1) := m \operatorname{sign}(Z(\sigma_1 - \tau_1 + 1 + \sigma_2 - \tau_2)),$$

і так далі.

Неважко бачити, що Z є марковським ланцюгом на $\{-m{-}1, \ldots, m{+}1\}$ з перехідними імовірностями $p_{i,j}$ при $i = -m, \ldots, m$ та $p_{-m-1,-m} = p_{m+1,m} = 1$.

Траєкторії процесів Y і Z визначаються по різним ланкам траєкторії маркового ланцюга X. Можна перевірити, що процеси Y та Z незалежні. Таким чином, по траєкторіях процесу X ми побудували пару незалежних процесів Y та Z.

Навпаки, якщо Y — модуль симетричного випадкового блукання, а Z — незалежний з Y марковський ланцюг на $\{-m-1,\ldots,m+1\}$ з відповідними перехідними імовірностями, то по них можна однозначно побудувати послідовність $\widetilde{X}$ (яка буде мати такий самий розподіл, що й X), склеюючи по черзі відповідні екскурсії процесів Y та Z наступним чином.

Позначимо η_k та ζ_k — моменти k-го досягнення точки нуль процесом Y та множини $\{-m-1,m+1\}$ процесом Z відповідно. Тоді в ролі першої частини траєкторії нового процесу $\widetilde{X}$ ми візьмемо частину траєкторії процеса Y до моменту η_1 та зсунемо її на m одиниць вгору (нагадаємо, $x_0 > m > 0$). В ролі наступної частини траєкторії $\widetilde{X}$ візьмемо ділянку траєкторії Z від 0 до ζ_1. Далі знову підставляємо ділянку траєкторії Y: візьмемо екскурсію процесу Y від η_k+1 до η_{k+1} та зсунемо на m одиниць вгору. Якщо $\operatorname{sign}(Z(\zeta_k))=-1$, то відобразимо цю частину траєкторії симетрично відносно осі Ot. Далі знов підставляємо траєкторію Z від ζ_1+1 до ζ_2, і так далі. Завдяки таким зсуву та відображенню отримана траєкторія виходить неперервною.

Неважко бачити, що побудований таким чином процес $\widetilde{X}$ еквівалентний вихідному процесу X. Тобто така побудова є взаємнооднозначною.

Введемо послідовність "Y зі знаком":

$$Y'(k) := \operatorname{sign}(Z(\zeta_j))Y(k), \qquad k=\eta_j,\ldots,\eta_{j+1},\ j\geqslant 1.$$

Довизначимо всі процеси лінійно для всіх $t\geqslant 0$ так само, як і X. Далі ми покажемо, що послідовність процесів $Y'_n=\{\frac{1}{\sqrt{n}}Y'(nt), t\geqslant 0\}$ слабко збігається до косого броунового руху, а потім переконаємось, що границя послідовності $\{X_n\}$ буде такою ж самою.

Зауважимо, що "зіпсована" (тобто несиметрична) точка в блуканні Y' лише одна, але застосовувати до Y' результат Гарісона—Шепа [3] ми не можемо, оскільки Y' не є ланцюгом Маркова. Дійсно, імовірності переходу з точки нуль залежать від того, з якого боку в неї потрапило блукання.

3.2. **Слабка збіжність допоміжної послідовності.** Дослідимо розподіли Y'. Нехай $0<a<b$. Позначимо через $r(n)$ кількість відвідувань блуканням Y точки нуль за час n. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(Y'(n)\in[a,b]) &= \mathsf{P}\big(Y(n)\in[a,b], \operatorname{sign}(Z(\zeta_{r(n)}))=+1\big)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}\big(Y(n)\in[a,b], \operatorname{sign}(Z(\zeta_k))=+1, r(n)=k\big).\end{aligned}$$

(Тут і далі суми по кількостях повернень для простоти записів беруться від 0 до n, хоча ненульовими можуть бути не більше першої половини доданків.)

Перший доданок (тобто при $k=0$) цієї суми — це імовірність для $\{Y(n)\}$ потрапити в $[a,b]$, не потрапляючи до того в нуль. Ця ймовірність знаходиться за допомогою принципу відбиття (див. напр. [1], Гл.III, §2):

$$\mathsf{P}(Y(n)\in[a,b],\ r(n)=0)=\mathsf{P}(S(n)\in[a,b])-\mathsf{P}(S(n)\in[-b,-a]).$$

Тоді

$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y([nt])\in[a,b], r(nt)=0\right)\to\int_a^b(\varphi_t(x-x_0)+\varphi_t(x+x_0))dx, \qquad n\to\infty.$$

Для знаходження границі виразу

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y([nt])\in[a,b], \operatorname{sign}(Z(\zeta_k))=+1,\ r(nt)=k\right)\\ &\quad=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y([nt])\in[a,b], r(nt)=k\right)\cdot\mathsf{P}(\operatorname{sign}(Z(\zeta_k))=+1)\end{aligned}$$

застосуємо теорему Тьопліца. Наведемо тут одне її формулювання, яке буде зручне для подальшого використання.

Теорема. *Нехай* s_n, $a_{n,k}$ *— невід'ємні числа, такі що*

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = s$;
2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} = A$;
3) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$, $k \geqslant 1$.

Тоді $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} s_k = As$.

Покладемо в теоремі Тьопліца $s_k = \mathsf{P}(\mathrm{sign}(Z(\zeta_k)) = +1)$ та

$$a_{n,k} = \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Y([nt]) \in [a,b], r(nt) = k\right).$$

Неважко перевірити, що послідовність $\{Z'(k) = \operatorname{sign} Z(\zeta_k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ є ланцюгом Маркова. Нехай імовірності α та β (див. теорему 1) додатні та менші за одиницю (інші випадки розглядаються тривіально). Тоді ланцюг $\{Z'(k)\}$ є однорідним та аперіодичним, а отже, існує стаціонарний розподіл (q, p), причому $\lim_{n\to\infty} s_n = p$. Ми знайдемо цей розподіл в кінці доведення.

Розглянемо тепер суму $\sum_{k=1}^n a_{n,k}$. Помітимо, що

$$\sum_{k=1}^n a_{n,k} = \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Y([nt]) \in [a,b],\ r(nt) > 0\right).$$

Тоді із принципу відбиття випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} = 2\int_a^b \varphi_t(x + x_0)\, dx.$$

Покажемо нарешті, що $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$. Дійсно, імовірність

$$a_{n,k} = \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Y([nt]) \in [a,b], r(nt) = k\right),$$

очевидно, не перевищує імовірність $\mathsf{P}(r(nt) = k)$. Нехай $\tau_1 = \tau_1(n)$ — момент першого потрапляння в нуль блуканням $\{Y_n(k), k \geqslant 0\}$ зі стартом в точці $[x_0\sqrt{n}]$. Позначимо через $r_0 = r_0(n)$ кількість повернень в нуль блуканням $\{S'(k) = S(\tau_1 + k), k \geqslant 0\}$ (тобто блуканням зі стартом в точці 0) за час n. Тоді

$$\begin{aligned} a_{n,k} &\leqslant \mathsf{P}(r(nt) = k) \leqslant \mathsf{P}(1 \leqslant r(nt) \leqslant k) \\ &= \mathsf{P}(1 \leqslant r(nt) \leqslant k, \tau_1(n) < n(t-\delta)) + \mathsf{P}(1 \leqslant r(nt) \leqslant k, \tau_1(n) \geqslant n(t-\delta)) \\ &\leqslant \mathsf{P}(r_0(n\delta) \leqslant k) + \mathsf{P}(n(t-\delta) \leqslant \tau_1(n) \leqslant nt). \end{aligned}$$

Із результатів [1, Гл.III §4,§6] випливає, що права частина останньої нерівності може бути зроблена як завгодно малою для достатньо великих n, тобто $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$.

Отже, за теоремою Тьопліца,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} s_k = 2p \int_a^b \varphi_t(x + x_0)\, dx.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Y'([nt]) \in [a,b]\right) = \int_a^b \left(\varphi_t(x - x_0) + (2p-1)\varphi_t(x + x_0)\right) dx. \tag{1}$$

Аналогічно знаходиться відповідний граничний розподіл при від'ємних a і b. Враховуючи, що імовірність потрапити в $[a,b]$, не заходячи в нуль, при цьому дорівнює нулю, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Y'([nt]) \in [a,b]\right) = 2q \int_a^b \varphi_t(x - x_0)\, dx, \qquad a < b < 0, \tag{2}$$

де $q = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{sign}(Z(\zeta_n)) = -1)$.

Помітимо, що $2p-1=p-q$. Тоді з (1) та (2) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}Y'([nt])\in[a,b]\big)$$
$$=\int_a^b \big(\varphi_t(x-x_0)+(p-q)\operatorname{sign}(x)\varphi_t(|x|+|x_0|)\big)dx, \qquad -\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty.$$

Двовимірні розподіли досліджуються аналогічно, знов розбиваючи імовірність $\mathsf{P}\big(Y'(nt_1)\in[a_1,b_1], Y'(nt_2)\in[a_2,b_2]\big)$ на (тепер подвійну) суму по можливих кількостях k_1 та k_2 повернень в нуль за час nt_1 та за подальший час $n(t_2-t_1)$ відповідно. Виділимо знов з цієї суми доданки при $k=0$:

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{n} = \sum_{k_1=0}^{0}\sum_{k_2=0}^{0} + \sum_{k_1=0}^{0}\sum_{k_2=1}^{n} + \sum_{k_2=0}^{0}\sum_{k_1=1}^{n} + \sum_{k_1,k_2=1}^{n}.$$

Границі для перших трьох сум знаходяться так само, як і при одновимірних розподілах (за допомогою принципу відбиття та теореми Тьопліца), а для дослідження останньої суми доведемо наступний наслідок з теореми Тьопліца.

Теорема. *Нехай s'_n, s''_n та $a_n(k_1,k_2)$ — невід'ємні числа, такі що*

1) $\lim_{n\to\infty} s'_n = s'$, $\lim_{n\to\infty} s''_n = s''$;
2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n a_n(k_1,k_2) = A$;
3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k_1=1}^n a_n(k_1,k_2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k_2=1}^n a_n(k_1,k_2) = 0,\ k_1,k_2\geqslant 1.$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n a_n(k_1,k_2)s'_{k_1}s''_{k_2} = As's''.$$

Доведення. Позначимо

$$a'_{n,k_1} = \sum_{k_2=1}^n a_n(k_1,k_2)$$

і

$$a''_{n,k_2} = \sum_{k_1=1}^n a_n(k_1,k_2)s'_{k_1}.$$

Тоді для a'_{n,k_1} та s'_{k_1} виконуються умови теореми Тьопліца, тому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k_1=1}^n a'_{n,k_1}s'_{k_1} = As'.$$

Помітимо, що $\sum_{k_1=1}^n a'_{n,k_1}s'_{k_1} = \sum_{k_2=1}^n a''_{n,k_2}$. Крім того, за теоремою Тьопліца,

$$\lim_{n\to\infty} a''_{n,k_2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k_1=1}^n a_n(k_1,k_2)s'_{k_1} = 0\cdot s' = 0, \qquad k_2=1,\dots,n.$$

Таким чином, застосувавши теорему Тьопліца ще один раз, одержимо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k_2=1}^n\sum_{k_1=1}^n a_n(k_1,k_2)s'_{k_1}s''_{k_2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k_2=1}^n a''_{n,k_2}s''_{k_2} = As's''.$$

Теорему доведено. □

Цей наслідок з теореми Тьопліца можна інтерпретувати як "подвійну" теорему Тьопліца, наслідком з якої буде "потрійна", і так далі.

Таким чином, для дослідження скінченновимірних розподілів, аналогічно до одновимірних, відповідні імовірності розбиваються на суми по можливих кількостях відвідувань точки нуль і застосовуються відповідні "кратні" теореми Тьопліца: для подвійних сум — "подвійна", для потрійних — "потрійна", і так далі.

Для доведення слабкої збіжності послідовності

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}Y'(nt), t\in[0,1]\right\}$$

в $\mathrm{C}[0,1]$ тепер достатньо показати її відносну компактність.

Для відносної компактності послідовності $\{V_n(t), t\in[0,1]\}$ в $\mathrm{C}[0,1]$ необхідно й достатньо (див. [2], Т.8.2) виконання наступних двох умов:

(i) для довільного $\varepsilon>0$ існує таке число a, що для всіх $n\geqslant 1$

$$\mathsf{P}\left(|V_n(0)|>a\right)<\varepsilon;$$

(ii) для довільних $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ існують $\delta>0$ і n_0, такі що

$$\mathsf{P}\left(w_{V_n}(\delta)>\alpha\right)<\varepsilon, \qquad n\geqslant n_0,$$

де $w_f(\delta)=\sup_{|t-s|<\delta}|f(t)-f(s)|$ — модуль неперервності функції f.

Умова (i) очевидно виконується. Перевіримо умову (ii). З побудови Y' (див. кінець п. 3.1) випливає, що $|Y'|=Y=|S|$, де S — звичайне симетричне випадкове блукання; а також, що змінювати знак Y' може, лише коли Y дорівнює нулю. Тому

$$w_{Y_n'}(\delta)\leqslant 2w_{Y_n}(\delta)=2w_{|S_n|}(\delta)\leqslant 2w_{S_n}(\delta),$$

Тобто умова (ii) для послідовності Y_n' випливає з відповідної умови для послідовності S_n, яка є відносно компактною за теоремою Донскера.

Таким чином, доведено слабку збіжність послідовності процесів

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}Y'(nt), t\in[0,1]\right\}$$

до косого броунового руху $\{W_\gamma(t), t\in[0,1]\}$.

3.3. **Повернення до послідовності X_n.** Щоб показати, що послідовність процесів $X_n=\{\frac{1}{\sqrt{n}}X(nt), t\in[0,1]\}$ збігається до того ж граничного процесу, що і послідовність $\{\frac{1}{\sqrt{n}}Y'(nt), t\in[0,1]\}$, $n\geqslant 1$, нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $V_n(\cdot)\Rightarrow V(\cdot)$ в $\mathrm{C}[0,1]$. Припустимо, що $\{\eta_n(t), t\in[0,1]\}$ — послідовність неперервних по t процесів, таких що $\sup_t|\eta_n(t)|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $n\to\infty$. Тоді послідовність випадкових процесів $\{V_n'(t)=V_n(t)+\eta_n(t), t\in[0,1]\}$ слабко збігається в $\mathrm{C}[0,1]$ до $\{V(t), t\in[0,1]\}$.*

Лема 2. *Нехай $V_n(\cdot)\Rightarrow V(\cdot)$ в $\mathrm{C}[0,1]$. Припустимо, що $\{\theta_n(t), t\in[0,1]\}$ — послідовність неперервних по t процесів, таких що $0\leqslant\theta_n(t)\leqslant t$, $t\in[0,1]$ і $\sup_t\theta_n(t)\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $n\to\infty$. Тоді послідовність випадкових процесів $\{V_n'(t)=V_n(t-\theta_n(t)), t\in[0,1]\}$ слабко збігається в $\mathrm{C}[0,1]$ до $\{V(t), t\in[0,1]\}$.*

Для доведення леми 2 достатньо перевірити, що $\sup_t|V_n(t-\theta_n(t))-V_n(t)|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $n\to\infty$, і далі використати лему 1.

Оскільки для довільних $|t-s|<\delta$

$$|V_n(t)-V_n(s)|\leqslant\sup_{|t-s|<\delta}|V_n(t)-V_n(s)|=w_{V_n}(\delta),$$

то оцінка

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_t|V_n(t-\theta_n(t))-V_n(t)|>\alpha\right)\\
&\quad=\mathsf{P}\left(\sup_t|V_n(t-\theta_n(t))-V_n(t)|>\alpha, \sup_t\theta_n(t)\leqslant\delta\right)\\
&\qquad+\mathsf{P}\left(\sup_t|V_n(t-\theta_n(t))-V_n(t)|>\alpha, \sup_t\theta_n(t)>\delta\right)\\
&\quad\leqslant\mathsf{P}(w_{V_n}(\delta)>\alpha)+\mathsf{P}\left(\sup_t\theta_n(t)>\delta\right)
\end{aligned}$$

виконується для довільних α і δ.

Отже, якщо для заданних $\alpha > 0$ та $\varepsilon > 0$ вибрати $\delta > 0$ та n_1, так щоб для довільних $n \geqslant n_1$ виконувалось (див. (ii) в кінці п.3.2)

$$\mathsf{P}(w_{V_n}(\delta) > \alpha) < \varepsilon/2,$$

а для ε та δ вибрати n_2, таке щоб для довільних $n \geqslant n_2$ виконувалось (за умовою леми)

$$\mathsf{P}\left(\sup_t \theta_n(t) > \delta\right) < \varepsilon/2,$$

то для довільних $n \geqslant n_1 \vee n_2$ маємо

$$\mathsf{P}\left(\sup_t |V_n(t - \theta_n(t)) - V_n(t)| > \alpha\right) < \varepsilon.$$

Тоді $V_n'(\cdot)$ збігається до $V(\cdot)$ за лемою 1 як сума $V_n(\cdot)$ та $V_n(\cdot - \theta_n(\cdot)) - V_n(\cdot)$.

Лему доведено.

Застосуємо лему 2 для $V_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} Y'(nt)$, а в ролі $\theta_n(t)$ візьмемо долю часу, проведеного процесом X в мембрані. Для того, щоб скористатися лемою, ми маємо показати, що $\sup_t \theta_n(t)$ прямує при $n \to \infty$ до нуля за імовірністю.

Нехай $r(n)$ — кількість відвідувань точки нуль блуканням $S(k) = S([\sqrt{n}x_0], k)$ зі стартом в точці $[\sqrt{n}x_0]$ за n кроків, а $\zeta_k' = \zeta_{k+1} - \zeta_k$ — довжини екскурсій процеса Z всередині мембрани. Нехай також $r_0(n)$ — кількість повернень в нуль блуканням $S'(k) := S(\tau_1 + k)$, $k \geqslant 0$, де $\tau_1 = \tau_1(n)$ — момент першого потрапляння в нуль блуканням $S([\sqrt{n}x_0], k)$. Тоді (оскільки $r(n) = r_0(n - \tau_1) \leqslant r_0(n)$) маємо оцінку:

$$\theta_n(t) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r(n)} \zeta_k' \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \zeta_k'.$$

Покажемо, що вираз

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \zeta_k' = \frac{r_0(n)}{n} \frac{1}{r_0(n)} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \zeta_k'$$

в правій частині оцінки прямує за імовірністю до нуля.

Оскільки $\frac{r_0(n)}{\sqrt{n}}$ збігається за розподілом до модуля нормальної випадкової величини (див. [1]), то відношення $\frac{r_0(n)}{n}$, очевидно, прямує за імовірністю до нуля.

Дослідимо тепер асимптотику

$$\frac{1}{r_0(n)} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \zeta_k'.$$

Згрупуємо доданки так, щоб кожна група $\widetilde{\zeta_k'} = \zeta_{i_k}' + \cdots + \zeta_{i_{k+1}-1}'$ була часом виходу з мембрани вгору. Кількість таких групок, очевидно, не перевищує $r_0(n)$, тому виконується оцінка

$$\frac{1}{r_0(n)} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \zeta_k' \leqslant \frac{1}{r_0(n)} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \widetilde{\zeta_k'},$$

в правій частині якої стоїть сума незалежних однаково розподілених випадкових величин $\widetilde{\zeta_k'}$. Оскільки $\mathsf{E}\,\widetilde{\zeta_k'} < \infty$, $\widetilde{\zeta_k'}$ не залежать від $r_0(n)$, та $r_0(n) \to \infty$, $n \to \infty$ м.н., то

$$\frac{1}{r_0(n)} \sum_{k=1}^{r_0(n)} \widetilde{\zeta_k'} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\,\widetilde{\zeta_1'}, \qquad n \to \infty.$$

А отже, відношення $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r(n)} \zeta_k'$ прямує за імовірністю до нуля.

Тоді за лемами 1, 2,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}X(nt) = \frac{1}{\sqrt{n}}Y'(n(t-\theta_n(t))) + \frac{1}{\sqrt{n}}(X(nt) - Y'(n(t-\theta_n(t))))$$

збігається до $W_\gamma(t)$, оскільки $|X(nt) - Y'(n(t-\theta_n(t)))| \leqslant m$ за побудовою.

Залишається тільки вказати параметри отриманого косого броунового руху.

У випадку, коли всі стани ланцюга $\{X(k), k \in \mathbb{Z}_+\}$ сполучні, стаціонарний розподіл (q,p) марковського ланцюга

$$Z'(k) = \operatorname{sign}(Z(\zeta_k)) = Z(\zeta_k)/(m+1)$$

знаходиться як розв'язок (лінійно залежної) системи

$$(q,p)\begin{pmatrix} 1-\rho_{-m} & \rho_{-m} \\ 1-\rho_m & \rho_m \end{pmatrix} = (q,p),$$

для якого $q+p=1$, де ρ_i, $i=-m,\dots,m$ — імовірності з i потрапити в $m+1$, не потрапляючи в $m-1$ — шукаються з системи

$$\rho_i = p_{i,m+1} + \sum_{j=-m}^{m} p_{i,j}\rho_j, \qquad i=-m,\dots,m.$$

Таким чином,

$$p = \frac{\rho_{-m}}{1-\rho_m+\rho_{-m}}, \qquad q = \frac{1-\rho_m}{1-\rho_m+\rho_{-m}}.$$

Перейшовши до позначень теореми 1 ($\rho_{-m}=\alpha$, $1-\rho_m=\beta$), отримуємо потрібний результат:

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad q = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Якщо умови 1) та 2) теореми 1 одночасно виконуються тільки для стану $m+1$, то, очевидно, $p=1$.

Література

1. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения*, издание второе, т. 1, "Мир", Москва, 1967.
2. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
3. J. M. Harrison and L. A. Shepp, *On skew Brownian motion*, Ann. Probab. **9(2)** (1981), 309–313.
4. М. І. Портенко, *Дифузія в середовищах з напівпрозорими мембранами*, Труди Інституту математики НАН України, Секція "Теорія ймовірностей та математична статистика", т. 8, Київ, 1994.
5. Р. А. Минлос, Е. А. Жижина, *Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке*, УМН **52:2(314)** (1997), 87–100.
6. A. S. Cherny, A. N. Shiryaev, and M. Yor, *Limit behavior of the "horizontal–vertical" random walk and some extensions of the Donsker–Prokhorov invariance principle*, Theory Probab. Appl. **47** (2003), no. 3, 377–394.
7. J. K. Brooks and R. V. Chacon, *Diffusions as a limit of stretched Brownian motions*, Advances in Mathematics **49** (1983), 109–122.
8. M. I. Freidlin and A. D. Wentzel, *Diffusion processes on an open book and the averaging principle*, Stochastic Processes and their Applications **113** (September 2004), no. 1, 101–126.
9. A. M. Kulik, *A limit theorem for diffusions on graphs with variable configuration*, ArXive:math.PR/0701632.

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська 3, 01601, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: apilip@imath.kiev.ua

Національний Технічний університет України "КПІ", проспект Перемоги 37, 03056, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: npuxodbko@gmail.com

Надійшла 03/09/2010