Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 140–149

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 140–149

ЛОКАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МУЛЬТИДРОБОВОГО СТІЙКОГО ПОЛЯ

УДК 519.21

Г. ШЕВЧЕНКО

Анотація. Визначено анізотропне гармонізоване мультидробове стійке поле. Доведено його неперервність. Встановлено існування та квадратичну інтегрованість локального часу. У гауссівському випадку доведено неперервність локального часу за сукупністю змінних.

Аннотация. Дано определение анизотропного мультидробового гармонизируемого устойчивого поля. Доказана его непрерывность. Установлены существование и квадратичная интегрируемость локального времени. В гауссовском случае доказана непрерывность локального времени по совокупности переменных.

Abstract. The anisotropic harmonisable multifractional stable field is defined. Its continuity is proved. Existence and square integrability of local time are established. In Gaussian case, joint continuity of local time is proved.

1. Вступ

Дробові процеси є одним з найбільш популярних інструментів моделювання явища довгострокової залежності в природничих науках, фінансовій математиці тощо. Тому дробовий броунівський рух і дробові броунівські поля є об'єктом значної кількості досліджень. Докладний огляд літератури за цією тематикою міститься у [11]. Дробові броунівські рух та поле як моделі мають декілька недоліків. По-перше, вони мають стаціонарні прирости, тому не дозволяють моделювати суттєво неоднорідні процеси та поля. По-друге, вони є самоподібними, у той час як за емпіричними спостереженнями більшість процесів на фінансових ринках не є самоподібними: на великому інтервалі часу траєкторії є більш "гладкими", ніж на маленькому.

У зв'язку з вказаними недоліками останнім часом набули популярності мультидробові процеси та поля. Зокрема, було запропоновано декілька мультидробових узагальнень дробового броунівського руху, які базуються на різних зображеннях дробового броунівського руху: лінійний мультидробовий броунівський рух [12], мультидробовий броунівський рух типу Вольтерри [13], гармонізований мультидробовий броунівський рух [3]. Також були досліджені різні мультидробові поля [2, 7, 9]

Дану статтю присвячено анізотропному гармонізованому мультидробовому стійкому (N, d)-полю. Вона логічно продовжує дослідження статті [5], де розглядался дійсний гармонізований мультидробовий процес, та робіт [15, 16], у якій вивчалися дробові броунівські та стійкі поля.

Основну увагу в статті приділено локальним властивостям реалізацій: неперервності поля, існуванню та регулярності локального часу.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G52, 60G17; Secondary 60G22, 60G18.

Ключові слова і фрази. Стійкий процес, гармонізований процес, мультидробовість, локальний час, локальна недермінованість.

Автор вдячний Європейській комісії за підтримку досліджень у рамках програми "Marie Curie Actions", грант PIRSES-GA-2008-230804.

Статтю влаштовано наступним чином. Далі у цьому розділі дано необхідні відомості про стійкі величини та наведено позначення. У другому розділі визначається анізотропне гармонізоване мультидробове стійке поле та досліджується неперервність траєкторій. У третьому розділі доведено існування локального часу цього поля. В гауссівському випадку доведено властивість секторної локальної недетермінованості, як наслідок доведено неперервність локального часу за сукупністю змінних.

1.1. **Стійкі випадкові величини та сімейства.** У цій статті розглядатимуться лише симетричні α-стійкі (SαS) випадкові величини з $\alpha \in (1,2]$. Більш докладну інформацію про стійкі величини можна знайти у [14]. Нагадаємо, що випадкова величина ξ є SαS з параметром масштабу σ^α, $\sigma > 0$, якщо її характеристична функція

$$\mathsf{E}\left[\, e^{i\lambda\xi}\,\right] = e^{-|\sigma\lambda|^\alpha}.$$

Для стійкої величини ξ визначимо квазінорму $\|\xi\|_\alpha^\alpha = -\ln \mathsf{E}\left[\, e^{i\xi}\,\right]$.

Для побудови стійких випадкових величин часто використовують *комплексну інваріантну відносно поворотів* SαS міру μ на $\mathbb{R}^N$. За означенням це σ-адитивна міра на $\mathbb{R}^N$ з наступними властивостями:

(1) для будь-якої борельової множини $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ випадкова величина $\operatorname{Re}\mu(A)$ є SαS з параметром масштабу, що дорівнює $\lambda_N(A)$, мірі Лебега множини A;
(2) для будь-якої $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ величина $\mu(A)$ є *інваріантною відносно поворотів*, тобто для будь-якого $\theta \in \mathbb{R}$ розподіл $e^{i\theta}\mu(A)$ збігається з розподілом $\mu(A)$;
(3) для неперетинних множин $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ значення $\mu(A_1), \dots, \mu(A_n)$ є незалежними.

Для функції $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ з

$$\|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^\alpha \, dx < \infty$$

можливо визначити стохастичний інтеграл

$$I(f) = \int_{R^N} f(x)\mu(dx),$$

при цьому $\operatorname{Re} I(f)$ є випадковою SαS величиною з параметром масштабу $\|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha$. Іншими словами, $\|\operatorname{Re} I(f)\|_\alpha^\alpha = \|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha$, тобто дійсна частина стохастичного інтегралу $I(\cdot)$ ізометрично відображає $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ у певну множину стійких випадкових величин.

Нехай $\mathbf{T}$ — деяка параметрична множина. Для вимірної функції $f\colon \mathbf{T} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ такої, що для всіх $t \in \mathbf{T}$ функція $f(t,\cdot) \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, можна визначити випадкове поле $\{X(t), t \geq 0\}$ формулою

$$X(t) = \operatorname{Re} \int_{R^N} f(t,x)\mu(dx). \tag{1.1}$$

Має місце наступне зображення ЛеПажа [8] (див. також [10]). Нехай є довільна додатна щільність φ розподілу на $\mathbb{R}^N$ і три незалежні набори $\{\Gamma_k, k \geq 1\}$, $\{\xi_k, k \geq 1\}$, $\{g_k, k \geq 1\}$ випадкових елементів, причому

- $\{\Gamma_k, k \geq 1\}$ — послідовність моментів стрибків пуассонівського процесу з одиничною інтенсивністю;
- $\{\xi_k, k \geq 1\}$ — незалежні випадкові вектори з щільністю φ;
- $\{g_k, k \geq 1\}$ — незалежні інваріантні відносно поворотів комплекснозначні нормально розподілені величини з $\mathsf{E}\left[\, |\operatorname{Re} g_k|^\alpha \,\right] = 1$.

Тоді поле $\{X(t), t \geq 0\}$, визначене формулою (1.1), має такі самі скінченновимірні розподіли, як і

$$X'(t) = C_\alpha \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} f(t, \xi_k) g_k, \tag{1.2}$$

де $C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx\right)^{1/\alpha}$, причому ряд майже напевно збігається для всіх t.

1.2. **Позначення.** Для точок $s = (s_1, \dots, s_n)$ та $t = (t_1, \dots, t_n)$ будемо писати $s \leq t$, якщо $s_i \leq t_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Для $a, b \in \mathbb{R}^n$ позначимо

$$[a, b] = \{s \in \mathbb{R}^n \colon a \leq s \leq b\}, \qquad (0, b] = \{s \in (0, \infty)^n \colon s \leq b\}.$$

Через $\langle x, y\rangle$ позначимо скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. В залежності від контекста $|\cdot|$ позначатиме і модуль дійсного або комплексного числа, і евклідову норму на $\mathbb{R}^n$, а 0 позначатиме і нуль, і нульовий вектор в $\mathbb{R}^n$. Лінійну оболонку векторів $x^1, \dots, x^m$ позначатимо $\mathrm{span}\left\{x^1, \dots, x^m\right\}$.

Всі несуттєві сталі, значення яких залежить лише від фіксованих у статті параметрів, будемо позначати літерою C.

2. Означення та властивості траєкторій дійсного гармонізованого мультидробового стійкого поля

Нехай $M = (\mu^1, \dots, \mu^d)$, де $\left\{\mu^i, i = 1, \dots, d\right\}$ — незалежні комплексні інваріантні відносно поворотів SαS міри на $\mathbb{R}^N$.

Візьмемо фіксоване $T \in \mathbb{R}^N$. Для даної неперервної функції $H : [0, T] \to (0, 1)^N$ *анізотропне гармонізоване мультидробове стійке* (N, d)*-поле* на $[0, T]$ з функцією Хюрста H та параметром стійкості α визначимо як

$$Z(t) = \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{k=1}^{N} \frac{e^{it_k x_k} - 1}{|x_k|^{1/\alpha + H_k(t)}} M(dx). \tag{2.1}$$

Випадок $\alpha = 2$, у якому M має гауссівський розподіл, варто розглянути окремо. У даному випадку Z назвемо *анізотропним гармонізованим мультидробовим броунівським* (N, d)*-полем* з функцією Хюрста H.

В подальшому функція H буде фіксованою. Щодо неї будемо припускати, що вона задовольняє умову Гельдера

$$|H(t) - H(s)| \leq C\,|t - s|^\gamma$$

з показником $\gamma > \max_{\substack{t \in [0,T] \\ k=1,\dots,N}} H_k(t)$.

Позначимо $H_k' = \min_{t \in [0,T]} H_k(t)$, $H_k'' = \max_{t \in [0,T]} H_k(t)$, і нехай для $h \in (0, 1)$, $s \in [0, \infty)$, $y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^N$

$$l_h(s, y) = \frac{e^{isy} - 1}{|y|^{1/\alpha + h}}, \qquad f(t, x) = \prod_{k=1}^{N} l_{H_k(t)}(t_k, x_k),$$

$$f_j(x) = \prod_{\substack{k=1,\dots,n, \\ k \neq j}} \frac{|x_k| \wedge 1}{|x_k|^{1/\alpha}} (|x_k|^{-H_k'} \vee |x_k|^{-H_k''}),$$

$$\rho'(t, s) = \sum_{k=1}^{N} |t_k - s_k|^{H_k''}, \qquad \rho''(t, s) = \sum_{k=1}^{N} |t_k - s_k|^{H_k'}.$$

Певна "неузгодженість" в останніх позначеннях пов'язана с тим, що

$$\rho'(t, s) \leq C \rho''(t, s).$$

2.1. **Оцінки приростів поля.**

Теорема 2.1. *Існують такі сталі $C_1, C_2 > 0$, що для будь-яких достатньо близьких $s, t \in [0, T]$ та $k = 1, \dots, N$ виконано*

$$C_1 \rho'(t,s) \le \|Z_k(t) - Z_k(s)\|_\alpha \le C_2 \rho''(t,s). \tag{2.2}$$

Доведення. Без обмеження загальності можна взяти $k = 1$. Для $H = (H_1, \dots, H_N)$ позначимо

$$X^H(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{k=1}^N \frac{e^{it_k x_k} - 1}{|x_k|^{1/\alpha + H_k}} \mu^1(dx),$$

тоді $Z_1(t) = X^{H(t)}(t)$.

Для того, щоб одержати оцінку згори, запишемо

$$\|Z_1(t) - Z_1(s)\|_\alpha \le \left\| X^{H(s)}(t) - X^{H(s)}(s) \right\|_\alpha + \left\| X^{H(t)}(t) - X^{H(s)}(t) \right\|_\alpha.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned}
\left\| X^{H(t)}(t) - X^{H(s)}(t) \right\|_\alpha^\alpha &\le C \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N \frac{\left|e^{it_j x_j} - 1\right|^\alpha}{|x_j|} \left| |x_j|^{-H_j(t)} - |x_j|^{-H_j(s)} \right|^\alpha f_j(x) dx \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N \frac{(|x_j| \wedge 1)^\alpha}{|x_j|} |\ln |x_j|| \left(|x_j|^{-H_j'} \vee |x_j|^{-H_j''} \right)^\alpha |H_j(t) - H_j(s)|^\alpha f_j(x) dx \\
&\le C |H_j(t) - H_j(s)|^\alpha \le C |t - s|^{\gamma\alpha}.
\end{aligned}$$

Вираз $X^{H(s)}(t) - X^{H(s)}(s)$ є приростом гармонізованого фрактального (не мультидробового) стійкого поля, розглянутого в статті [15]. У Теоремі 3.5 цітованої статті доведено, що для достатньо близьких $t, s \in [0, T]$

$$c_1 \sum_{k=1}^N |t_k - s_k|^{H_k} \le \left\| X^H(t) - X^H(s) \right\|_\alpha \le c_2 \sum_{k=1}^N |t_k - s_k|^{H_k}.$$

Хоча сталі в даній нерівності залежать від H, але, як неважко помітити з доведення цього факту у [15], вони є обмеженими при наших припущеннях відділеності параметрів Хюрста від 0 та 1, тому ми можемо вважати їх універсальними. Таким чином, для достатньо близьких $t, s \in [0, T]$

$$\|Z_1(t) - Z_1(s)\|_\alpha \le C\rho''(t,s) + C|t-s|^\gamma \le C\rho''(t,s).$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\|Z_1(t) - Z_1(s)\|_\alpha &\ge \left\| X^{H(s)}(t) - X^{H(s)}(s) \right\|_\alpha - \left\| X^{H(t)}(t) - X^{H(s)}(t) \right\|_\alpha \\
&\ge C\left(\rho'(t,s) - C|t-s|^\gamma\right) \ge C\rho'(t,s). \quad \square
\end{aligned}$$

2.2. **Неперервність.** Доведення наступного твердження використовує ідеї з [8] і аналогічне наведеному у [5] доведенню неперервності дійсного гармонізованого мультидробового процесу. Позначимо $H' = \min_{k=1,\dots,N} H_k'$.

Теорема 2.2. *Поле X має модифікацію з майже напевне неперервними реалізаціями. Більше того, для всіх $\varepsilon > 0$ має місце оцінка*

$$|Z(t) - Z(s)| \le C_\omega |t-s|^{H'} |\ln|t-s||^{1/\alpha + 1/2 + \varepsilon}$$

майже напевно для всіх $t, s \in [0, T]$.

Доведення. Застосуємо зображення ЛеПажа (1.2).

Для довільного фіксованого $\eta > 0$ покладемо

$$\varphi(x) = K_\eta \prod_{k=1}^{N} |x_k|^{-1} \left|\ln |x_k| + 1\right|^{-1-\eta},$$

де K_η — нормуючий множник. Нехай також $\{\Gamma_k, k \ge 1\}$, $\{\xi_k, k \ge 1\}$ — такі, як у формулі (1.2), а $\{G_k = (G_{k,1}, \dots, G_{k,d}, k \ge 1\}$ — вектори з незалежними комплекснозначними інваріантними відносно поворотів координатами, причому $\mathsf{E}\left[\,|\mathrm{Re}\, G_{k,i}|^\alpha\,\right] = 1$ для $i = 1, \dots, d$.

Тоді

$$Z'(t) = C_\alpha \,\mathrm{Re} \sum_{k\ge 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} f(t, \xi_k) G_k,$$

має такий самий розподіл, як X. Для спрощення позначень вважатимемо $Z' = Z$.

Умовний розподіл поля Z при фіксованих Γ та ξ є нормальним, причому

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[\,|Z(t) - Z(s)|^2 \mid \Gamma, \xi\,\right] &= C_\alpha^2 \sum_{k\ge 1} \Gamma_k^{-2/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-2/\alpha} \left|f(t,\xi_k) - f(s,\xi_k)\right|^2 \mathsf{E}\left[\,|G_k|^2\,\right] \\ &\le C a(u), \end{aligned}$$

де

$$a(u) = \sum_{k\ge 1} \Gamma_k^{-2/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-2/\alpha} \sup_{|t-s|<u} \left|f(t,\xi_k) - f(s,\xi_k)\right|^2.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} &\sup_{|t-s|<u} |f(t,x) - f(s,x)| \\ &\quad \le \sup_{|t-s|<u} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|x_j|^{1/\alpha}} \\ &\qquad\qquad \times \left(\frac{\left|e^{it_j x_j} - e^{is_j x_j}\right|}{|x_j|^{H_j(t)}} + \left|e^{is_j x_j} - 1\right| \left| \frac{1}{|x_j|^{H_j(t)}} - \frac{1}{|x_j|^{H_j(s)}} \right| \right) f_j(x) \\ &\quad \le C \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|^{-H_j'} \vee |x_j|^{-H_j''}}{|x_j|^{1/\alpha}} \\ &\qquad\qquad \times \big((u\,|x_j|) \wedge 1 + (|x_j| \wedge 1)\, \left|\ln |x_j|\right| \sup_{|t-s|<u} |H_j(t) - H_j(s)| \big) f_j(x) \\ &\quad \le C \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|^{-H_j'} \vee |x_j|^{-H_j''}}{|x_j|^{1/\alpha}} \big((u\,|x_j|) \wedge 1 + (|x_j| \wedge 1)\, \left|\ln |x_j|\right| u^\gamma \big) f_j(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Враховуючи цю оцінку, візьмемо математичне сподівання $\mathsf{E}_\xi\left[\,a(u)\,\right]$ відносно ξ:

$$\mathsf{E}_\xi\left[\,a(u)\,\right] \le C(I_1 + I_2) \sum_{k\ge 1} \Gamma_k^{-2/\alpha},$$

де

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|^{-2H_j'} \vee |x_j|^{-2H_j''}}{|x_j|^{2/\alpha}} \big((u\,|x_j|) \wedge 1 \big)^2 f_j(x)^2 \varphi(x)^{1-2/\alpha} dx,$$

$$I_2 = u^{2\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|^{-2H'} \vee |x_j|^{-2H''}}{|x_j|^{2/\alpha}} \big(|x_j| \wedge 1 \big)^2 \left|\ln |x_j|\right|^2 f_j(x)^2 \varphi(x)^{1-2/\alpha} dx.$$

Запишемо

$$I_1 \le C \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x_j|^{-2H_j'} \vee |x_j|^{-2H_j''}}{|x_j|\,|\ln|x_j|+1|^{(1+\eta)(1-2/\alpha)}} \big((u\,|x_j|)\wedge 1\big)^2$$
$$\times \prod_{k\ne j} \frac{(|x_k|\wedge 1)^2(|x_k|^{-2H_k'} \vee |x_k|^{-2H_k''})}{|x_k|\,|\ln|x_k|+1|^{(1+\eta)(1-2/\alpha)}} dx$$

та проінтегруємо за всіма змінними, крім x_j; замінимо також $z = ux_j$. Одержимо

$$I_1 \le Cu^{2H_j'} \int_{\mathbb{R}} \big(\,|z|^{-2H_j'-1} \vee |z|^{-2H_j''-1}\,\big)\,|\ln|z/u|+1|^{(1+\eta)(2/\alpha-1)}\,\big(\,|z|\wedge 1\big)^2 dz$$
$$\le Cu^{2H_j'}\,|\ln u|^{(1+\eta)(2/\alpha-1)}$$

Подібним чином маємо

$$I_2 \le Cu^{2\gamma} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x_j|^{-2H_j'} \vee |x_j|^{-2H_j''}}{|x_j|\,|\ln|x_j|+1|^{(1+\eta)(1-2/\alpha)}} \big(\,|x_j|\wedge 1\big)^2\,|\ln|x_j||^2$$
$$\times \prod_{k\ne j} \frac{(|x_k|\wedge 1)^2(|x_k|^{-2H_k'} \vee |x_k|^{-2H_k''})}{|x_k|\,|\ln|x_k|+1|^{(1+\eta)(1-2/\alpha)}} dx$$
$$\le Cu^{2\gamma}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}_\xi\,[\,a(u)\,] \le Cu^{2H'}\,|\ln u|^{(1+\eta)(2/\alpha-1)} \sum_{k\ge 1} \Gamma_k^{-2/\alpha}.$$

Завдяки посиленому закону великих чисел $\Gamma_j/j \to 1$, $j\to\infty$, майже напевно, тому, оскільки $2/\alpha > 1$, то $\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-2/\alpha} < \infty$. Звідси

$$\mathsf{E}_\xi\,[\,a(u)\,] \le C(\Gamma)u^{2H'}\,|\ln u|^{(1+\eta)(2/\alpha-1)}$$

майже напевно.

Визначимо $b(u) = u^{2H'}\,|\ln u|^{2(1+\eta)/\alpha}$. Маємо

$$\mathsf{E}_\xi\left[\sum_{n\ge1}\frac{a(2^{-n})}{b(2^{-n})}\right] \le C(\Gamma)\sum_{n\ge1} n^{-1-\eta},$$

тому для майже усіх ξ, Γ виконано $a(2^{-n})/b(2^{-n}) \to 0$, $n\to\infty$. Неважко бачити, що $b(2t) \le Cb(t)$, а функція $a(u)$ не спадає, тому з останньої збіжності маємо $a(u)/b(u) \to 0$, $u \to 0+$. Таким чином, для достатньо близьких t, s

$$\mathsf{E}\left[\,(Z(t)-Z(s))^2 \mid \Gamma,\xi\,\right] \le |t-s|^{2H'}\,|\ln|t-s||^{2(1+\eta)/\alpha}.$$

Оскільки поле Z має нормальний розподіл при фіксованих ξ та Γ, то, як добре відомо (див., наприклад, [1, с. 174],

$$|Z(t)-Z(s)| \le C_\omega\,|t-s|^{H'}\,|\ln|t-s||^{1/\alpha+\eta/\alpha+1/2},$$

що й потрібно довести. □

3. Локальний час для мультидробових полів

Нагадаємо, що для борельової підмножини $B \subset [0, T]$ *локальним часом* або *щільністю відвідання* випадкового поля $X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ називається похідна Радона–Нікодима $L(B, x) = dV(B, dx)/\lambda_d(dx)$ міри перебування

$$V_B(A) = \lambda_N(s \in B : X(s) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

За традицією ми позначатимемо $L(t, x) = L([0, t], x)$.

Теорема 3.1. *Якщо $d < \sum_{k=1}^N 1/H_k''$, то процес Z має локальний час $L(t, x)$, причому*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{E}\left[\, L(t, x)^2 \,\right] dx < \infty.$$

Доведення. Візьмемо довільну достатньо малу множину $I \subset [0, T]$, на якій виконується (2.2). За відомою формулою (див. [6])

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{E}\left[\, L(I, x)^2 \,\right] dx &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{E}\left[\, \exp\left\{ i \left\langle u, Z(s^1) - Z(s^2) \right\rangle \right\} \right] du\, ds^1 ds^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^2} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d \mathsf{E}\left[\, \exp\left\{ i u_k \big(Z_k(s^1) - Z_k(s^2) \big) \right\} \right] du\, ds^1 ds^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^2} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d \exp\left\{ - \left\| u_k \big(Z_k(s^1) - Z_k(s^2) \big) \right\|_\alpha^\alpha \right\} du\, ds^1 ds^2 \qquad (3.1) \\
&\le C \int_{I^2} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d \exp\left\{ - \left| u_k \right|^\alpha \rho'(s^1, s^2)^\alpha \right\} du\, ds^1 ds^2 \\
&\le C \int_{[0,t]^2} \rho'(s^1, s^2)^{-d} ds^1 ds^2.
\end{aligned}$$

тут ми врахували оцінку приростів (2.2) та незалежність компонент поля. За узагальненою нерівністю Коші,

$$\rho'(s^1, s^2) = \sum_{k=1}^N \left| s_k^1 - s_k^2 \right|^{H_k''} \ge \varkappa \prod_{k=1}^N \left| s_k^1 - s_k^2 \right|^{\frac{1}{\varkappa}} (H_k'')^{\frac{1}{\varkappa H_k''}} \ge C \prod_{k=1}^N \left| s_k^1 - s_k^2 \right|^{\frac{1}{\varkappa}},$$

де $\varkappa = \sum_{k=1}^N 1/H_k''$. Отже,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{E}\left[\, L(I, x)^2 \,\right] dx \le C \int_{[0,t]^2} \prod_{k=1}^N \left| s_k^1 - s_k^2 \right|^{-\frac{d}{\varkappa}} ds^1 ds^2 < \infty.$$

Розбиваючи $[0, t]$ на достатньо малі частини та використовуючи адитивність локального часу $L(B, x)$ за B, одержуємо бажане твердження. □

3.1. **Властивості локального часу в гауссівському випадку.** Розглянемо гауссівський випадок, тобто $\alpha = 2$. В даному випадку M — це комплекснозначна гауссівська міра з незалежними приростами. Візьмемо дещо модифіковану версію випадкового поля, а саме

$$Y(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} g(t, x) M(dx), \qquad (3.2)$$

де

$$g(t, x) = \prod_{k=1}^N \frac{1 - e^{-i t_k x_k}}{(-i x_k)^{H_k(t) + 1/2}}, \qquad (-ix)^K = |x|^K e^{-i\pi K \operatorname{sign} x / 2}.$$

Легко перевірити, що усі встановлені раніше результати для Z мають місце й для Y.

Наступна властивість, яку називають *секторною локальною недетермінованістю*, є містком для одержання багатьох результатів щодо випадкового поля Y.

Лема 3.2. *Для будь-якого* $n \geq 1$, $t^0 \in (0,T]$ *та будь-яких достатньо близьких* $t^1, t^2, \dots, t^n \in [t^0, T]$ *виконано*

$$\left\| Y_1(t^n) - \operatorname{span}\left\{ Y_1(t^1), \dots, Y_1(t^{n-1}) \right\} \right\|_2 \geq C_{t^0,n} \sum_{j=1}^{N} \min_{k=1,\dots,n-1} \left| t_j^n - t_j^k \right|^{H_j''}. \tag{3.3}$$

Доведення. У цьому доведенні ми будемо вважати n та точку t^0 фіксованими. Сталі, залежні лише від n, t^0 та інших фіксованих параметрів, позначатимемо просто C.

Перетворення Фур'є функції $g(t,x)$ за змінною x (див., наприклад, [5, Додаток A]) має вигляд

$$\widehat{g}(t,x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{\Gamma(H_k(t) + 1/2)} m_{H(t_k)}(t_k, x_k), \tag{3.4}$$

де $m_H(t,x) = (t_k - x_k)_+^{H_k - 1/2} - (-x_k)_+^{H_k - 1/2}$.

Нам потрібно для будь-яких $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$ та $t^1, \dots, t^n$ оцінити знизу

$$\left\| Y_1(t^n) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k Y_1(t^k) \right\|_2 = \left\| g(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k g(t^k, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

За тотожністю Парсеваля маємо

$$\left\| g(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k g(t^k, \cdot) \right\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^{-N} \left\| \widehat{g}(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \widehat{g}(t^k, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Запишемо

$$\left\| \widehat{g}(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \widehat{g}(t^k, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq C \left\| \widehat{g}(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \widehat{g}(t^k, \cdot) \right\|_{L^2(A)},$$

де $A_j = \left(\prod_{k=1}^{j-1} [0, T_k] \right) \times \mathbb{R} \times \left(\prod_{k=j+1}^{N} [0, T_k] \right)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Позначимо через L_j підпростір функцій $f(x)$ з $L^2(A)$, які залежать лише від x_j. Маємо

$$\left\| \widehat{g}(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \widehat{g}(t^k, \cdot) \right\|_{L^2(A)} \geq C \left\| \operatorname{pr}_{L_j} \left(\widehat{g}(t^n, \cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \widehat{g}(t^k, \cdot) \right) \right\|_{L^2(A)},$$

де pr позначає ортогональну проєкцію на L_k. При цьому

$$\begin{aligned} &\left(\operatorname{pr}_{L_j} g(t^k, \cdot) \right)(x_j) \\ &\quad = \frac{1}{\prod_{l \neq j} T_l} \int_0^{T_N} \cdots \int_0^{T_{j+1}} \int_0^{T_{j-1}} \cdots \int_0^{T_1} g(t^k, x) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_N \\ &\quad = C(t^k, j) m_{H_j(t^k)}(t_j^k, x_j), \end{aligned}$$

де функція $C(t^k, j)$ є відділеною від нуля при $t^k \geq t^0$. Позначивши

$$a_k = u_k C(t^k, j) / C(t^n, j),$$

одержимо

$$\left\| \mathrm{pr}_{L_j}\left(\widehat{g}(t^n,\cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \widehat{g}(t^k,\cdot)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
$$\geq C \left\| m_{H_j(t^n)}(t_j^n,\cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k m_{H_j(t^k)}(t_j^k,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C \min_{k=1,\dots,n-1} \left|t_j^n - t_j^k\right|^{H_j''}.$$

Остання нерівність для достатньо близьких $t_j^1,\dots,t_j^n$ випливає з властивості локальної недетермінованості для мультидробового броунівського руху (див. [4]). Отже, для будь-якого $j = 1,\dots,n$ маємо

$$\left\| Y_1(t^n) - \mathrm{span}\left\{Y_1(t^1),\dots,Y_1(t^{n-1})\right\}\right\|_2 \geq C \min_{k=1,\dots,n-1} \left|t_j^n - t_j^k\right|^{H_j''}.$$

Додавши ці нерівності для $j = 1,\dots,n$ та розділивши на n, маємо бажану оцінку. $\square$

З доведеної секторної локальної недетермінованості та [15] випливають наступні факти.

Наслідок 3.3. *За умови $d < \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k''}$ локальний час $L(t,x)$ є неперервним на $(0,T]\times\mathbb{R}^d$ майже напевно.*

Наслідок 3.4. *Нехай τ таке, що $\sum_{k=1}^{\tau-1} 1/H_k'' < d < \sum_{k=1}^{\tau} 1/H_k''$, а*

$$\beta_\tau = \sum_{l=1}^{\tau} H_\tau''/H_l'' + N - \tau - H_\tau'' d.$$

Тоді для будь-якого $\eta \in (0,\beta_\tau)$ та будь-якого $t^0 \in (0,T]$ існує така стала C_{η,t^0}, що для всіх $t \in [t^0,T]$ з імовірністю 1 для досить маленьких $r > 0$ та всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконано

$$L(B(t,r),x) \leq C_{\eta,t^0} r^\eta,$$

де $B(t,r)$ — куля радіуса r з центром в точці t.

Даний наслідок дозволяє оцінити розмірність Хаусдорфа образа поля та множин рівня (докладніше див. [16]).

Література

1. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, “ТВіМС”, Киев, 1995.
2. A. Ayache, *The generalized multifractional field: A nice tool for the study of the generalized multifractional Brownian motion*, J. Fourier Anal. Appl. **8** (2002), no. 6, 581–601.
3. A. Benassi, S. Jaffard, and D. Roux, *Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators*, Revista Mathematica Iberoamericana **13** (1997), no. 1, 19–89.
4. B. Boufoussi, M. Dozzi, and R. Guerbaz, *On the local time of multifractional Brownian motion*, Stochastics **78** (2006), no. 1, 33–49.
5. M. Dozzi and G. Shevchenko, *Real harmonizable multifractional stable process and its local properties*, Stochastic Processes Appl. **121** (2011), no. 7, 1509–1523.
6. D. Geman and J. Horowitz, *Occupation densities*, Ann. Probab. **8** (1980), 1–67.
7. E. Herbin, *From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions*, Rocky Mt. J. Math. textbf36 (2006), no. 4, 1249–1284.
8. N. Kôno and M. Maejima, *Self-similar stable processes with stationary increments*, Stable Processes and Related Topics, Sel. Pap. Workshop, Ithaca/NY (USA), 1990, Progress in Probabability, vol. 25, 1991, pp. 275–295.
9. S. C. Lim and L. P. Teo, *Sample path properties of fractional Riesz-Bessel field of variable order*, J. Math. Phys. **49** (2008), no. 1, 013509.
10. M. B. Marcus and G. Pisier, *Characterizations of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes*, Acta Math. **152** (1984), 245–301.
11. Yu. Mishura, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer, Berlin, 2008.

12. R. F. Peltier and J. Lévy Véhel, *Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results*, INRIA Research Report, no. 2645, 1995.
13. K. V. Ralchenko and G. M. Shevchenko, *Path properties of multifractal Brownian motion*, Theor. Probability and Math. Statist. **80** (2010), 119–130.
14. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Stochastic Modeling, Chapman & Hall, New York, NY, 1994.
15. Y. Xiao, *Properties of local nondeterminism of Gaussian and stable random fields and their applications*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **XV** (2006), 157–193.
16. Y. Xiao, *Sample path properties of anisotropic Gaussian random fields*, A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations (D. Khoshnevisan and F. Rassoul–Agha, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1962, Springer, New York, 2009, pp. 145–212.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Надійшла 29/08/2011