Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 161–176

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 161–176

ПРО ОЦІНКИ РОЗПОДІЛУ ДЕЯКИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ПРОЦЕСІВ З φ-СУБГАУССОВИМИ ПРИРОСТАМИ

УДК 519.21

Р. Є. ЯМНЕНКО

Анотація. У роботі отримані оцінки розподілів деяких функціоналів від приростів випадкового процесу $\{X(t), t \in T\}$ з класу $V(\varphi,\psi)$, зокрема

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))>x\right\},$$

де $f(t)$ – деяка неперервна функція, яку можна розглядати як інтенсивність обслуговування черги, сформованої процесом $X(t)$, а відповідні оцінки, як оцінки переповнення буферу $x>0$. Отримані результати у частковому випадку також мають місце для гауссових процесів, як приклад, одержано оцінки розподілів екстремальних функціоналів для узагальненого дробового броунівського руху, заданого на скінченному відрізку.

Abstract. Distribution estimates of some functionals of a random process $\{X(t), t \in T\}$ from class $V(\varphi,\psi)$ are obtained. Particularly, estimate

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))>x\right\}$$

is obtained, where $f(t)$ is a continuous function, which can be considered as the service output rate of the queue formed by the process $X(t)$. The obtained estimates also can be considered as estimates of buffer overflow probabilities with buffer size $x>0$. Particularly, obtained results also take place for Gaussian processes. As an example the results are applied to generalized fractional Brownian motion defined on a finite interval.

Аннотация. В работе получены оценки распределений некоторых функционалов от приращений случайного процесса $\{X(t), t \in T\}$ из класса $V(\varphi,\psi)$, в частности

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))>x\right\},$$

где $f(t)$ – некоторая непрерывная функция, которую можно рассматривать как интенсивность обслуживания очереди, сформированной процессом $X(t)$, а соответствующие оценки, как оценки переполнения буфера $x>0$. Полученные результаты в частном случае также выполняются для гауссовых процессов, например, получены оценки распределений экстремальных функционалов для обобщенного дробного броуновского движения, заданного на конечном отрезке.

Вступ

Ця стаття продовжує цикл робіт із вивчення черг, що формуються випадковими процесами з класів $V(\varphi,\psi)$ (див., зокрема, [7, 8, 9]). Класи $V(\varphi,\psi)$ — це досить загальні класи випадкових процесів, які, в тому числі, у частковому випадку містять і гауссові процеси. Таким чином, вивчаючи властивості цих класів, можна отримувати нові результати як для відомих випадкових процесів, так і для їх узагальнень.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 60K25.

Ключові слова і фрази. Узагальнений дробовий броунівський рух, метрична ентропія, черга, оцінка розподілу, субгауссовий процес.

У цій роботі досліджуються деякі екстремальні функціонали від приростів випадкового процесу $\{X(t), t \in T\}$ з класу $V(\varphi, \psi)$, зокрема

$$\sup_{s\le t; s,t\in B} \bigl(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))\bigr), \qquad \inf_{s\le t; s,t\in B} \bigl(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))\bigr),$$
$$\sup_{s\le t; s,t\in B} \bigl|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))\bigr|,$$

де $f(t)$ — деяка неперервна функція. Задачі оцінювання розподілів таких функціоналів виникають, наприклад, у теорії черг, зокрема під час оцінювання розподілу максимальної довжини черги чи ймовірності переповнення буфера, трактуючи при цьому функцію f як інтенсивність обслуговування черги (див., наприклад, [1, 5]).

Робота має наступну структуру. У першому розділі наведені необхідні поняття з теорії φ-субгауссових випадкових величин та процесів. Розділ 2 містить основні результати, одержані за допомогою методу метричної ентропії. У третьому розділі наведено приклад застосування отриманих оцінок до субгауссових процесів, які, зокрема, мають місце для процесів дробового броунівського руху.

1. Випадкові процеси з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та класів $V(\varphi, \psi)$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}\}$ — стандартний імовірнісний простір, T — деяка параметрична множина.

1.1. N-функції Орліча.

Означення 1.1 ([2])**.** Функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N-функцією Орліча, якщо U — неперервна парна опукла функція така, що $U(0) = 0$, $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$, $U(x)/x \to 0$ при $x \to 0$ та $U(x)/x \to \infty$ при $x \to \infty$.

Умова Q. Для N-функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0. \tag{1}$$

Означення 1.2. N-функція φ_1 підпорядкована N-функції φ_2 ($\varphi_1 \prec \varphi_2$), якщо існують певні сталі $c > 0$ та $x_0 > 0$ такі, що для $x > x_0$ має місце нерівність $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$. N-функції φ_1 та φ_2 еквівалентні, якщо $\varphi_1 \prec \varphi_2$ та $\varphi_2 \prec \varphi_1$.

1.2. φ-субгауссові випадкові величини і процеси.

Означення 1.3 ([2])**.** Нехай φ — N-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathsf{E}\,\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \tag{2}$$

Теорема 1.1 ([2])**.** *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є банаховим простором з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\log \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\})}{\lambda}, \tag{3}$$

де $\varphi^{(-1)}$ *— функція, обернена до функції* φ*, і для всіх* $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконується наступна нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}. \tag{4}$$

Лема 1.1 ([8]). *Нехай $\xi \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\tau_\varphi(\xi) > 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді виконуються такі нерівності:*

$$\mathsf{P}\{\xi > \varepsilon\} \le \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$
$$\mathsf{P}\{\xi < -\varepsilon\} \le \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$
$$\mathsf{P}\{|\xi| > \varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$

де $\varphi^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$ — перетворення Юнга-Фенхеля функції φ.

Лема 1.2 ([8]). *Нехай $\xi \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Тоді для $k = 1, 2, \ldots$ мають місце такі нерівності:*

$$|\,\mathsf{E}\,\xi^k| \le \mathsf{E}\,|\xi|^k \le 2(\tau_\varphi(\xi))^k \frac{e^k}{(\varphi^{(-1)}(k))^k} k!. \tag{5}$$

Приклад 1.1 ([2]). Центровані гауссові випадкові величини $\xi = N(0, \sigma^2)$ належать до простору $\mathrm{Sub}_{x^2/2}(\Omega)$ і $\tau(\xi) = (\mathsf{E}\,\xi^2)^{1/2}$.

Означення 1.4. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називають φ-субгауссовим, якщо випадкові величини $X(t)$, $t \in T$, є φ-субгауссовими ($X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$).

Якщо при цьому $\varphi(x) = x^2/2$, то такі процеси називають субгауссовими.

Приклад 1.2. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим процесом.

1.3. **Випадкові процеси з класу $V(\varphi, \psi)$.**

Означення 1.5 ([8]). Нехай $\varphi \prec \psi$ — дві N-функції Орліча. Будемо казати, що випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ процес $X(t)$ належить простору $\mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$ та для всіх $s, t \in T$ прирости $(X(t) - X(s))$ належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Приклад 1.3 ([2]). Субгауссові процеси належать класу $V(\varphi, \varphi)$, де $\varphi(x) = x^2/2$.

Приклад 1.4 ([8]). Нехай $X(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k(t)$, де випадкова величина $\xi_0 \in \mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$, $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\} \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та $\sum_{k=1}^\infty \tau_\varphi(\xi_k)|f_k(t)| < \infty$. Тоді випадковий процес $X(t)$ належить класу $V(\varphi, \psi)$.

2. Основні результати

Нехай (T, ρ) — псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою[1] (метрикою) ρ.

Будемо розглядати сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ із φ-субгауссовими приростами, зокрема процеси з класу $V(\varphi, \psi)$, $\varphi \prec \psi$. Припустимо, що існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h). \tag{6}$$

Зауважимо, що таку властивість має функція $\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, якщо процес $X(t)$ неперервний у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B — компактна множина, $B \subseteq T$. Надалі будемо використовувати такі позначення:

- $\beta > 0$ — деяке число, таке що $\beta \le \sigma\left(\inf_{s\in B}\sup_{t\in B}\rho(t,s)\right)$;

[1]Псевдометрика задовільняє усі умови метрики за виключенням умови: якщо $\rho(t, s) = 0$, то $t = s$, тобто множина $\{(t, s) \colon \rho(t, s) = 0\}$ може бути ширшою за діагональ $\{(t, s) \colon t = s\}$ (див. [2]).

- $\zeta_\varphi(v) = v/\varphi^{(-1)}(v)$;
- $\mathsf{N}(u) = \mathsf{N}_{(B,\rho)}(u)$ – метрична масивність простору (B,ρ) (мінімальна кількість замкнених куль радіуса u, що покривають простір (B,ρ));
- $\mathsf{L}(u) = \frac{1}{2}((\mathsf{N}(u))^2 + \mathsf{N}(u))$.

Припустимо, що випадковий процес X визначений на компакті $B \subseteq T$. Наступні твердження містять умови обмеженості супремуму

$$\sup_{s\le t;s,t\in B} (X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) \tag{7}$$

та оцінки для його експоненціального моменту, де $f = \{f(t), t \in B\}$ — деяка неперервна функція.

Лема 2.1. *Нехай для випадкового процесу $X(t) = \{X(t), t \in B\}$ із класу $V(\varphi,\psi)$ виконується умова (6), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ — така неперервна функція, що $|f(u) - f(v)| \le \delta(\rho(u,v))$, де $\delta = \{\delta(u), u > 0\}$ — деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція. Нехай послідовність $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ — така, що $q_k > 1$ і $\sum_{k=1}^\infty q_k^{-1} \le 1$, а $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ — така монотонно спадна послідовність, що $\varepsilon_k > 0$ і $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$. Тоді для всіх $\lambda > 0$ виконується нерівність*

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{s\le t;s,t\in B} (X(t) - X(s) - (f(t) - f(s)))\right\} \\ &\quad\le W(\lambda)\exp\left\{\sum_{k=2}^\infty \left(\frac{1}{q_k}\varphi(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1})) + 2\lambda\delta(\varepsilon_{k-1})\right)\right\}\prod_{k=2}^\infty \left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right)^{\frac{1}{q_k}}, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$W(\lambda) = \left(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1} (\mathsf{N}(\varepsilon_1) - l)\exp\left\{\varphi(q_1\lambda\sigma(2\varepsilon_1 l)) + q_1\lambda\delta(2\varepsilon_1 l)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}. \tag{9}$$

Доведення. Позначимо через V_{ε_k} множину центрів замкнених куль радіусу ε_k, яка утворює мінімальне покриття простору (B,ρ). Кількість точок у множині V_{ε_k} дорівнює $\mathsf{N}(\varepsilon_k)$.

Процес $X(t)$ і, відповідно, процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$ – сепарабельні процеси.

З леми 1.1 і припущення (6) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} \\ &\quad\le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(X(t) - X(s))}\right)\right\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\rho(t,s))}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Отже, процес X і, відповідно, X_f неперервні за ймовірністю. Якщо сепарабельний випадковий процес на (B,ρ) неперервний за ймовірністю, тоді будь-яка злічена скрізь щільна по відношенню до ρ множина може розглядатися як множина сепарабельності цього процесу. Таким чином, множина $V = \bigcup_{k=1}^\infty V_{\varepsilon_k}$ є ρ-сепарантою процесу X_f, і з ймовірністю одиниця виконується рівність

$$\sup_{s\le t;s,t\in B} (X_f(t) - X_f(s)) = \sup_{s\le t;s,t\in V} (X_f(t) - X_f(s)). \tag{10}$$

Розглянемо відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(u), n = 0, 1, \ldots\}$ множини V в V_{ε_n}, де $\alpha_n(u)$ — точка з множини V_{ε_n} така, що $\rho(u,\alpha_n(u)) \le \varepsilon_n$. Якщо $u \in V_{\varepsilon_n}$, тоді $\alpha_n(u) = u$. Якщо ж існує кілька таких точок з множини V_{ε_n}, що $\rho(u,\alpha_n(u)) \le \varepsilon_n$, тоді виберемо одну з них за деяким правилом, таким, що не порушується умова $\alpha_n(v) \le \alpha_n(u)$ для будь-яких $v \le u$, $v, u \in V$, і позначимо її через $\alpha_n(u)$.

З нерівності Чебишова, леми 1.1 і припущення (6) випливає, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{|X(u)-X(\alpha_n(u))|>p^{\frac{n}{2}}\right\} &\le \frac{\mathsf{E}(X(u)-X(\alpha_n(u)))^2}{p^n} \le \frac{c^2\tau_\varphi^2(X(u)-X(\alpha_n(u)))}{p^n}\\ &\le \frac{c^2\sigma^2(\varepsilon_n)}{p^n}=c^2\beta^2p^n,\end{aligned}$$

де

$$c=\frac{2e}{\varphi^{(-1)}(2)}.$$

Остання нерівність означає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{|X(u)-X(\alpha_n(u))|>p^{\frac{n}{2}}\right\}<\infty.$$

З леми Бореля–Кантеллі випливає, що $X(u)-X(\alpha_n(u))\to 0$ при $n\to\infty$ з ймовірністю одиниця. Оскільки функція f неперервна, то і

$$X_f(u)-X_f(\alpha_n(u))\to 0 \text{ при } n\to\infty \tag{11}$$

з ймовірністю одиниця. Множина V злічення, отже, $X(u)-X(\alpha_n(u))\to 0$ з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$ для всіх s одночасно.

Нехай s та t — довільні точки з множини V, $s\le t$. Позначимо через $s_m=\alpha_m(s)$, $s_{m-1}=\alpha_{m-1}(s_m)$, $\ldots$, $s_1=\alpha_1(s_2)$ та $t_m=\alpha_m(t)$, $t_{m-1}=\alpha_{m-1}(t_m)$, $\ldots$, $t_1=\alpha_1(t_2)$ для будь-якого $m\ge 1$. Тоді для всіх $m\ge 2$ виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned}X_f(s)&=X_f(s_1)+\sum_{k=2}^{m}(X_f(s_k)-X_f(s_{k-1}))+X_f(s)-X_f(\alpha_m(s)),\\ X_f(t)&=X_f(t_1)+\sum_{k=2}^{m}(X_f(t_k)-X_f(t_{k-1}))+X_f(t)-X_f(\alpha_m(t)),\end{aligned}$$

і, відповідно

$$\begin{aligned}&X_f(t)-X_f(s)\\ &\quad\le \max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_1}}(X_f(u)-X_f(v))\\ &\quad+\sum_{k=2}^{m}\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_k}}(X_f(u)-X_f(\alpha_{k-1}(u))-X_f(v)+X_f(\alpha_{k-1}(v)))\\ &\quad+X_f(t)-X_f(\alpha_m(t))-X_f(s)+X_f(\alpha_m(s)).\end{aligned}\tag{12}$$

З (7) і (12) випливає, що із ймовірністю одиниця

$$\begin{aligned}&\sup_{s\le t;s,t\in V}(X_f(t)-X_f(s))\\ &\le \liminf_{m\to\infty}\Bigg(\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_1}}(X_f(u)-X_f(v))\\ &\qquad+\sum_{k=2}^{m}\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_k}}\big(X_f(u)-X_f(\alpha_{k-1}(u))-X_f(v)+X_f(\alpha_{k-1}(v))\big)\\ &\qquad\qquad+X_f(t)-X_f(\alpha_m(t))-X_f(s)+X_f(\alpha_m(s))\Bigg).\end{aligned}\tag{13}$$

З нерівностей Гельдера, (11), (13) і леми Фату для всіх $\lambda > 0$ маємо

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{s\le t; s,t\in V}(X_f(t)-X_f(s))\right\} \\
&\quad\le \mathsf{E}\liminf_{m\to\infty}\exp\left\{\lambda\left(\max_{v\le u; u,v\in V_{\varepsilon_1}}(X_f(u)-X_f(v))+\sum_{k=2}^{m}\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_k}}(K(u,v))\right)\right\} \\
&\quad\le \liminf_{m\to\infty}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\left(\max_{v\le u; u,v\in V_{\varepsilon_1}}(X_f(u)-X_f(v))+\sum_{k=2}^{m}\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_k}}(K(u,v))\right)\right\} \\
&\quad\le \liminf_{m\to\infty}\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_1}}(X_f(u)-X_f(v))\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\qquad\times\prod_{k=2}^{m}\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_k}}(K(u,v))\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}} \\
&\quad\le \left(\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_1}}(X_f(u)-X_f(v))\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\qquad\times\prod_{k=2}^{\infty}\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_k}}(K(u,v))\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}} \\
&\quad= (J_1)^{\frac{1}{q_1}}\cdot\prod_{k=2}^{\infty}(J_k)^{\frac{1}{q_k}},
\end{aligned}\tag{14}$$

where

$$K(u,v)=X_f(u)-X_f(\alpha_{k-1}(u))-X_f(v)+X_f(\alpha_{k-1}(v)).$$

Розглянемо окремо кожен множник у правій частині (14). З теореми 1.1 і припущення (6) випливає, що

$$\mathsf{E}\exp\{q_1\lambda(X(u)-X(v))\}\le\exp\{\varphi(q_1\lambda\tau_\varphi(X(u)-X(v)))\}\le\exp\left\{\varphi(q_1\lambda\sigma(\rho(u,v)))\right\}.$$

Тоді, використовуючи умову $|f(u)-f(v)|\le\delta(\rho(u,v))$, маємо

$$\begin{aligned}
J_1 &\le \sum_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_1}}\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda(X(u)-X(v))\right\}\exp\left\{q_1\lambda(f(v)-f(u))\right\} \\
&\le \sum_{v\le u;u,v\in V_{\varepsilon_1}}\exp\left\{\varphi(q_1\lambda\sigma(\rho(v,u)))+q_1\lambda\delta(\rho(v,u))\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)}\sum_{j=1}^{i}\exp\left\{\varphi(q_1\lambda\sigma(2\varepsilon_1(i-j)))+q_1\lambda\delta(2\varepsilon_1(i-j))\right\} \\
&= \sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1}\left(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-l\right)\exp\left\{\varphi(q_1\lambda\sigma(2\varepsilon_1 l))+q_1\lambda\delta(2\varepsilon_1 l)\right\}.
\end{aligned}\tag{15}$$

Далі, з теореми 1.1, нерівності Коші–Буняковського і припущення (6) маємо, що

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\{q_k\lambda(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))-X(v)+X(\alpha_{k-1}(v)))\} \\
&\quad\le\left(\mathsf{E}\exp\left\{2q_k\lambda(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u)))\right\}\mathsf{E}\exp\left\{2q_k\lambda(X(\alpha_{k-1}(v))-X(v))\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\le\exp\{\varphi(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1}))\}.
\end{aligned}\tag{16}$$

Тоді

$$\begin{aligned}J_k &\le \sum_{v\le u; u,v\in V_{\varepsilon_k}} \mathsf{E}\exp\left\{q_k\lambda\left(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))-X(v)+X(\alpha_{k-1}(v))\right)\right\}\\ &\qquad\times\exp\left\{q_k\lambda(f(u)-f(\alpha_{k-1}(u)))\right\}\exp\left\{q_k\lambda(f(\alpha_{k-1}(v))-f(v))\right\}\\ &\le \frac{\mathsf{N}(\varepsilon_k)^2+\mathsf{N}(\varepsilon_k)}{2}\exp\left\{\varphi(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1}))+2q_k\lambda\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}\delta(\rho(u,\alpha_{k-1}(u)))\right\}\\ &\le \mathsf{L}(\varepsilon_k)\exp\left\{\varphi\big(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1})\big)+2q_k\lambda\delta(\varepsilon_{k-1})\right\}.\end{aligned}\tag{17}$$

З нерівностей (14)–(17) маємо твердження леми 2.1. □

Зауваження 2.1. Нерівність (8) має смисл, якщо добуток у правій частині скінченний. Крім того, вираз J_1 у нерівності (15) можна оцінити іншими простішими способами, отримуючи відповідно дві інші менш точні оцінки для $W(\lambda)$ з (9):

$$W(\lambda)\le\big(\mathsf{L}(\varepsilon_1)\big)^{\frac{1}{q_1}}\exp\left\{\frac{1}{q_1}\varphi(q_1\lambda\sigma(2\varepsilon_1(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1)))+\lambda\delta(2\varepsilon_1(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1))\right\},\tag{18}$$

чи так:

$$W(\lambda)^{q_1}\le\int_0^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-x)\exp\Big\{\varphi(q_1\lambda\sigma(2\varepsilon_1 x))+q_1\lambda\delta(2\varepsilon_1 x)\Big\}\,dx.\tag{19}$$

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови леми 2.1, тоді для всіх $x>0$ виконуються нерівності*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))>x\right\}\le Z(x),\tag{20}$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\le t; s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))<-x\right\}\le Z(x),\tag{21}$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}|X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))|>x\right\}\le 2Z(x),\tag{22}$$

де

$$\begin{aligned}Z(x)&=\prod_{k=2}^{\infty}\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big)^{\frac{1}{q_k}}\\ &\qquad\times\inf_{\lambda>0}W(\lambda)\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k}\varphi(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1}))+2\lambda\delta(\varepsilon_{k-1})\right)-\lambda x\right\},\end{aligned}\tag{23}$$

а $W(\lambda)$ визначено у рівнянні (9).

Доведення. Доведення теореми безпосередньо випливає з попередньої леми і нерівності Чебишова. □

Нехай $q_1=v$, де v — таке число, що $v\ge\frac{1}{1-p}$, тоді $q_1>1$, і нехай

$$q_k=\frac{1}{2\lambda\beta p^{k-1}}\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)+\ln\left(\frac{\mathsf{N}(\varepsilon_k)^2+\mathsf{N}(\varepsilon_k)}{2}\right)\right),\qquad k=2,3,\ldots,\tag{24}$$

$$\varepsilon_k=\sigma^{(-1)}(\beta p^k),\qquad p\in(0,1),\qquad k=0,1,2,\ldots.\tag{25}$$

Тоді

$$q_k\ge\frac{1}{p^{k-1}(1-p)}>1$$

та

$$\frac{1}{q_k}\le\frac{2\lambda\beta p^{k-1}}{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)\right)}=p^{k-1}(1-p),\qquad k=2,3,\ldots,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}(1-p) = 1.$$

Отже, така послідовність задовольняє умови леми 2.1. Застосуємо її до нерівності (8) і отримаємо наступне твердження.

Лема 2.2. *Нехай для випадкового процесу* $X(t) = \{X(t), t \in B\}$ *із класу* $V(\varphi, \psi)$ *виконується умова* (6), *і нехай* $f = \{f(t), t \in B\}$ *— така неперервна функція, що* $|f(u) - f(w)| \le \delta(\rho(u, w))$, *де* $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ *– деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція, і*

$$\int_0^{\beta} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right) du < \infty. \tag{26}$$

Тоді для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ *виконується нерівність*

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{s \le t; s,t \in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s)))\right\} \\ &\quad \le W_1(\lambda, p)\exp\left\{\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)p + \frac{4\lambda}{p(1-p)}\int_0^{\beta p^2} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right) du\right\} \\ &\quad\quad \times \exp\left\{2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

де

$$\begin{aligned} W_1(\lambda, p) = \inf_{v \ge \frac{1}{1-p}} &\left(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}\left(\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)-1}\left(\mathsf{N}\left(\sigma^{(-1)}(\beta p)\right) - l\right)\right. \\ &\left.\times\exp\left\{\varphi\left(\lambda v\sigma\left(2l\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)\right) + \lambda v\delta\left(2l\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{v}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Доведення. Використаємо у лемі 2.1 послідовності q_k та ε_k, визначені в (24) та (25) відповідно. Розглянемо суму

$$\tilde{Z} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{q_k}\Big(\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right) + \varphi\big(2\lambda\beta p^{k-1}q_k\big)\Big).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{q_k}\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{q_k}\varphi\left(2\lambda\beta p^{k-1}\frac{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right)\right)}{2\lambda\beta p^{k-1}}\right) \\ &= 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{q_k}\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right) + \varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{q_k} \\ &\le 2\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right)\frac{2\lambda\beta p^{k-1}}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right)\right)} + \varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)\sum_{k=2}^{\infty}p^{k-1}(1-p) \\ &= \varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)p + 4\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}\big(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\big)\right)\right)\beta p^{k-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Функція $\varphi(x)/x$ зростає при $x>0$, тому функція $\zeta_\varphi(x)=x/\varphi^{(-1)}(x)$ також зростає при $x>0$. Тоді

$$\int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right)du\ge\zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(\beta p^k))\right)\right)\beta p^k(1-p). \tag{30}$$

З (29) і (30) випливає, що

$$\tilde{Z}\le\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)p+\frac{4\lambda}{p(1-p)}\int_0^{\beta p^2}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right)du. \tag{31}$$

Таким чином, нерівність (27) випливає з (8) і (31). □

Зауваження 2.2. Аналогічно до зауваження 2.1 вираз (28) можна оцінити так:

$$\begin{aligned}W_1(\lambda,p)\le\inf_{v\ge\frac{1}{1-p}}\Big(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(\beta p))\exp\Big\{\varphi\left(\lambda v\sigma\left(2\sigma^{(-1)}(\beta p)(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1)\right)\right)\\+\lambda v\delta\left(2\sigma^{(-1)}(\beta p)(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1)\right)\Big\}\Big)^{\frac{1}{v}},\end{aligned} \tag{32}$$

чи так:

$$\begin{aligned}W_1(\lambda,p)\le\inf_{v\ge\frac{1}{1-p}}\Bigg(\int_0^{\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))}\left(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-x\right)\\\times\exp\left\{\varphi\left(\lambda v\sigma\left(2\sigma^{(-1)}(\beta p)x\right)\right)+\lambda v\delta\left(2\sigma^{(-1)}(\beta p)x\right)\right\}dx\Bigg)^{\frac{1}{v}}.\end{aligned} \tag{33}$$

Використовуючи послідовності q_k та ε_k, розглянуті у лемі 2.2, також можна отримати наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай для випадкового процесу $X(t)=\{X(t),t\in B\}$ із класу $V(\varphi,\psi)$ виконується умова (6), і нехай $f=\{f(t),t\in B\}$ — неперервна функція, така, що $|f(u)-f(w)|\le\delta(\rho(u,w))$, де $\delta=\{\delta(s),s>0\}$ — деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція, а $r=\{r(u)\colon u\ge 1\}$ — така неперервна функція, що $r(1)=0$ та $r(u)>0$ при $u>1$, а функція $s(t)=r(\exp\{t\}),t\ge 0$, опукла. Тоді за виконання умови*

$$\int_0^\beta\frac{r\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right)}du<\infty \tag{34}$$

для всіх $p\in(0;1)$ і $x>0$ виконуються нерівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t;s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))>x\right\}\le Z_r(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\le t;s,t\in B}(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s)))<-x\right\}\le Z_r(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t;s,t\in B}|X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))|>x\right\}\le 2Z_r(p,x),$$

де

$$\begin{aligned}Z_r(p,x)=\inf_{\lambda>0}W_1(\lambda,p)\exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)+\lambda\left(2\sum_{k=1}^\infty\delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)-x\right)\right\}\\\times\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda}{p(1-p)}\int_0^{\beta p^2}\frac{r\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right)}du\right)\right)^4,\end{aligned}$$

а $W_1(\lambda,p)$ визначено у рівнянні (28).

Доведення. Твердження теореми 2.2 випливає з лем 2.1 та 2.2 і доводиться аналогічно теоремі 3.2 з роботи [7] чи теоремі 3.4 з роботи [4]. □

Використовуючи у нерівності (8) леми 2.1 послідовність $q_k = (1-p)^{-1}p^{1-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, отримуємо наступну теорему, умови якої легші для перевірки, ніж умови теореми 2.2.

Теорема 2.3. *Нехай для випадкового процесу $X(t) = \{X(t), t \in B\}$ із класу $V(\varphi, \psi)$ виконується умова (6), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ — неперервна функція, така що $|f(u) - f(w)| \le \delta(\rho(u, w))$, де функція $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — невід'ємна монотонно зростаюча, а $r_1 = \{r_1(u), u \ge 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u) > 0$, коли $u > 1$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \ge 0$, — опукла. Тоді за виконання умови*

$$\int_0^\beta r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{35}$$

для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ справджуються нерівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \le Z_{r_1}(p, x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \le Z_{r_1}(p, x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \le 2Z_{r_1}(p, x),$$

де

$$\begin{aligned} Z_{r_1}(p, t, x) &= r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\right) \\ &\quad\times \inf_{\lambda>0} W_2(\lambda, p)\exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(2\sum_{k=1}^\infty \delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right) - x\right)\right\}, \\ W_2(\lambda, p) &= \left(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}\left(\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)-1}\left(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p)) - l\right)\right. \\ &\quad\left.\times\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\sigma(2l\sigma^{(-1)}(\beta p))}{1-p}\right) + \frac{\lambda\delta(2l\sigma^{(-1)}(\beta p))}{1-p}\right\}\right)^{1-p}. \end{aligned} \tag{36}$$

Доведення. Твердження теореми 2.3 випливає з леми 2.1 і доводиться аналогічно теоремі 3.1 з роботи [7] чи теоремі 3.5 з роботи [4]. □

Використаємо тепер у нерівності (8) леми 2.1 послідовність

$$q_k = e^p\frac{(k-1)!}{p^{k-1}}, \qquad p \in (0, 1), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Тоді $q_k > 1$ та

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{q_k} = e^{-p}\sum_{k=1}^\infty \frac{p^{k-1}}{(k-1)!} = 1.$$

Таким чином, ця послідовність задовольняє умови леми 2.1. Застосуємо її до нерівності (8) і отримаємо наступне твердження.

Лема 2.3. *Нехай для випадкового процесу $X(t) = \{X(t), t \in B\}$ із класу $V(\varphi, \psi)$ виконується умова (6), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ — така неперервна функція, що*

$$|f(u) - f(w)| \le \delta(\rho(u, w)),$$

де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція, і

$$\int_0^\beta \ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty. \tag{38}$$

Тоді для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{s\le t; s,t\in B} (X(t) - X(s) - (f(t) - f(s)))\right\} \\
&\quad\le W_2(\lambda, p)\exp\left\{(1-e^{-p})\varphi\left(2\lambda\beta e^p\right) + \frac{1}{\beta e^p\left(1-\frac{p}{2}\right)}\int_0^{\beta p} \ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\right\} \\
&\quad\times \exp\left\{2\lambda \sum_{k=1}^\infty \delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right\},
\end{aligned} \tag{39}$$

де $W_2(\lambda, p)$ визначено в (36).

Доведення. Використаємо у лемі 2.1 послідовність q_k, визначену в (37). Розглянемо суму

$$\tilde{Z} = \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{q_k}\Big(\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right) + \varphi\big(2\lambda q_k \sigma(\varepsilon_{k-1})\big)\Big).$$

Поклавши

$$\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right), \tag{40}$$

матимемо

$$\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{q_k}\ln\left(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\right) + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{q_k}\varphi\left(2\lambda e^p \frac{(k-1)!}{p^{k-1}}\frac{\beta p^{k-1}}{(k-1)!}\right) \\
&= \sum_{k=2}^\infty \frac{\ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right) p^{k-1}}{e^p (k-1)!} + \varphi\left(2\lambda\beta e^p\right) e^{-p}\sum_{k=2}^\infty \frac{p^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= (1-e^{-p})\varphi\left(2\lambda\beta e^p\right) + e^{-p}\sum_{k=2}^\infty \frac{\ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right) p^{k-1}}{(k-1)!}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Далі, оскільки $\ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)$ — монотонно спадна функція, коли $u > 0$, то має місце нерівність

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\beta p^k}{k!}}^{\frac{\beta p^{k-1}}{(k-1)!}} \ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du \\
&\quad\ge \ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right)\left(\frac{\beta p^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\beta p^k}{k!}\right) \\
&\quad= \ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right)\frac{\beta p^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 - \frac{p}{2}\right), \qquad k \ge 2.
\end{aligned} \tag{42}$$

З (41) і (42) отримуємо, що

$$\tilde{Z} \le (1-e^{-p})\varphi\left(2\lambda\beta e^p\right) + \frac{1}{\beta e^p\left(1-\frac{p}{2}\right)}\int_0^{\beta p} \ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du. \tag{43}$$

Таким чином, нерівність (39) випливає з (8) і (43). □

Використовуючи послідовності q_k та ε_k, визначені у (37) та (40) відповідно, з леми 2.3 випливає наступна теорема про оцінку розподілу супремуму приростів процесу $X_f(t) = X(t) - f(t)$.

Теорема 2.4. *Нехай для випадкового процесу* $X(t) = \{X(t), t \in B\}$ *із класу* $V(\varphi, \psi)$ *виконується умова* (6)*, і нехай* $f = \{f(t), t \in B\}$ *— неперервна функція, така що*

$$|f(u) - f(w)| \leq \delta(\rho(u, w)),$$

де функція $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ *— невід'ємна монотонно зростаюча, а*

$$r = \{r(u), u \geq 1\}$$

— така неперервна функція, що $r(u) > 0$*, коли* $u > 1$*, а функція* $s(t) = r(\exp\{t\})$*,* $t \geq 0$*, — опукла. Тоді за виконання умови*

$$\int_0^\beta r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{44}$$

для всіх $p \in (0; 1)$ *і* $x > 0$ *справджуються нерівності*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s \leq t; s,t \in B} (X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \leq Z_{r_2}(p, x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s \leq t; s,t \in B} (X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \leq Z_{r_2}(p, x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s \leq t; s,t \in B} |X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \leq 2Z_{r_2}(p, x),$$

де

$$Z_{r_2}(p, x) = r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta e^p\left(1 - \frac{p}{2}\right)} \int_0^{\beta p} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\right)$$
$$\times \inf_{\lambda > 0} W_2(\lambda, p) \exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1 - p}\right) + \lambda\left(2\sum_{k=1}^\infty \delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right) - x\right)\right\},$$

а вираз $W_2(\lambda, p)$ *визначено в* (36).

Доведення. Скористаємось доведенням леми 2.3. Оскільки функція $s(t) = r(\exp\{t\})$ опукла, то для всіх $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, \infty$, таких, що

$$\sum_{i=1}^\infty \Delta_i = 1,$$

і всіх $x_i \geq 0$ справджується нерівність

$$s\left(\sum_{i=1}^\infty \Delta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \Delta_i s(x_i).$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right)p^{k-1}}{e^p(k-1)!}\right\}\\
&\quad= r^{(-1)}\left(s\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right)p^{k-1}}{e^p(k-1)!}\right)\right)\\
&\quad\le r^{(-1)}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{e^p(k-1)!}s\left(\ln\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\frac{\beta p^k}{k!}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&\quad\le r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta e^p\left(1-\frac{p}{2}\right)}\int_0^{\beta p} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\right).
\end{aligned}\tag{45}$$

Отже, твердження теореми випливає з лем 2.1, 2.3, нерівностей (45) і Чебишова. $\square$

3. Приклад застосування до узагальненого дробового броунівського руху

Припустимо, що $X(t) = \{X(t), t \in [a, b]\}$ — це сепарабельний субгауссовий процес, визначений на відрізку $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, такий що

$$\tau(X(t) - X(s)) \le |t-s|^H, \quad H \in (0,1), \tag{46}$$

тобто процес $X(t)$ належить класу $V(\varphi,\varphi)$, де $\varphi(x) = x^2/2$, $x \ge 0$. Зауважимо, що серед випадкових процесів, для яких виконується умова (46), є і (гауссовий) дробовий броунівський рух із відповідним індексом Хюрста H. Більше про узагальнений процес дробового броунівського руху з класів $V(\varphi,\psi)$ можна прочитати у роботах [3, 6, 8].

Припустимо також, що $f(t)$ — визначена на $[a, b]$ неперервна функція, така що

$$|f(t) - f(s)| \le c|t-s|^n, \tag{47}$$

де $c > 0$ та $n > 0$ — деякі сталі. Тоді, користуючись результатами теореми 2.3, можна отримати наступні оцінки.

Теорема 3.1. *Нехай для субгауссового випадкового процесу $X(t) = \{X(t), t \in [a, b]\}$, та функції $f = \{f(t), t \in [a, b]\}$ виконуються умови* (46) *і* (47) *відповідно. Тоді для всіх*

$$p \in \left(0; \left(\frac{2}{3}\right)^H\right]$$

і

$$x > c(b-a)^n + \frac{2c(\beta p^2)^{\frac{n}{H}}}{1-p^{\frac{n}{H}}} \tag{48}$$

мають місце оцінки

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \le Z(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \le Z(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \le 2Z(p,x),$$

де

$$Z(p,x) = \frac{(b-a)^2}{2}(\beta pe)^{\frac{2}{H}} \times \left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^{\frac{1}{H}}\right)-1} \left(\frac{b-a}{2(\beta p)^{\frac{1}{H}}} + 1 - l \right) \times \exp\left\{ -\frac{\left(x - c(2l)^n(\beta p)^{\frac{n}{H}} - \frac{2c(\beta p^2)^{\frac{n}{H}}}{1-p^{\frac{n}{H}}}\right)^2}{2(2l)^{2H}(\beta p)^2 + \frac{8p\beta^2}{1-p}} \right\} \right)^{1-p}.$$

Доведення. Покладемо

$$r(u) = u^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < H/2.$$

Коли $p \le \left(\frac{2}{3}\right)^H$, то

$$\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}} > \frac{3}{2},$$

оскільки

$$u \le \left(\frac{2}{3}\right)^H \left(\frac{b-a}{2}\right)^H \le p\beta.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du \right) \\ & \le \left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} \left(\left(\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}} + 1 \right)^2 + \frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}} + 1 \right)^{\alpha} \Big/ 2^{\alpha}\, du \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ & \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} \left(\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}} + \frac{3}{2} \right)^{2\alpha} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ & < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} \left(\frac{b-a}{u^{\frac{1}{H}}} \right)^{2\alpha} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = \frac{(b-a)^2}{2}(\beta p)^{\frac{2}{H}} \left(1 - \frac{2\alpha}{H}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ & \to \frac{(b-a)^2}{2}(\beta pe)^{\frac{2}{H}}, \qquad \alpha \to 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Також

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c(\beta p^k)^{\frac{n}{H}} = \frac{c\beta^{\frac{n}{H}} p^{\frac{n}{H}}}{1 - p^{\frac{n}{H}}}. \tag{50}$$

Таким чином, застосовуючи (49) та наступний ланцюжок перетворень до теореми 2.3, отримаємо твердження теореми 3.1.

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\lambda>0}\exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)+\lambda\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right)-x\right)\right\}W_2(\lambda,p)\\
&\quad=\inf_{\lambda>0}\exp\left\{\frac{2p\lambda^2\beta^2}{(1-p)^2}+\lambda\left(\frac{2c\beta^{\frac{n}{H}}p^{\frac{n}{H}}}{1-p^{\frac{n}{H}}}-x\right)\right\}\\
&\qquad\times\left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^{1/H}\right)-1}\left(N\left((\beta p)^{1/H}\right)-l\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\exp\left\{\frac{\lambda^2(2l)^{2H}(\beta p)^2}{2(1-p)^2}+\frac{\lambda(2l)^n c(\beta p)^{\frac{n}{H}}}{1-p}\right\}\right)^{1-p}\\
&\quad\le\left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^{1/H}\right)-1}\left(\frac{b-a}{2(\beta p)^{1/H}}+1-l\right)\right.\\
&\qquad\times\inf_{\lambda>0}\exp\left\{\lambda^2\left(\frac{2p\beta^2}{(1-p)^3}+\frac{(2l)^{2H}(\beta p)^2}{2(1-p)^2}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.-\lambda\left(\frac{x-\frac{2c\beta^{\frac{n}{H}}p^{\frac{n}{H}}}{1-p^{\frac{n}{H}}}}{1-p}-\frac{(2l)^n c(\beta p)^{\frac{n}{H}}}{1-p}\right)\right\}\right)^{1-p}\\
&\quad\le\left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^{1/H}\right)-1}\left(\frac{b-a}{2(\beta p)^{\frac{1}{H}}}+1-l\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\exp\left\{-\frac{\left(x-c(2l)^n(\beta p)^{\frac{n}{H}}-\frac{2c(\beta p^2)^{\frac{n}{H}}}{1-p^{\frac{n}{H}}}\right)^2}{2(2l)^{2H}(\beta p)^2+\frac{8p\beta^2}{1-p}}\right\}\right)^{1-p}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

□

Висновки

У роботі досліджуються властивості випадкових процесів із φ-субгауссовими приростами, зокрема процесів із загального класу $V(\varphi,\psi)$, $\varphi\prec\psi$. Отримано оцінки розподілу деяких екстремальних функціоналів від приростів цього процесу, наприклад,

$$
\sup_{s\le t;s,t\in B}\left(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))\right),\qquad \inf_{s\le t;s,t\in B}\left(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))\right),
$$

де $f(t)$ — неперервна монотонно зростаюча функція. Одержані результати можуть бути застосовані до широкого класу випадкових процесів, зокрема, гауссових. Як приклад, наведено відповідні оцінки для узагальненого процесу дробового броунівського руху.

Література

1. R. Addie, P. Mannersalo, and I. Norros, *Most probable paths and performance formulae for buffers with Gaussian input traffic*, Eur. Trans. Telecommun. **13(3)** (2002), 183–196.

2. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВіМС", Киев, 1998; Видання англійською: V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, AMS, Providence, RI, 2000.
3. Ю. Козаченко, Т. Соттінен, О. Василик, *Автомодельні процеси зі стаціонарними приростами з просторів* $\mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$, Теор. ймовірност. та матем. статист. **65** (2001), 67–78.
4. Yu. Kozachenko, O. Vasylyk, and R. Yamnenko, *Upper estimate of overrunning by* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *random process the level specified by continuous function*, Random Oper. and Stoch. Equ. **13** (2005), no. 2, 111–128.
5. I. Norros, *On the use of Fractional Brownian motions in the Theory of Connectionless Networks*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications **13** (1995), no. 6, 953–962.
6. R. Yamnenko, *Ruin probability for generalized* φ*-sub-Gaussian fractional Brownian motion*, Theory of Stochastic Processes **12(28)** (2006), no. 1-2, 261–275.
7. R. Yamnenko and O. Vasylyk, *Random process from the class* $V(\varphi,\psi)$*: exceeding a curve*, Theory of Stochastic Processes **13(29)** (2007), no. 4, 219-232.
8. Ю. В. Козаченко, О. І. Василик, Р. Є. Ямненко, φ*-субгауссові випадкові процеси*, "Київський університет", Київ, 2008.
9. Р. Є. Ямненко, О. С. Шрамко, *Про розподіл процесів накопичення з класу* $V(\varphi,\psi)$, Теор. ймовірност. та матем. статист. **83** (2010), 163–176.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ-01601, Україна

Адреса електронної пошти: yamnenko@univ.kiev.ua

Надійшла 11/06/2011