Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 85, 2011, стор. 50–55

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 85, 2011, pp. 50–55

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ СТОХАСТИЧНИМИ МІРАМИ

УДК 519.21

Д. М. ГОРОДНЯ

Анотація. Доведено існування та єдиність розв'язку задачі Коші для хвильових рівнянь, що містять доданок, заданий інтегралом за стохастичною мірою. Для доведення єдиності використовуються властивості узагальнених функцій зі значеннями у просторі Фреше.

Аннотация. Доказано существование и единственность решения задачи Коши для волновых уравнений, содержащих слагаемое, которое задается интегралом по стохастической мере. Для доказательства единственности используются свойства обобщенных функций со значениями в пространстве Фреше.

Abstract. Existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for wave equations containing the term given by the integral with recpect to a stochastic measure are proved. For the proof of uniqueness we used properties of generalized functions with values in the Fréchet space.

1. Вступ

Стохастичні хвильові рівняння описують процеси розповсюдження хвиль при наявності деяких випадкових впливів. В різних математичних моделях цей випадковий вплив, як правило описується стохастичними інтегралами. При цьому на інтегратори накладаються певні умови мартингальності, регулярності або існування моментів. Наприклад, в [1] стохастичний доданок є інтегралом за вінерівським процесом, в [2, 3] — інтегралом за мартингальною мірою, в [4] — визначається процесом з гельдеровими траєкторіями. В даній роботі випадковий вплив визначається інтегралом за стохастичною мірою, на яку ми накладаємо лише умову σ-адитивності за ймовірністю.

У роботі [5] досліджуються слабкі розв'язки задачі Коші для хвильового рівняння зі стохастичними мірами. Для випадку d просторових змінних розв'язок такого рівняння визначається як процес V_t, $t > 0$, такий, що при фіксованому $t > 0$ функція V_t є узагальненою випадковою функцією, визначеною на просторі $D(\mathbb{R}^d)$ основних функцій з $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ з компактним носієм, і у певному сенсі задовольняє відповідне рівняння та початкову умову. У даній статті розв'язок хвильового рівняння для випадку d просторових змінних визначається як деяка узагальнена випадкова функція, визначена на $D(\mathbb{R}^{d+1})$. Це дозволяє встановити існування та єдиність розв'язку при умовах, подібних до тих, при яких у [6] доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку для звичайних хвильових рівнянь.

Про застосування хвильових рівнянь із стохастичними мірами див. [5] та наведені там посилання. М'які розв'язки задачі Коші для хвильового рівняння зі стохастичною мірою у випадку однієї просторової змінної досліджуються в [7].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G57, 60H15, 60H05, 35L05, 46F99.

Ключові слова і фрази. Стохастичне хвильове рівняння, задача Коші, стохастична міра, простір Фреше, узагальнена функція.

2. Попередні відомості

Нехай (Ω, F, P) — повний імовірнісний простір; L_0 —набір усіх випадкових величин на (Ω, F, P), які розглядаються з точністю до P-еквівалентності; збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю.

Означення 2.1 ([5])**.** Узагальненою випадковою функцією (у.в.ф.) називається лінійне неперервне відображення $\xi : D(\mathbb{R}^{d+1}) \to L_0$.

Набір усіх у.в.ф. позначатимемо $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$.

Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$ — σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^{d+1}$.

Означення 2.2 ([5])**.** Стохастичною мірою називається σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathbf{B} \to L_0$.

У роботі [8] визначається та досліджується інтеграл виду $\int_A f d\mu$, в якому $A \in \mathbf{B}$, f — дійсна вимірна функція. Зокрема, для цього інтеграла виконується аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. наслідок 1.2 [8] або твердження 7.1.1 [9]) та теорема про диференціювання інтеграла по параметру [5], а також стохастична міра μ визначає у.в.ф. $\dot{\mu}$ за правилом

$$(\dot{\mu}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x,t) d\mu(x,t), \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Зауважимо, що похідна від випадкового процесу $\eta\colon (a;b) \to L_0$ розглядається у сенсі збіжності за ймовірністю, а також довільна обмежена вимірна функція є інтегровною за стохастичною мірою.

3. Існування розв'язку задачі Коші

Розглянемо задачу Коші для хвильового рівняння, яка у символьному записі має вигляд

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \triangle_x V + \dot{\mu}, \quad t > 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0+} = \dot{\varsigma}, \; V\big|_{t=0+} = \dot{\nu}, \tag{3.1}$$

відносно невідомої функції $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$. Тут $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, μ — стохастична міра на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$, рівна нулю на усіх вимірних підмножинах множини $K := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}\colon t < 0\}$, ς, ν — стохастичні міри на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$.

Дамо строге означення розв'язку.

Означення 3.1. У.в.ф. $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ будемо називати розв'язком задачі Коші (3.1), якщо $V = 0$ при $t < 0$ і для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$

$$\begin{aligned}\left(V, \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2}\right) = a^2 (V, \triangle_x \varphi(x,t)) + \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x,t) d\mu(x,t) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial t} d\varsigma(x) \\ + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) d\nu(x).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Зазначимо, що аналогічно до [6, §5.5] $V = 0$ при $t < 0$, якщо для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$, такої, що $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, виконується рівність $(V, \varphi) = 0$.

Для випадку $d = 1$ розв'язок задачі Коші (3.1) будується з урахуванням формули Даламбера [6, §13.4], наступним чином. Покладемо при $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$

$$r_1(x,t,\varphi) := \frac{1}{2a} \int_t^{\infty} ds \int_{x-a(s-t)}^{x+a(s-t)} \varphi(y,s) dy;$$

$$r_3(x,\varphi) := r_1(x,0,\varphi); \quad r_2(x,\varphi) := r_3(x, \frac{\partial \varphi}{\partial s}).$$

Теорема 3.1. *При $d = 1$ розв'язком задачі Коші* (3.1) *є у.в.ф.*

$$(V,\varphi) = \int_{\mathbb{R}\times[0;\infty)} r_1(x,t,\varphi)d\mu(x,t) - \int_{\mathbb{R}} r_2(x,\varphi)d\varsigma(x) + \int_{\mathbb{R}} r_3(x,\varphi)d\nu(x), \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^2).$$

Доведення. Зафіксувавши $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$ та $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\infty)$ і врахувавши, що внаслідок фінітності φ знайдеться таке $L > 0$, що носій φ міститься в $(-L;L)^2$, дістанемо

$$r_1(x,t,\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^L d\tau \int_{-1}^1 \varphi(x + a\tau\xi, t+\tau)d\xi.$$

Тому при фіксованому φ функція r_1 неперервна і обмежена по сукупності змінних x, t на множині $\mathbb{R}\times[0;\infty)$, а отже, вона інтегровна по стохастичній мірі μ.

Зауважимо, що при фіксованій $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\infty)$

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) &= (\delta(y-x,s-t),\varphi(y,s)) = \left(\mathcal{E}_1(y-x,s-t), \frac{\partial^2\varphi(y,s)}{\partial s^2} - a^2\frac{\partial^2\varphi(y,s)}{\partial y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2a}\int_t^\infty ds \int_{x-a(s-t)}^{x+a(s-t)} \left(\frac{\partial^2\varphi(y,s)}{\partial s^2} - a^2\frac{\partial^2\varphi(y,s)}{\partial y^2}\right) dy, \end{aligned} \tag{3.3}$$

де δ та $\mathcal{E}_1$ позначають відповідно δ-функцію Дірака та фундаментальний розв'язок хвильового оператора при $d = 1$ (див. [6]). Звідси

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times[0;\infty)} \varphi(x,t)d\mu(x,t) &= \int_{\mathbb{R}\times[0;\infty)} r_1\left(x,t,\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)d\mu(x,t) \\ &\quad - a^2\int_{\mathbb{R}\times[0;\infty)} r_1\left(x,t,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)d\mu(x,t), \end{aligned}$$

а отже, у.в.ф. $\int_{\mathbb{R}\times[0;\infty)} r_1(x,t,\varphi)d\mu(x,t)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\triangle_x V + \dot{\mu}, \quad t > 0, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0+} = V\big|_{t=0+} = 0. \tag{3.4}$$

Скориставшись рівностями (3.3) при $t = 0$ та включенням $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in D(\mathbb{R}^2)$ аналогічно до (3.4) можна переконатися, що у. в. ф. $\int_{\mathbb{R}} r_3(x,\varphi)d\nu$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, та $\int_{\mathbb{R}} r_2(x,\varphi)d\varsigma$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, є відповідно розв'язками задач Коші

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\triangle_x V, \quad t > 0, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0+} = 0,\ V\big|_{t=0+} = \dot{\nu}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\triangle_x V, \quad t > 0, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0+} = \dot{\varsigma},\ V\big|_{t=0+} = 0. \tag{3.6}$$

Залишилось зауважити, що сума розв'язків задач (3.4, 3.5, 3.6) є розв'язком задачі Коші (3.1) при $d = 1$. □

Якщо $d = 2$, то для побудови розв'язку задачі Коші (3.1) використовується формула Пуассона [6, §13.4]. Використаємо позначення з [6]. Нехай $U(x,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le r\}$. Покладемо при $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$

$$v_1(x,t,\varphi) := \frac{1}{2\pi a}\int_t^\infty ds \int_{U(x,a(s-t))} \frac{\varphi(y,s)dy}{\sqrt{a^2(s-t)^2 - |y-x|^2}};$$

$$v_3(x,\varphi) := v_1(x,0,\varphi); \quad v_2(x,\varphi) := v_3(x, \frac{\partial\varphi}{\partial s}).$$

Теорема 3.2. *При $d = 2$ розв'язком задачі Коші (3.1) є у.в.ф.*

$$(V,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2\times[0;\infty)} v_1(x,t,\varphi)d\mu(x,t) - \int_{\mathbb{R}^2} v_2(x,\varphi)d\varsigma(x) + \int_{\mathbb{R}^2} v_3(x,\varphi)d\nu(x), \qquad \varphi\in D(\mathbb{R}^3).$$

Для випадку $d = 3$ розв'язок задачі Коші (3.1) будується за допомогою формули Кірхгофа [6, §13.4] наступним чином. Нехай $S(x,r) := \{x\in\mathbb{R}^3 \colon |x| = r\}$. Покладемо при $\varphi\in D(\mathbb{R}^4)$

$$w_1(x,t,\varphi) := \frac{1}{4\pi a^2}\int_t^\infty d\tau\Big(\frac{1}{\tau-t}\int_{S(x,a(\tau-t))}\varphi(y,\tau)dS_y\Big);$$

$$w_3(x,\varphi) := w_1(x,0,\varphi); \quad w_2(x,\varphi) := w_3(x,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}).$$

Теорема 3.3. *При $d = 3$ розв'язком задачі Коші (3.1) є у.в.ф.*

$$(V,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3\times[0;\infty)} w_1(x,t,\varphi)d\mu(x,t) - \int_{\mathbb{R}^3} w_2(x,\varphi)d\varsigma(x) + \int_{\mathbb{R}^3} w_3(x,\varphi)d\nu(x), \qquad \varphi\in D(\mathbb{R}^4).$$

Доведення теорем 3.2, 3.3 проводиться тим же методом, що й теореми 3.1, і тут не наводиться.

4. Узагальнені функції у просторі Фреше

У цьому пункті визначаються та досліджуються узагальнені функції зі значеннями у просторі Фреше. За допомогою їх властивостей у подальшому доводиться єдиність розв'язку задачі Коші (3.1).

Використовуючи термінологію та означення із [10, пункт I.9], лінійний простір X із квазінормою $\|\cdot\|$, повний відносно метрики $\rho(x,y) = \|x-y\|$, $x,y\in X$ будемо називати простором Фреше. Зокрема простором Фреше є визначений раніше простір L_0 з квазінормою, збіжність за якою еквівалентна збіжності за ймовірністю [8, §0.2].

Нехай X — простір Фреше з квазінормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$.

Означення 4.1. X-узагальненою функцією називається лінійне неперервне відображення $F\colon D(\mathbb{R}^d)\to X$.

У подальшому через $D'_X(\mathbb{R}^d)$, $D'(\mathbb{R}^d)$, $\langle F,\varphi\rangle$, (f,φ) позначатимемо відповідно простір усіх X-узагальнених функцій, стандартний простір узагальнених функцій [6, §5.3], та дії функцій $F\in D'_X(\mathbb{R}^d)$ та $f\in D'(\mathbb{R}^d)$ на основну функцію $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$. Для $F\in D'_X(\mathbb{R}^d)$ носій $\mathrm{supp}F$, рівність $F=\bar{0}$ на відкритій множині з $\mathbb{R}^d$, лінійну заміну, множення на функцію $\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ та похідну будемо визначати аналогічно до відповідних понять в $D'(\mathbb{R}^d)$ (див., наприклад, [6]). Згортка $F*g$ для функцій $F\in D'_X(\mathbb{R}^d)$ та $g\in D'(\mathbb{R}^d)$ визначається за правилом

$$\langle F*g,\varphi\rangle := \lim_{k\to\infty}\langle F(x),(g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))\rangle, \qquad \varphi\in D(\mathbb{R}^d).$$

Тут $\{\eta_k\}$ — довільна послідовність функцій із $D(\mathbb{R}^{2d})$, яка збігається до 1 в $\mathbb{R}^{2d}$ у сенсі [6, §7.4]. Як і для звичайних узагальнених функцій, будемо вважати, що $F*g$ існує, якщо вказана границя для кожної $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$ існує і не залежить від вибору послідовності $\{\eta_k\}$. Той факт, що при цьому $F*g\in D'_X(\mathbb{R}^d)$, перевіряється тим же методом, що й для згортки звичайних узагальнених функцій.

Для доведення наведених нижче теорем використовуються такі властивості згортки.

1) Лінійність. Якщо існують згортки $F_1 * g$, $F_2 * g$, $F * g_1$, $F * g_2$, то для довільних чисел λ, γ існують згортки

$$(\lambda F_1 + \gamma F_2) * g = \lambda(F_1 * g) + \gamma(F_2 * g);$$

$$F * (\lambda g_1 + \gamma g_2) = \lambda(F * g_1) + \gamma(F * g_2).$$

2) Диференційовність. Якщо існує згортка $F * g$, то для кожного $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$, $\beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ існують згортки $\mathbb{D}^\beta F * g$ та $F * \mathbb{D}^\beta g$, причому

$$\mathbb{D}^\beta (F * g) = \mathbb{D}^\beta F * g = F * \mathbb{D}^\beta g.$$

Перевірка лінійності згортки тривіальна. Диференційовність досить довести для кожної першої похідної $\mathbb{D}_j$, $1 \le j \le d$.

Зафіксуємо j, таке, що $1 \le j \le d$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ та збіжну до 1 в $\mathbb{R}^{2d}$ послідовність $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}^{2d}$. Тоді послідовність $\{\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k}\}$ теж збігається до 1 в $\mathbb{R}^{2d}$, а, отже, з урахуванням доведеної в [6, §7.1] леми про похідну основної функції спеціального виду, дістанемо:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{D}_j (F * g), \varphi \rangle &= - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), \eta_k(x,y) \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j}) \rangle \\
&= - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle \\
&\quad + \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), (\eta_k(x,y) + \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_j}) \varphi(x+y))) \rangle \\
&\quad - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle \\
&= - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), \mathbb{D}_j (g(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle \\
&= \langle \mathbb{D}_j F(x), (g(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle.
\end{aligned}$$

Тому згортка $\mathbb{D}_j F * g$ існує і справджується рівність $\mathbb{D}_j F * g = \mathbb{D}_j (F * g)$. Також зауважимо, що $\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial y_j}$, звідки

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{D}_j (F * g), \varphi \rangle &= - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), \eta_k(x,y) \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial y_j}) \rangle \\
&= - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), \frac{\partial}{\partial y_j} (\eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle \\
&\quad + \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), (\eta_k(x,y) + \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial y_j}) \varphi(x+y))) \rangle \\
&\quad - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (g(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle \\
&= - \lim_{k \to \infty} \langle F(x), (\mathbb{D}_j g(y), \eta_k(x,y) \varphi(x+y))) \rangle,
\end{aligned}$$

а отже, існує згортка $F * \mathbb{D}_j g$ і виконується рівність $F * \mathbb{D}_j g = \mathbb{D}_j (F * g)$. Таким чином, диференційовність згортки доведено.

Нехай $L(\mathbb{D}) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \mathbb{D}^\alpha$ — диференціальний оператор з постійними коефіцієнтами, $\mathcal{E}$ — фундаментальний розв'язок оператора $L(\mathbb{D})$ (див., наприклад, [6, §11.2]). Справджуються такі теореми.

Теорема 4.1. *Нехай для функції $F \in D'_X(\mathbb{R}^d)$ існує згортка $F * \mathcal{E}$. Тоді рівняння $L(\mathbb{D})U = F$ має розв'язок в $D'_X(\mathbb{R}^d)$. Цей розв'язок записується у вигляді $U = F * \mathcal{E}$ і є единим у класі всіх функцій із $D'_X(\mathbb{R}^d)$, для яких існує згортка з $\mathcal{E}$.*

Доведення теореми 4.1 проводиться тим же способом, що й для звичайних узагальнених функцій [6, §11.3], якщо врахувати, що $F * \delta = F$ для кожної $F \in D'_X(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 4.2. *Нехай функції* $\mathcal{F} \in D'_X(\mathbb{R}^{d+1})$ *та* $h \in D'(\mathbb{R}^{d+1})$ *задовольняють такі умови:*

1) $\mathcal{F} = \bar{0}$ *при* $t < 0$*;*

2) $\operatorname{supp} h$ *міститься у множині*

$$\bar{\Gamma}_+(d) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid at - |x| \geq 0\}.$$

Тоді існує згортка $\mathcal{F} * h$*, причому* $\mathcal{F} * h = \bar{0}$ *при* $t < 0$.

Для доведення теореми 4.2 використовуються ті ж міркування, що й у випадку звичайних узагальнених функцій [6, §12.2].

5. Єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння

Справджується наступна теорема.

Теорема 5.1. *При* $d = 1, 2, 3$ *задача Коші (3.1) має єдиний розв'язок.*

Доведення. Покладемо $X = L_0$. Тоді, згідно з означенням 3.1, у.в.ф. V є розв'язком задачі Коші (3.1) тоді і тільки тоді, коли V є розв'язком в $D'_X(\mathbb{R}^{d+1})$ рівняння $\Box_a V = G$, а також $V = 0$ при $t < 0$. Тут $\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \triangle_x$ — хвильовий оператор, G — задана X-узагальнена функція, яка визначається за правилом

$$(G, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x,t) d\mu(x,t) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial t} d\varsigma(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) d\nu(x).$$

Оскільки стохастична міра μ рівна нулю на усіх вимірних підмножинах множини K, то $G = 0$ при $t < 0$. Також при $d = 1, 2, 3$ носій фундаментального розв'язку $\mathcal{E}_d$ хвильового оператора $\Box_a$ міститься у множині $\bar{\Gamma}_+(d)$, а отже, згортка $G * \mathcal{E}_d$ існує внаслідок теореми 4.2. Тому єдиність знайденого раніше розв'язку задачі Коші випливає з теореми 4.1. □

Література

1. A. Millet and P. Morien, *On a non linear stochastic wave equation in the plane: existence and uniqueness of the solution*, Ann. Appl. Probab. **11** (2007), 922–951.
2. R. C. Daland, *Extending martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous S.P.D.E's*, Electronic J. Probab. **4** (1999), no. 6, 1–29.
3. R. C. Daland and N. E. Frangos, *The stochastic wave equation in two spatial dimensions*, The Annals of Probab. **26** (1998), no. 1, 187–212.
4. L. Quer-Sardanyons and S. Tindel, *The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet*, Stoch. Prosses. Appl. **17** (2007), 1448–1472.
5. В. Н. Радченко, *Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами*, Укр. мат. журнал **60** (2008), № 12, 1675–1685.
6. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, "Наука", Москва, 1981.
7. І. Боднарчук, *М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка **24** (2010), 28–33.
8. В. Н. Радченко, *Интегралы по общим случайным мерам*, Труды Института математики НАН Украины **27** (1999).
9. S. Kwapień and W. A. Woycziński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
10. К. Иосида, *Функциональный анализ*, "Мир", Москва, 1967.

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4-е, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: gorodnyaya@yandex.ru

Надійшла 23/06/2011