Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 85, 2011, стор. 56–65

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 85, 2011, pp. 56–65

СПРОЩЕННЯ ФОРМУЛИ СПІТЦЕРА ДЛЯ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ТА МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 519.21

Д. В. ГУСАК

Анотація. Для однорідних процесів $\{\xi(t), \zeta(0) = 0, t \geq 0\}$ з незалежними приростами у випадку їх напівнеперервності або майже напівнеперервності одержано спрощені співвідношення для спектральних функцій у формулах Спітцера в термінах експоненти з показником, що визначається відповідним коренем рівняння Лундберга.

Abstract. Let $\{\xi(t), \zeta(0) = 0, t \geq 0\}$ be a process with stationary independent increments. If $\xi(t)$ is a semicontinuous or almost semicontinuous process, then the simplified relations are established for spectral functions in Spitzer's formulas in termes of exponential function with the index of the exponent, which is defined by the corresponding root of Lundberg's equation.

Аннотация. Для однородных процессов $\{\xi(t), \zeta(0) = 0, t \geq 0\}$ с независимыми приращениями в случае их полунепрерывности или почти полунепрерывности получено упрощение соотношений для спектральных функций в формулах Спитцера в терминах експоненты с показателем, который определяется соответствующим корнем уравнения Лундберга.

Для довільного однорідного процесу $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$, $t \geq 0$) з незалежними приростами характеристичні функції екстремумів визначаються формулами Спітцера (див. [1, 2]). Якщо позначити $\xi^{\pm}(t) = \sup(\inf)_{0\leq t'\leq t}\xi(t')$, то згідно з цими формулами інтегральні перетворення характеристичних функцій (х.ф.) $Ee^{i\alpha\xi^{\pm}(t)}$ визначаються як х.ф. безмежно подільних розподілів зі спектральними функціями $N_s^{\pm}(x)$ ($\pm x > 0$). Функції $N_s^{\pm}(x)$ є досить складними інтегральними перетвореннями розподілів додатних (від'ємних) значень $\xi(t)$.

Для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів спектральні функції $N_s^{\pm}(x)$ значно спрощуються і відповідно простіше записуються х.ф. $\xi^{\pm}(\theta_s)$. Для такого спрощення використовуються формули двоїстості зв'язку між розподілами $\xi^+(t)$ та $\tau^+(x) = \inf\{t\colon \xi(t) > x\}$, $x > 0$.

Якщо $\xi(t)$ — довільний однорідний процес з незалежними приростами, θ_s має показниковий розподіл ($P\{\theta_s > t\} = e^{-st}, s > 0$), тоді (див. [3], теорема 1.6 і формули (1.64)–(1.65)) х.ф.

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) =: Ee^{i\alpha\xi^{+}(\theta_s)} = s\int_0^{\infty} e^{-st} Ee^{i\alpha\xi^{\pm}(t)}\,dt$$

визначаються співвідношеннями (формулами Спітцера)

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \exp\left\{\pm\int_0^{\pm\infty}(e^{i\alpha x} - 1)\,dN_s^{\pm}(x)\right\}, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50; Secondary 60K10.

Ключові слова і фрази. Напівнеперервні та майже напівнеперервні процеси з незалежними приростами, формули Спітцера, рівняння Лундберга, спектральні функції Спітцера.

$$\begin{aligned} N_s^+(x) &= -\int_0^\infty e^{-st}t^{-1}P\{\xi(t)>x\}\,dt, \qquad x>0,\\ N_s^-(x) &= \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}P\{\xi(t)<x\}\,dt, \qquad x<0. \end{aligned} \tag{2}$$

Наше завдання: вияснити, коли можна спростити формули (2) для $N_s^\pm(x)$.

Для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів формули Спітцера (1.65)–(1.66) на основі результатів §§ 3.1–3.2 [3] значно спрощуються. В першій частині статті буде показано, як спрощується спектральна функція Спітцера $N_s^+(x)$ для напівнеперервних зверху процесів і відповідно — формула Спітцера для $\xi^+(\theta_s)$. Для майже напівнеперервних зверху процесів має місце аналогічний результат, який спочатку встановлюється для умовної генератриси ($\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>0\}=q_+(s)>0$)

$$\hat\varphi_+(s,iz) =: \mathbf{E}\left[e^{-z\xi^+(\theta_s)}|\xi^+(\theta_s)>0\right] = \mathbf{E}[e^{-z\xi^+(\theta_s)},\xi^+(\theta_s)>0]q_+^{-1}(s),$$

а потім для безумовної генератриси $\varphi_+(s,iz)$. В другій частині покажемо, як розподіл мінімуму $\xi^-(t)$ для напівнеперервних зверху процесів $\xi(t)$ пов'язаний з розподілом від'ємних значень $\xi(t)<0$ (не використовуючи при цьому формули (1)–(2) для $N_s^-(x)$).

1. Спрощення спектральної функції $N_s^+(x)$ для напівнеперервних та майже напівнеперервних зверху процесів. Нехай $\xi(t)$ немонотонний напівнеперервний зверху процес з від'ємним стрибками ($\int_{-1}^0 x^2\Pi(dx)<\infty$) з кумулянтою

$$\psi_1(\alpha) = i\alpha a' - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\alpha x}-1-i\alpha x\mathbb{1}_{|x|\le 1}\right)\Pi(dx); \tag{1}$$

$$a = a' - \int_{-\infty}^0 x\Pi(dx) > 0$$

при

$$\sigma^2=0, \qquad \int_{-1}^0 |x|\,\Pi(dx)>0.$$

Для процесів $\xi(t)$ з кумулянтою (1) майже одночасно Keilson J.H.B. [4], Золотарев В.М. [5] і Боровков А.А. [6] одержали формули двоїстого зв'язку розподілів $\xi(t)>0$ та $\tau^+(x)$ (див. (3.70) для $F(t,x)=\mathbf{P}\{\xi(t)<x\}$ в [3])

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t,x) = tx^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t\right\}, \qquad x>0. \tag{2}$$

Для майже напівнеперервних зверху процесів з показниково розподіленими додатними стрибками і кумулянтою

$$\psi_2(\alpha) = i\alpha a + \lambda_1\frac{i\alpha}{c-i\alpha} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\alpha x}-1\right)\Pi(dx), \tag{3}$$

$$f(z) = \mathbf{E}\left[e^{-z\xi}/\xi>0\right] = \frac{c}{c-i\alpha}, \qquad \lambda_1, c>0,\ a\le 0,$$

ми одержали подібну формулу зв'язку умовного розподілу моменту досягнення додатного рівня $\{\tau^+(x)/\tau^+(0)<t\}$ з розподілом $\xi(t)>0$ (див.(5.45) в [3])

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t,x) = tx^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t/\tau^+(0)<t\right\}, \qquad x>0. \tag{4}$$

На основі (3) та (4) встановлюються твердження, в яких одержано прості співвідношення для похідних спектральних функцій $\frac{\partial}{\partial x}N_s^+(x)$, $\frac{\partial}{\partial x}N_0^+(x)$ при $m=\mathbf{E}\xi(1)<0$. Позначимо

$$P(s,x)=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x\}, \qquad \overline{P}(s,x)=1-P(s,x), \qquad P_\pm(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s)<x\}.$$

Теорема 1. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1) генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається канонічним зображенням (див.(1.65) в [3]) в якому похідна спектральної функції $N_s^+(x)$ має простий вигляд*

$$\varphi_+(s,iz) = \exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{-zx}-1\right) dN_s^+(x)\right\}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_s^+(x) = x^{-1}\mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > x\right\} = x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, \qquad x>0,$$

де $\rho_+(s)$ — корінь рівняння Лундберга $k_1(r) = \psi_1(-ir) = s$;

$$\rho_+(s) = \begin{cases} P'(s,0)\overline{P}^{-1}(s,0), & \sigma \geq 0,\ \int_{-1}^0 x^2\Pi(dx) < \infty, \\ s(ap_-(s))^{-1}, & \sigma = 0,\ \int_{-1}^0 |x|\Pi(dx) < \infty. \end{cases}$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, тоді $\rho_+(s) \to \rho_+ > 0$, $N_s^+(x) \to N_0^+$, $x > 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x} N_0(x) = x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, \qquad |N_0(x)| = \int_x^\infty y^{-1}e^{-\rho_+ y}dy, \qquad x>0. \tag{6}$$

Доведення. Згідно з (2) спектральна функція Спітцера

$$|N_s^+(x)| = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\int_x^\infty \frac{\partial}{\partial y}F(t,y)\,dy\,dt$$

зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} |N_s^+(x)| &= \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\int_x^\infty ty^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^+(y)<t\}\,dy\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\int_x^\infty \mathbf{P}\{\tau^+(y)<t\}\,d\ln y\,dt. \end{aligned}$$

Після інтегрування частинами по y, потім по t знаходимо ($x>0$)

$$\begin{aligned} |N_s^+(x)| &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_x^\infty \ln y d\mathbf{P}\{\xi^+(t)<y\} - \ln x\mathbf{P}\{\xi^+(t)>x\}\right] dt \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}\left[\ln x\mathbf{P}\{\xi^+(t)>x\} - \mathbf{E}\ln\xi^+(t)\mathbb{1}_{\xi^+(t)>x}\right] dx \\ &= \ln x\overline{P}_+(s,x) - \mathbf{E}\ln\xi^+(\theta_s)\mathbb{1}_{\xi^+(\theta_s)>x} = \int_x^\infty \ln\frac{x}{y}dP_+(s,y). \end{aligned}$$

Отже похідна функції $N_s^+(x)$ виражається через $\overline{P}_+(s,x) = 1 - P_+(s,x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}N_s^+(x) = \int_x^\infty \left(\ln\frac{x}{y}\right)' dP_+(s,y) = \frac{1}{x}\overline{P}_+(s,x), \qquad x>0.$$

Звідси випливає (5), оскільки для напівнеперервних зверху процесів $\overline{P}_+(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}$, $x>0$. При $m<0$ і $s\to 0$ із (5) випливає (6). □

Теорема 2. *Для процесу з кумулянтою (3) умовна генератриса $\xi^+(\theta_s) > 0$ визначається співвідношенням*

$$\hat{\varphi}_+(s,iz) =: \mathbf{E}\left[e^{-z\xi^+(\theta_s)}/\xi^+(\theta_s) > 0\right] = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)+z},$$

$\rho_+(s) = cp_+(s)$ — корінь рівняння Лундберга $k_2(\rho_+(s)) = s$, $p_+(s)p_-(s) = s(s+\lambda)^{-1}$, якщо $\int_{-\infty}^0 \Pi(dx) < \infty$. При цьому $\hat{\varphi}_+(s,iz)$ має канонічне зображення з відповідною спектральною функцією $\hat{N}_s(x)(x>0)$

$$\hat{\varphi}_+(s,iz) = \exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{-zx}-1\right) d\hat{N}_s(x)\right\} \tag{7}$$

$$\left|\hat{N}_s(x)\right| = \frac{1}{q_+(s)} \int_x^\infty y^{-1}\overline{P}_+(s,y)dy, \qquad p_\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\}, \tag{8}$$

$$\hat{N}'_s(x) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{N}_s(x) = \frac{1}{q_+(s)x}P_+(s,x) = x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, \qquad q_+(s) = 1 - p_+(s), \qquad x > 0.$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\to} \rho_+ = cp_+$, $\hat{N}_s(x) \underset{s\to 0}{\to} \hat{N}_0(x)$, $p_+ = \mathbf{P}\{\xi^\pm = 0\}$,

$$\hat{N}'_0(x) = \frac{1}{q_+ x}\mathbf{P}\left\{\xi^+ > x\right\} = x^{-1}e^{\rho_+ x}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Доведення. Згідно з (4) спектральна функція $\hat{N}_s(x)$ в (7) зводиться до вигляду

$$\left|\hat{N}_s(x)\right| = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_x^\infty \mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > y/\xi^+(t) > 0\right\} y^{-1}\, dy\right) dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_x^\infty \mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > y/\xi^+(t) > 0\right\} d\ln y\right) dt.$$

Після інтегруванням частинами по y і по t знаходимо, що

$$\left|\hat{N}_s(x)\right| = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > 0\right\}}\left[\mathbf{E}\ln\xi^+(t)\mathbb{1}_{\xi^+(t)>x} - \ln x\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > x\right\}\right] dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{se^{-st}}{\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > 0\right\}}\left[\mathbf{E}\ln\xi^+(t)\mathbb{1}_{\xi^+(t)>x} - \ln x\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > x\right\}\right] dt$$
$$= \frac{1}{\overline{P}_+(s,0)}\int_x^\infty (\ln x - \ln y)\, dP_+(s,y), \qquad x > 0,\ \overline{P}_+(s,0) = q_+(s).$$

Отже похідна $\hat{N}_s(x)$ спрощується і набуває вигляду

$$\hat{N}'_s(x) = \frac{1}{q_+(s)x}\overline{P}_+(s,x), \qquad x > 0.$$

Звідси з урахуванням того, що для майже напівнеперервних зверху процесів

$$\overline{P}_+(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \qquad x > 0,$$

випливає (8). При $m < 0$ із (8) при $s \to 0$ випливає (9). □

Теорема 3. *Безумовна генератриса* $\xi^+(\theta_s) \geq 0$ *згідно з* (3.87) *в* [3] *визначається співвідношенням*

$$\varphi_+(s,iz) = \frac{p_+(s)(c+z)}{\rho_+(s) + z} = \hat{\varphi}_+(s,z)f^{-1}(z), \qquad f(z) = \frac{c}{c+z}, \tag{10}$$

і допускає аналогічне до (5) *канонічне зображення зі спектральною функцією* $N_s(x)$, *похідна якої визначається співвідношенням*

$$N'_s(x) = \hat{N}'_s(x) - x^{-1}e^{-cx} = x^{-1}e^{-cx}\left(e^{q_+(s)} - 1\right), \qquad x > 0. \tag{11}$$

При $m < 0$

$$N'_s(x) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} N'_0(x) = x^{-1}e^{-cx}\left(e^{q_+ x} - 1\right), \qquad x > 0. \tag{12}$$

Доведення. З (10) випливає, що

$$\ln\varphi_+(s,iz) = \int_0^\infty \left(e^{-zx} - 1\right)\, dN_s(x) = \ln\hat{\varphi}_+(s,iz) - \ln f(z), \tag{13}$$

де $\ln f(z)$ можна виразити інтегралом Фруллані

$$\ln f(z) = \ln\frac{c}{c+z} = \int_0^\infty x^{-1}\left(e^{-zx} - 1\right)e^{-cx}\, dx. \tag{14}$$

Після підстановки прологарифмованого співвідношення (7), а також (14) у (13) одержуються формули (11), а з (11) при $m < 0$ і $s \to 0$ випливає (12). □

З теорем 1–3 випливає наступний результат.

Наслідок 1. Усереднені по t хвости розподілу значень $\xi(t) > 0$ визначаються щільностями при $x > 0$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \overline{F}(t,x)e^{-st}d\ln t\right)\\
&\quad=\begin{cases} x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, & \text{для } \xi(t) \text{ з кумулянтою (1)},\\ x^{-1}e^{-cx}\left(e^{-cq_+(s)x}-1\right), & \text{для } \xi(t) \text{ з кумулянтою (3)}.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Якщо $m < 0$, тоді при $x > 0$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \overline{F}(t,x)d\ln t\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^\infty \overline{F}(e^y,x)\,dy\\
&\quad=\begin{cases} x^{-1}e^{-\rho_+ x}, & \text{для } \xi(t) \text{ з кумулянтою (1)},\\ x^{-1}e^{-cx}\left(e^{-cq_+ x}-1\right), & \text{для } \xi(t) \text{ з кумулянтою (3)}.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Приклад 1. Розглянемо процес з прикладу 3.3 в [3]

$$
\xi(t) = w(t) - t + \sum_{k\le\nu(t)}\xi_k, \qquad \mathbf{E}e^{-z\xi_k} = f(z) = \frac{c}{c+z}, \quad c > 0, \tag{17}
$$

$\nu(t)$ — простий пуассонів процес з інтенсивністю $\lambda > 0$, $w(t)$ — стандартний вінерів процес. Знайти похідну спектральної функції $\frac{\partial}{\partial x}N_s(x)$ і $\frac{\partial}{\partial x}N_0(x)$ при $c = 6$, $\lambda = \frac{5}{8}$.

Легко довести, що кумулянта $\xi(t)$

$$
\psi(\alpha) = -i\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \lambda\frac{i\alpha}{c - i\alpha} \tag{18}
$$

після заміни $i\alpha = r$ виражається через $m = \lambda c^{-1} - 1$

$$
k(r) = \psi(-ir) = \frac{-r^3 - (c+2)r^2 - 2mcr}{2(c-r)}. \tag{19}
$$

Рівняння Лундберга $k(r) = s$ зводиться до кубічного

$$
r^3 - (2+c)r^2 - 2(mc+s)r + 2cs = 0, \qquad s > 0, \tag{20}
$$

яке має три корені: $r_1(s) = -\rho_-(s) < 0$, $0 < r_2(s) < r_3(s)$. Перший корінь визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$: $\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}$. Додатні корені визначають генератрису $\xi^+(\theta_s)$

$$
\varphi_+(s,iz) = r_2(s)(r_2(s)+z)^{-1}r_3(s)(r_3(s)+z)^{-1}f^{-1}(z). \tag{21}
$$

Логарифми множників (21) виражаються інтегралами Фруллані

$$
\ln\frac{r_k(s)}{r_k(s)+z} = \int_0^\infty e^{-r_k(s)x}\left(e^{-xz}-1\right)x^{-1}dx, \qquad k = 2,3. \tag{22}
$$

Після підстановки (14) та (22) у прологарифмоване співвідношення (21) знаходимо

$$
\frac{\partial}{\partial x}N_s(x) = x^{-1}\left(e^{-r_2(s)x} + e^{-r_3(s)x} - e^{-cx}\right), \qquad x > 0. \tag{23}
$$

Якщо $m < 0$, $\lambda < c$, тоді при $s \to 0$ $r_1(s) \to 0$, $r_{2,3}(s) \to r_{2,3} > 0$. Отже

$$
\frac{\partial}{\partial x}N_0(x) = x^{-1}\left(e^{-r_2x} + e^{-r_3x} - e^{-cx}\right), \qquad x > 0.
$$

Після підстановки $\lambda = \frac{5}{8}$, $c = 6$ знаходимо $D_0 = 9$, $r_2 = 2.5 < r_3 = 5.5$

$$
\frac{\partial}{\partial x}N_0(x) = x^{-1}e^{-6x}\left(e^{2.5x} + e^{0.5x} - 1\right), \qquad x > 0. \tag{24}
$$

Цей приклад показує, що із збільшенням коренів Лундберга збільшується кількість експонент у $\frac{\partial}{\partial x}N_s(x)$ та $\frac{\partial}{\partial x}N_0(x)$. Одна з експонент обумовлена показниковим розподілом стрибків $\xi(t)$ з параметром $c = 6$. Аналогічна ситуація виникає, якщо для напівнеперервних (майже напівнеперервних) знизу процесів додатні стрибки $\xi(t)$ мають ерланговий розподіл $E(n)$ порядку $n \geq 2$.

Приклад 2. Нехай $\xi(t) = S(t) - t$ — процес, що розглядається в прикладі 5.1 в [3] з х.ф. стрибків типу $E(2)$ ($S(t) = \sum_{k\leq\nu(t)} \xi_k$)

$$\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3-i\alpha} + \frac{7}{7-i\alpha}\right), \qquad m = -\frac{2}{7}.$$

Знайти похідні $\frac{\partial}{\partial x}N_s(x)$, $\frac{\partial}{\partial x}N_0(x)$, $x > 0$.

Легко довести, що як і в попередньому прикладі рівняння Лундберга зводиться до кубічного рівняння. При $s = 0$ це рівняння

$$r^3 - 7r^2 + 6r = 0$$

має корені $r_1 = -\rho_- = 0$, $r_2 = R_+ = 1$, $r_3 = 6$. При $s > 0$ рівняння Лундберга має корені

$$r_1(s) = -\rho_-(s), \qquad 0 < r_2(s) = R_+(s) < r_3(s),$$
$$r_1(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad r_{2,3}(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} r_{2,3} > 0,$$

що визначають розподіли $\xi^{\pm}(\theta_s)$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}, \qquad \varphi_+(s,iz) = \frac{s}{\rho_-(s)}\frac{(3+z)(7+z)}{(r_2(s)+z)(r_3(s)+z)}.$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ зводиться до вигляду

$$\varphi_+(s,iz) = \frac{r_2(s)}{r_2(s)+z}f_1^{-1}(z)f_2^{-1}(z), \tag{25}$$

де $f_k = \frac{c_k}{c_k+z}$, $c_1 = 3$, $c_2 = 7$. Отже

$$\begin{aligned}\ln\varphi_+(s,iz) &= \int_0^\infty \left(e^{-zx}-1\right)dN_s(x)\\ &= \ln\frac{r_2(s)}{r_2(s)+z} + \ln\frac{r_3(s)}{r_3(s)+z} - \ln f_1(z) - \ln f_2(z).\end{aligned} \tag{26}$$

На основі зображень логарифмів у (26) інтегралом Фруланні знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial x}N_s(x) = x^{-1}\left(e^{-r_2(s)x} + e^{-r_3(s)x} - e^{-7x}\right), \qquad x > 0. \tag{27}$$

Оскільки $m = -\frac{2}{7} < 0$, то $\ln\mathbf{E}e^{-z\xi^+}$ визначається співвідношенням

$$\ln\varphi_+(iz) = \int_0^\infty \left(e^{-zx}-1\right)\frac{\partial}{\partial x}N_0^+(x)\,dx, \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N_0^+(x) = x^{-1}\left(e^{-x} + e^{-6x} - e^{-3x} - e^{-7x}\right), \qquad x > 0.$$

Дві експоненти в (28) обумовлені показниковими розподілами, що визначають розподіл $E(2)$ вимог ξ_k з показниками $c_1 = 3$ та $c_2 = 7$.

2. Вираження розподілу $\xi^-(t)$ в термінах розподілу $\xi(t) < 0$ для напівнеперервних зверху процесів. У другій частині статті для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) покажемо, що розподіл $\xi^-(t)$ явно виражається через розподіл значень $\xi(t) < 0$ простіше за співвідношення (1)–(2) залежно від випадків:

1) $\xi(t)$ має обмежену варіацію; $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^0 |x|\Pi(dx) < 0$, $a > 0$.
2) $\xi(t)$ має необмежену варіацію.

Надалі будемо позначати

$$\begin{gathered}\tilde{P}_>(s,\alpha) = \int_{R^+} e^{i\alpha x}\overline{P}(s,x)dx, \qquad \tilde{P}_<(s,\alpha) = \int_{R^-} e^{i\alpha x}P(s,x)dx,\\ \tilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \int_{R^-} P_-(s,x)e^{i\alpha x}dx, \qquad \tilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \int_{R^+} \overline{P}_+(s,x)e^{i\alpha x}dx,\\ \mathbf{E}_\pm\xi(t) = \mathbf{E}\xi(t)\mathbb{1}_{\pm\xi(t)>0} = \pm\int_{R^\pm} \mathbf{P}\left\{\pm\xi(t) > \pm x\right\} dx,\\ \mathbf{E}_+\xi(t) = \int_{R^+} \overline{F}(t,x)dx, \qquad \mathbf{E}_-\xi(t) = -\int_{R^-} F(t,x)\,dx.\end{gathered} \tag{29}$$

Теорема 4. *Нехай $\xi(t)$ напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (1). *У випадку 1) ($a = a' - \int_{-1}^0 x\Pi(dx) > 0$)*

$$\tilde{\Phi}_-(s,\alpha) = as^{-1}p_-(s)\int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}dP(s,x) + \tilde{P}_<(s,\alpha), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\xi^-(t) < x\right\} &= F_-(t,x)\\ &= F(t,x) + a\int_0^t \mathbf{P}\left\{\xi^-(y) = 0\right\}\frac{\partial}{\partial x}F(t-y,x)\,dy, \qquad x < 0.\end{aligned} \tag{31}$$

Якщо $m < 0$, тоді ($\mathbf{E}_+\xi(t) + \mathbf{E}_-\xi(t) = mt$)

$$\mathbf{P}\left\{\xi^-(t) = 0\right\} = (at)^{-1}\,\mathbf{E}_+\xi(t) = (at)^{-1}\int_0^\infty \overline{F}(t,x)\,dx. \tag{32}$$

В обох випадках справедливі співвідношення

$$\tilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \mathbf{E}\xi^+(\theta_s)\int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}dP(s,x) + \tilde{P}_<(s,\alpha), \tag{33}$$

$$\begin{aligned}F_-(t,x) &= F(t,x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}F(t-y,x)d\mathbf{E}\xi^+(y)\\ &= F(t,x) + \int_0^t y^{-1}\mathbf{E}_+\xi(y)\frac{\partial}{\partial x}F(t-y,x)\,dy, \qquad x < 0.\end{aligned} \tag{34}$$

Доведення. За допомогою позначень (29) після інтегрування частинами встановлюються співвідношення

$$\varphi(s,\alpha) = 1 + i\alpha\left(\tilde{P}_>(s,\alpha) - \tilde{P}_<(s,\alpha)\right), \qquad \varphi_-(s,\alpha) - 1 = -i\alpha\tilde{\Phi}_-(s,\alpha). \tag{35}$$

В обох випадках із о.ф.т. (див. теореми 1.16 та 3.1 в [3]) з урахуванням (35) встановлюються співвідношення

$$\rho_+(s)\left(\tilde{P}_>(s,\alpha) - \tilde{P}_<(s,\alpha)\right) = \varphi(s,\alpha) - \rho_+(s)\tilde{\Phi}_-(s,\alpha),$$

з якого після застосування операції проектування $[\cdot]_-$:

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x}G(x)\,dx\right]_\pm = \int_{R^\pm} e^{i\alpha x}G(x)\,dx$$

визначається $\tilde{\Phi}_-(s,\alpha)$, а саме

$$\tilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \rho_+^{-1}(s)\int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} dP(s,x) + \tilde{P}_<(s,\alpha). \tag{36}$$

Зауважимо, що у випадку 1) згідно з наслідком 3.1 в [3]

$$p_-(s) = \frac{s}{a\rho_+(s)}, \qquad \rho_+^{-1}(s) = \frac{ap_-(s)}{s}.$$

Тому з (36) випливає (30), після обернення якого по s та α встановлюється (31).

Для доведення (32) слід врахувати, що

$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = -\varphi'_+(s,iz)|_{z=0} = \rho_+^{-1}(s) = \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > x\right\} dx.$$

Отже

$$\begin{aligned} \rho_+^{-1}(s) &= \frac{1}{s} a p_-(s) = a\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\xi^-(t) = 0\right\} dt \\ &= s\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > x\right\} dx\, dt \\ &= s\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t\right\} dx\, dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Після обернення по s із (37) згідно з (4) випливає, що

$$\begin{aligned} a\mathbf{P}\left\{\xi^-(t) = 0\right\} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t\right\} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}F(t,x)xt^{-1}\, dx = t^{-1}\mathbf{E}_+\xi(t) \end{aligned} \tag{38}$$

і (32) доведено. Зауважимо, що в обох випадках $\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = \rho_+^{-1}(s)$, тому з (36) випливає (33), після обернення якого по s та α встановлюється перше співвідношення (34). Згідно з (37)

$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = s\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t\right\} dx\, dt,$$

$$\mathbf{E}\xi^+(t) = \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t\right\} dx.$$

Після диференціювання $\mathbf{E}\xi^+(t)$ знаходимо

$$d\mathbf{E}\xi^+(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t\right\} dx\, dt = t^{-1}\mathbf{E}_+\xi(t)\, dt.$$

Підставивши $d\mathbf{E}\xi^+(y)$ у перший рядок (34) встановлюємо справедливість другої формули в (34), і теорема повністю доведена. □

Зауважимо, що при $\lambda < \infty$ аналог формули (32) одержано на основі графічних міркувань для траєкторій $\xi(t) = S(t) - t$ (див. теорема 2.1 в [7] для формули Seal'a). Формула (32) справедлива для напівнеперервних зверху $\xi(t)$ з $a > 0$, $\lambda = \int_R \Pi(dx) \leq \infty$. Відповідний аналог (32) має місце для напівнеперервних знизу процесів з $a < 0$ і $\lambda \leq \infty$, що узагальнює формулу Seal'a.

Для класичного процесу ризику

$$\xi_u(t) = u + at - S(t), \qquad S(t) = \sum_{k\leq\nu(t)} \xi_k, \qquad u > 0,\ a > 0,$$

($\nu(t)$ — пуассонів процес з інтенсивністю λ, $\mathbf{P}\{\xi_k > 0\} = 1$) співвідношення (31) при $x = -u$ визначає імовірність банкрутства на обмеженому інтервалі $[0, t]$ з початковим капіталом $u > 0$. Ця формула встановлює зв'язок імовірності банкрутства при $u > 0$, $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$, $\xi(t) = \xi_0(t)$,

$$\Psi_t(u) = \mathbf{P}\{\xi_u(t') < 0 \text{ при деякому } t' < t\} = F_-(t, -u)$$

з імовірністю виживання при $u = 0$, яка згідно з (32) визначається співвідношенням

$$\overline{\Psi}_t(0) = 1 - \Psi_t(0) = (at)^{-1} \int_0^\infty \overline{F}(t, x) dx. \tag{39}$$

Після цих позначень формула (31) набуває вигляду

$$\Psi_t(u) = F(t, -u) + a \int_0^t \overline{\Psi}_{t-y}(0) F'(y, x)\big|_{x=-u} \, dy, \tag{40}$$

а ймовірність банкрутства $\Psi_t(0)$ з урахуванням співвідношення

$$\mathbf{E}_+\xi(t) + \mathbf{E}_-\xi(t) = mt, \qquad m = a - \lambda\mu_1, \quad \mu_1 = \mathbf{E}\xi_1 > 0,$$

можна виразити через $\mathbf{E}_-\xi(t)$

$$\Psi_t(0) = \frac{\lambda\mu_1}{a} - \frac{1}{at} \int_{R^-} F(t, x) \, dx \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} q_- = \frac{\lambda\mu_1}{a} \quad \text{при } m > 0.$$

Слід зауважити, що для напівнеперервного знизу процесу (див. приклад 1) або майже напівнеперервного знизу процесу завжди існують два прості корені рівняння Лундберга

$$r_1(s) = -\rho_-(s) < 0 < r_2(s) = R_+(s).$$

Перший корінь повністю визначає х.ф. $\xi^-(\theta_s)$

$$\varphi_-(s, \alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}$$

або

$$\varphi_-(s, \alpha) = \frac{p_-(s)(b + i\alpha)}{p_-(s) + i\alpha}, \qquad \rho_-(s) = bp_-(s).$$

Другий корінь $R_+(s)$ лише частково визначає х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ з точністю до деякої функції $Q(s, \alpha)$. Зокрема для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\xi(t) = S(t) - C(t)$ з випадковими преміями і кумулянтою

$$\psi(\alpha) = \psi_+(\alpha) + \psi_-(\alpha), \qquad \psi_-(\alpha) = -\frac{\lambda_2 i\alpha}{b + i\alpha}, \qquad b > 0, \ \lambda_{1,2} > 0 \tag{43}$$

($\psi_+(\alpha) = \lambda_1(\varphi(\alpha) - 1)$ — кумулянта процесу вимог $S(t)$, $\psi_-(\alpha)$ — кумулянта $-C(t)$) має місце

Пропозиція. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (43) х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ допускає зображення*

$$\varphi_+(s, \alpha) = Ee^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \frac{s}{p_-(s)}[(R_+(s) - i\alpha)Q(s, \alpha)]^{-1}, \tag{44}$$

$$Q(s, 0) = s(p_-(s)R_+(s))^{-1}, \qquad Q(s, i\rho_-(s))Q(s, -iR_+(s)) \neq 0.$$

Якщо $m = E\xi(1) < 0$, тоді $R_+(s) \underset{s \to 0}{\to} R_+ > 0$ і х.ф. ξ^+ має зображення

$$\varphi_+(\alpha) = |m|b(R_+ - i\alpha)^{-1}Q(0, \alpha)^{-1}, \qquad Q(0, 0) = \frac{|m|b}{R_+}. \tag{45}$$

Головна частина ймовірності банкрутства при $u \to \infty$

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\xi^+ > u\} \sim \kappa e^{-R_+ u}, \qquad \kappa \sim \mathbf{P}\{\xi^+ > 0\} = q_+ \tag{46}$$

з точністю до деякого множника κ визначається експонентою $e^{-R_+ u}$.

Доведення. З того, що знаменник х.ф. $\xi(\theta_s)$

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s(b+i\alpha)}{k_*(s,\alpha)}, \qquad k_*(s,\alpha) = s(b+i\alpha) + \psi_+(\alpha)(b+i\alpha) - i\alpha,$$

має розклад $k_*(s,\alpha) = Q(s,\alpha)(R_+(s)-i\alpha)(\rho_-(s)+i\alpha)$, на підставі основної факторизаційної тотожності (1.64) в [3] встановлюється зображення для $\varphi_+(s,\alpha)$. Для $m<0$ з (44) виводиться граничним переходом $s \to 0$ співвідношення для $\varphi_+(\alpha)$ (45). □

Зауважимо, що коли процес $\xi(t)$ — напівнеперервний, більшість апроксимаційних формул для $\Psi(u)$, наведених у [3] (див. формули (3.17), (3.23)–(3.25), (3.44)), полягають у вираженні наближених оцінок κ для коефіцієнта q_+ та для кореня R_+ в термінах 2-х або 3-х перших моментів $\xi(1)$.

Література

1. Ф. Спитцер, *Принципы случайного блуждания*, "Мир", Москва, 1969.
2. F. A. Spitzer, *A combinatorial lemma and its application to probability theory*, Trans. Amer. Soc. **82** (1956), 323–329.
3. Д. В. Гусак, *Граничні задачі для випадкових процесів з незалежними приростами в теорії ризику*, Праці Інституту математики НАН України, т. 67, Київ, 2007.
4. J. H. B. Keilson, *The first passage time density for time homogeneous skip-free walks on the continuum*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), no. 3, 1001–1011.
5. В. М. Золотарев, *Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями*, Теория вероят. и ее примен. **9** (1964), № 4, 724–733.
6. А. А. Боровков, *О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями*, Теория вероят. и ее примен. **10** (1965), № 2, 360–364.
7. S. Asmussen, *Ruin Probability*, World Scientist, Singapore, 2000.

252601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3, Інститут математики НАН України
Адреса електронної пошти: random@imath.kiev.ua

Надійшла 10/12/2010