Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 150–162

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 150–162

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З НЕЗАЛЕЖНИМИ Q_∞-СИМВОЛАМИ

УДК 519.21

Р. О. НІКІФОРОВ І Г. М. ТОРБІН

Анотація. У роботі досліджується проблема еквівалентного означення розмірності Хаусдорфа–Безиковича за допомогою системи $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-розкладу. Знайдено достатні умови на стохастичний вектор Q_∞, при яких система $\Phi(Q_\infty)$ є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Досліджено тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними (взагалі кажучи, різнорозподіленими) цифрами Q_∞-розкладу.

Abstract. We study a problem of equivalent definitions of the Hausdorff-Besicovitch dimension via a system $\Phi(Q_\infty)$ of cylinders of the Q_∞-expansion. Sufficient conditions for the system $\Phi(Q_\infty)$ to be faithful for the determination of the Hausdorff–Besicovitch dimension on the unit interval are found and fine fractal properties of probability measures with independent (generally speaking non-identically distributed) Q_∞-digits are studied.

Аннотация. В работе исследуется проблема эквивалентного определения размерности Хаусдорфа–Безиковича при помощи системы $\Phi(Q_\infty)$ цилиндров Q_∞-разложения. Найдены достаточные условия на стохастический вектор Q_∞, при которых система $\Phi(Q_\infty)$ является доверительной для вычисления размерности Хаусдорфа-Безиковича на единичном отрезке. Исследованы тонкие фрактальные свойства вероятностных мер с независимыми (вообще говоря, разнораспределенными) цифрами Q_∞-разложения.

1. Вступ

Дана стаття присвячена дослідженню фрактальних властивостей одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами. Нагадаємо поняття Q_∞-розкладу дійсних чисел ([24]) та декілька альтернативних підходів до його означення. Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, \dots)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатними координатами. При фіксованому векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо множину $[0,1)$ (зліва направо) на зчисленну кількість напіввідкритих відрізків $\Delta_{i_1}^{Q_\infty}$, $i_1 \in \{0,1,2,\ldots\}$, виду $[a,b)$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta_{i_1}^{Q_\infty}\right| = q_{i_1}$,

$$[0,1) = \bigcup_{i_1=0}^{\infty} \Delta_{i_1}^{Q_\infty}.$$

Кожен з $\Delta_{i_1}^{Q_\infty}$ називається циліндром 1-го рангу Q_∞-розкладу.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G30, 11K55, 28A80.

Ключові слова і фрази. Q_∞-розклади, довірчі системи покриттів, сингулярно неперервні розподіли ймовірностей, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, розмірність Хаусдорфа міри.

Дослідження першого автора виконані за сприяння проектів DFG 436 113/97.

Дослідження другого автора виконані за сприяння проектів DFG 436 UKR 113/97, DFG KO 1989/6-1 та фонду Олександра фон Гумбольдта.

Крок $k \geq 2$**.** Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо) на зчисленну кількість напіввідкритих відрізків $\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (без спільних точок)

$$\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=0}^{\infty} \Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

довжини яких

$$\left|\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k}\right| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{i_s} \tag{1}$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 0}\right| : \left|\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}\right| : \dots : \left|\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} m}\right| : \dots = q_0 : q_1 : \dots : q_m : \dots .$$

Кожен з $\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ називається циліндром k-го рангу Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in \{0, 1, 2 \dots\}$, існує послідовність таких вкладених циліндрів

$$\Delta^{Q_\infty}_{i_1} \supset \Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2} \supset \dots \supset \Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k} \supset \cdots,$$

що $\left|\Delta^{Q_\infty}_{i_1 \dots i_k}\right| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка $x \in [0,1)$, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{Q_\infty}_{i_1}, \Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2}, \dots, \Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k}, \dots$.

І навпаки, для кожної точки $x \in [0,1)$ існує єдина (оскільки кожна точка з множини $[0,1)$ належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{Q_\infty}_{i_1(x)} \supset \Delta^{Q_\infty}_{i_1(x) i_2(x)} \supset \dots \supset \Delta^{Q_\infty}_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)} \supset \dots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{Q_\infty}_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)} =: \Delta^{Q_\infty}_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}.$$

Останній вираз називається Q_∞-розкладом точки x. Основи метричної та ймовірнісної теорії Q_∞-розкладів розвивались М.В.Працьовитим в 90-х роках 20-го століття і викладені в монографіях [18, 24], де і було вперше вжито термін Q_∞-представлення (зображення, розклад).

Для читачів, знайомих з теорією f-розкладів дійсних чисел (див. [12, 22]), відзначимо, що Q_∞-розклад дійсних чисел є частковим випадком так званих f-розкладів і породжується наступною строго зростаючою неперервною функцією f, яка визначена на $[0, +\infty)$ умовами: $f(0) = 0$ і f зростає лінійно на кожному відрізку $[n, n+1]$ з $f(n+1) - f(n) = q_n$ для всіх $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Зауважимо також, що Q_∞-розклад можна означити за допомогою систем ітеруючих функцій (IFS, див. [13, 14]). Справді, розглянемо систему ітеруючих функцій, що породжується наступною зчисленною системою стискуючих перетворень подібності:

$$F_0(x) = q_0 \cdot x, \qquad F_i(x) = q_i \cdot x + (q_0 + \dots + q_{i-1}), \qquad \forall i \in \mathbf{N}.$$

Очевидно, що множина $[0,1)$ є інваріантною відносно даної IFS, оскільки $[0,1) = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i([0,1))$. При цьому для вищеозначених циліндрів Q_∞-розкладу має місце рівність: $\Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \dots i_k} = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \dots \circ F_{i_k}([0,1))$. Тому для довільного $x \in [0,1)$ існує єдина послідовність $(i_1(x), i_2(x), \dots, i_k(x), \dots) \in \{0, 1, 2, \dots\}^\infty$ така, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \dots \circ F_{i_k}([0,1)) = \Delta^{Q_\infty}_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}.$$

Нормальні властивості дійсних чисел (тобто властивості, якими володіють майже всі (відносно міри Лебега) дійсні числа) з $[0,1)$, які можуть бути сформульованими в термінах їх Q_∞-розкладів, досліджувалась в роботах [16, 24, 18]. Відомо, зокрема, що Q_∞-розклад майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка містить цифру i з алфавіту $A = \{0, 1, 2, \dots\}$ з асимптотичною частотою q_i ([18]). У випадку скінченності ентропії стохастичного вектора Q_∞ для майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка має місце рівність (див. [16]):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\Delta^{Q_\infty}_{i_1(x)\dots i_n(x)}\right|} = e^{-H},$$

де $H = -\sum_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i$. В роботі [2] показано декілька феноменів, що пов'язані з даними розкладами та фрактальним аналізом.

Нагадаємо ([21]), що сімейство Φ підмножин з $[0,1)$ називається локально тонким сімейством покриттів одиничного відрізка, якщо для довільної множини $E \subset [0,1)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш як зчисленне ε-покриття $\{E_j\}$ множини E ($E_j \in \Phi$, $|E_j| \le \varepsilon$). Для довільного додатного α та локально тонкого сімейства покриттів Φ відповідна α-вимірна міра Хаусдорфа підмножини $E \subset [0,1)$ відносно сімейства Φ означається наступним чином

$$H^\alpha(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right],$$

де інфімум взято за всіма не більш як зчисленними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E, $E_j \in \Phi$.

Взагалі кажучи, $H^\alpha(E,\Phi)$ залежить від сімейства Φ. Сімейство всіх обмежених множин, сімейство всіх відкритих множин і сімейство всіх замкнених множин дають одну і ту саму α-мірну міру Хаусдорфа (див. [13]), яку позначають $H^\alpha(E)$.

Означення 1.1. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha\colon H^\alpha(E,\Phi) = 0\}. \tag{2}$$

Якщо Φ є сімейством всіх замкнених (відкритих) підмножин з $[0,1]$ або сімейством всіх s-адичних циліндрів, то $\dim_H(E,\Phi)$ співпадає з класичною розмірністю Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H(E)$ множини E ([7]).

Означення 1.2. Локально тонке сімейство покриттів Φ називається *довірчим* для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (на одиничному відрізку), якщо для довільної множини $E \subset [0,1]$ має місце рівність

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E).$$

Сімейство всіх підмножин одиничного відрізка, сімейство всіх відрізків (інтервалів), сімейство всіх s-адичних циліндрів є прикладами довірчих (для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку) сімейств. Достатні умови довірчості сімейств покриттів вивчались багатьма авторами (див. [1, 2, 7, 11, 18, 21, 24] та відповідні посилання). Як це не парадоксально, перші приклади недовірчих систем покриттів виникли в двовимірному випадку як результат активних досліджень фрактальних властивостей самоафінних множин в 90-х роках 20-го століття (див. [6]). Напевно, першим (і несподіваним) прикладом одновимірної недовірчої локально тонкої системи покриттів є сукупність циліндрів класичного ланцюгового зображення (див. [17]). Використовуючи підхід, який був запропонований Ювалом Пересом для доведення недовірчості сімейства циліндрів ланцюгового розкладу, в роботі [2] доведено недовірчість сімейства циліндрів Q_∞-розкладів при поліноміальній швидкості спадання членів послідовності $\{q_i\}$ (тобто коли

$$\frac{A}{(i+1)^s} \le q_i \le \frac{B}{(i+1)^s}$$

для деяких двох додатних констант A і B та $s > 1$) та знайдено достатні умови недовірчості таких сімейств. Основним завданням даної роботи є знаходження достатніх умов довірчості для сімейства циліндрів Q_∞-розкладів (розділ 2) та використання отриманих результатів для дослідження тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-цифрами (розділ 3), тобто розподілів випадкових величин виду

$$\xi = \Delta^{Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}, \tag{3}$$

де ξ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень з множини $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, \ldots$ відповідно.

2. Q_∞-розклади дійсних чисел та довірчі сімейства покриттів одиничного відрізка

Обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича навіть одновимірних множин є, як правило, досить нетривіальною задачею, спростити яку частково можна шляхом звуження класу допустимих покриттів до деякого локально тонкого сімейства покриттів Φ, яке є довірчим. Особливо корисним є такий прийом у тому випадку, коли для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича використовується підхід, який був запропонований Патріком Біллінгслі в роботах [7, 8]. Тому перевірка довірчості (чи знаходження достатніх умов довірчості) сімейств покриттів є важливою задачею фрактального аналізу. Перші кроки у цьому напрямку були, напевно, зроблені А.С. Безиковичем ([5]), який довів довірчість сімейства циліндрів двійкового розкладу. Цей результат був розширений П. Біллінгслі ([7]) на сімейство s-адичних циліндрів, та М.В. Працьовитим ([24]) на сімейство циліндрів Q-S-розкладів дійсних чисел. Об'єднує ці дослідження спільний метод доведення довірчості, який полягає у тому, що показується існування додатної константи $K \in N$ такої, що для довільного додатного ε і для довільного відрізка $[a, b]$ існує не більш як K циліндрів відповідного сімейства, які покривають $[a, b]$ і діаметр кожного з циліндрів не перевищує ε. Зрозуміло, що для сімейства циліндрів Q_∞-розкладів такий метод застосовувати не можна. У цьому розділі представлені нові результати стосовно довірчості сімейства циліндрів Q_∞-розкладів, які відрізняються від результатів робіт [3, 16] як більшою загальністю, так і методом доведення.

Оскільки надалі розглядаються циліндри лише Q_∞-розкладів, то верхній індекс «Q_∞» не будемо використовувати, і під сімейством Φ будемо розуміти сімейство $\Phi(Q_\infty)$, яке складається з циліндрів всеможливих рангів Q_∞-розбиття інтервалу $[0, 1)$, тобто

$$\Phi = \{E\colon E = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, n \in N, \alpha_i \in N \cup 0, i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Теорема 2.1. *Якщо існують дійсні числа c_1 та c_2 такі, що*

$$0 < c_1 \le \frac{q_i}{q_{i-1}} \le c_2 < 1, \qquad \forall i \in N,$$

то система Φ циліндрів Q_∞-розкладу є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Доведення. Нехай

$$H^\alpha_\varepsilon(E) = \inf_{|E_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha, E_j = [a_j, b_j], E \subset \bigcup_j E_j \right\},$$

$$H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi) = \inf_{|B_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |B_j|^\alpha, B_j \in \Phi, E \subset \bigcup_j B_j \right\}.$$

Очевидно, що $H_\varepsilon^\alpha(E) \le H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi)$, оскільки перший інфімум береться по ширшому класу допустимих покриттів.

Нехай $E_j = [a_j, b_j]$. Для коротшого запису позначимо через $\Delta_{[m_j-1]}$ циліндр, який є Q_∞-циліндром максимально можливого рангу, що містить точки a_j та b_j одночасно (можливо $\Delta_{[m_j-1]}$ співпадає з $[0,1)$). Позначимо через $\Delta^i_{[m_j]}$ циліндри m_j-го рангу, що містяться в $\Delta_{[m_j-1]}$, тобто

$$\Delta_{[m_j-1]} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^i_{[m_j]}.$$

При цьому точки a_j та b_j належать різним циліндрам m_j-го рангу. Розглянемо два можливі варіанти взаємного розташування E_j та циліндрів m_j-го рангу.

I) Якщо серед циліндрів m_j-го рангу існує хоча б один, який повністю належить до $[a_j, b_j]$, то знайдеться циліндр $\Delta^{k_j}_{[m_j]}$, який повністю належить $[a_j, b_j]$ і при цьому або $a_j = \inf \Delta^{k_j}_{[m_j]}$, або $a_j \in \Delta^{k_j-1}_{[m_j]}$. Тоді $E_j \subset \bigcup_{i=k_j-1}^{\infty} \Delta^i_{[m_j]}$, $\left|\Delta^i_{[m_j]}\right| \le \frac{1}{c_1}\varepsilon$. При цьому

$$\sum_{i=k_j-1}^{\infty} \left|\Delta^i_{[m_j]}\right|^\alpha \le \left|\Delta^{k_j}_{[m_j]}\right|^\alpha \left(\frac{1}{c_1^\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} c_2^{\alpha i}\right) \le |E_j|^\alpha \left(\frac{1}{c_1^\alpha} + \frac{1}{1-c_2^\alpha}\right).$$

II) Якщо серед циліндрів m_j-го рангу не існує жодного, який би повністю належав до $[a_j, b_j]$, то точки a_j та b_j належать двом суміжним циліндрам $\Delta^{s_j}_{[m_j]}$ та $\Delta^{s_j+1}_{[m_j]}$.

Нехай $\Delta^{l_j}_{[m_j+1]}$ — циліндр m_j+1-го рангу, який містить точку a_j, а $M_j = \sup \Delta^{s_j}_{[m_j]}$. Тоді

$$\bigcup_{i=l_j}^{\infty} \Delta^i_{[m_j+1]} \supset [a_j, M_j), \qquad \Delta^{l_j+1}_{[m_j+1]} \subset [a_j, M_j),$$

$$\left|\Delta^i_{[m_j+1]}\right| \le \frac{1}{c_1}|E_j|, \qquad \forall i \ge l_j.$$

Тому

$$\sum_{i=l_j}^{\infty} |\Delta^i_{[m_j+1]}|^\alpha \le |\Delta^{l_j}_{[m_j+1]}|^\alpha + \left|\Delta^{l_j+1}_{[m_j+1]}\right|^\alpha + c_2^\alpha \left|\Delta^{l_j+1}_{[m_j+1]}\right|^\alpha + c_2^{2\alpha} \left|\Delta^{l_j+1}_{[m_j+1]}\right|^\alpha + \dots$$

$$\le \left|\Delta^{l_j+1}_{[m_j+1]}\right|^\alpha \left(\frac{1}{c_1^\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_2^{\alpha k}\right) \le |E_j|^\alpha \left(\frac{1}{c_1^\alpha} + \frac{1}{1-c_2^\alpha}\right).$$

Оскільки M_j — точка поділу Q_∞-розбиття, то M_j є лівою кінцевою точкою для послідовності вкладених циліндрів. Позначимо їх

$$\Delta_{[m_j+1]}, \quad \Delta_{[m_j+2]}, \quad \dots .$$

Нехай $\Delta_{[m_j+t_j]}$ — циліндр рангу $m_j + t_j$ такий, що $b_j \notin \Delta_{[m_j+t_j]}$, але

$$b_j \in \Delta_{[m_j+t_j-1]}.$$

Тоді

$$|\Delta_{[m_j+t_j]}| \le |b_j - M_j| \le |E_j|,$$

$$\left|\Delta_{[m_j+t_j-1]}\right| = \frac{1}{q_0}\left|\Delta_{[m_j+t_j]}\right| \le \frac{1}{q_0}|E_j|$$

і при цьому $\Delta_{[m_j+t_j-1]}$ покриває $[M_j, b_j]$.

Отже, сукупність циліндрів $\Delta^{l_j}_{[m_j+1]}, \Delta^{l_j+1}_{[m_j+1]}, \dots$ та $\Delta_{[m_j+t_j-1]}$ покриває E_j, довжини цих циліндрів не перевищують величини $|E_j| \cdot \max\{1/c_1, 1/q_0\} = |E_j| \cdot k_0$ і їх

α-об'єм не перевищує

$$|E_j|^\alpha \left(\frac{1}{c_1^\alpha} + \frac{1}{1 - c_2^\alpha} + \frac{1}{q_0^\alpha} \right).$$

Підсумовуючи, бачимо, що довільний відрізок E_j може бути покритий циліндрами з сімейства Φ так, що діаметри цих циліндрів не перевищують величини $k_0\varepsilon$, де $k_0 := \max\{1/c_1, 1/q_0\}$, і при цьому для довільного $\alpha \in (0, 1]$ відповідний α-об'єм цього покриття не перевищує величини $F(\alpha)|E_j|^\alpha$, де

$$F(\alpha) = \left(\frac{1}{c_1^\alpha} + \frac{1}{1 - c_2^\alpha} + \frac{1}{q_0^\alpha} \right).$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$, для довільного $\alpha \in (0, 1]$, для довільної множини $E \subset [0, 1)$ і для довільного ε-покриття $\{E_j\}$ множини E ми одержуємо

$$H^\alpha_{k_0\varepsilon}(E, \Phi) \leq F(\alpha) \sum_j |E_j|^\alpha.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$, для довільного $\alpha \in (0, 1]$ і для довільної множини $E \subset [0, 1)$ маємо

$$H^\alpha_{k_0\varepsilon}(E, \Phi) \leq F(\alpha) H^\alpha_\varepsilon(E).$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо нерівність

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \Phi) \leq F(\alpha) H^\alpha(E)$$

для довільного $\alpha \in (0, 1]$ і для довільного $E \subset [0, 1)$, що і доводить правильність рівності

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \qquad \forall E \subset [0, 1). \qquad \square$$

3. Тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-цифрами

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2, \dots$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, \dots$, $\sum_{i=0}^\infty p_{ik} = 1$ для всіх $k \in N$. Розглянемо випадкову величину

$$\xi := \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots},$$

яка називається випадковою величиною з незалежними Q_∞-цифрами. Ймовірнісний розподіл μ_ξ визначається стохастичним вектором Q_∞ та матрицею $P = ||p_{ik}||$, і може бути побудований наступним чином. Нехай $\Omega_k = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{F}_k = 2^{\Omega_k}$, $\mu_k(i) = p_{ik}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \prod_{i=1}^\infty (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$ і нехай $f : \Omega \to [0, 1)$ — вимірне відображення, яке означається для довільного елемента $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots) \in \Omega$ через $f(\omega) = \Delta_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_i \dots}$. Для довільної борелівської множини $E \subset [0, 1)$ означимо образ-міру μ^*: $\mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E))$, де $f^{-1}(E) = \{\omega \colon \omega \in \Omega,\ f(\omega) \in E\}$. Тоді міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою μ_ξ.

Якщо ми означимо дискретні міри λ_k через $\lambda_k(i) = q_i$ для всіх $k \in N \cup \{0\}$, і розглянемо $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda) = \prod_{k=1}^\infty (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \lambda_k)$, то міра $\lambda^* = \lambda(f^{-1})$ співпаде з мірою Лебега на $[0, 1)$.

Як відомо ([16]), випадкова величина ξ має розподіл чистого типу, причому

1) μ_ξ є чисто абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли

$$\rho := \prod_{k=1}^\infty \left\{ \sum_{i=0}^\infty \sqrt{p_{ik} \cdot q_i} \right\} > 0; \tag{5}$$

2) μ_ξ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{max} := \prod_{k=1}^\infty \max_i \{p_{ik}\} > 0; \tag{6}$$

3) μ_ξ є чисто сингулярно неперервною у всіх інших випадках, тобто тоді і тільки тоді, коли

$$\rho = 0 = P_{\max}. \tag{7}$$

Інший підхід до знаходження критеріїв абсолютної неперервності та сингулярності міри μ_ξ можна знайти в [18].

Нескладно бачити, що необхідною умовою абсолютної неперервності μ_ξ є "асимптотична узгодженість" матриць P_∞ та Q_∞, тобто виконання умови $p_{ik} \to q_i$, $k \to \infty$, для всіх $i \in N_0$. Необхідною умовою дискретності є виконання умови $\max_i p_{ik} \to 1$, $k \to \infty$. У всіх інших випадках розподіл μ_ξ є сингулярно неперервним, що свідчить про домінування (у вказаному сенсі) сингулярності для даного класу ймовірнісних мір. У відповідності до запропонованого в роботі [23] багаторівневого фрактального аналізу сингулярних ймовірнісних мір, після встановлення факту сингулярності наступними кроками аналізу є дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей спектра (мінімального замкненого носія) S_μ розподілу, та тонких фрактальних властивостей міри.

Нагадаємо ([3]), що сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на $\mathbf{R}^1$ називається мірою чистого

а) GS-типу, якщо існує послідовність (неперекривних) відрізків $\{[a_i, b_i]\}$ таких, що

$$\begin{cases} [a_i, b_i] \subset S_\mu, \\ \mu\left(\bigcup_i [a_i, b_i]\right) = 1. \end{cases}$$

б) GC-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \exists \varepsilon(x) > 0 : \ [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \cap S_\mu \text{ — множина нульової міри Лебега.} \end{cases}$$

в) GP-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 : \ [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap S_\mu \text{ — множина додатної міри Лебега.} \end{cases}$$

Сингулярно неперервні міри GC-, GP- та GS- типів утворюють неперетинні сімейства. Об'єднання цих сімейств не співпадає з сімейством всіх сингулярно неперервних ймовірнісних мір на R^1, оскільки існують сингулярно неперервні ймовірнісні міри на R^1, які не належать до жодного з вищеназваних класів, але в роботі [20] доведено, що довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 може бути представлена у вигляді

$$\mu = \alpha_1 \mu^{GS} + \alpha_2 \mu^{GC} + \alpha_3 \mu^{GP}, \tag{8}$$

де $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$; μ^{GS}, μ^{GC} і μ^{GP} — сингулярно неперервні ймовірнісні міри GS, GC та GP-типу відповідно.

Як відомо ([16]), сингулярно неперервно розподілена випадкова величина з незалежними Q_∞-символами має чистий тополого-метричний тип. Причому

1) μ_ξ має чистий GS-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи.

2) μ_ξ має чистий GC-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i:\ p_{ik}=0} q_i \right) = \infty. \tag{9}$$

3) μ_ξ має чистий GP-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{i:\ p_{ik}=0} q_i\Bigr) < \infty. \tag{10}$$

Зауваження 3.1. Дещо інший (нееквівалентний) підхід до класифікації сингулярних мір здійснено в монографії [18]. Суттєвими для обох згаданих підходів є дослідження топологічних та метричних властивостей спектра розподілу випадкової величини з незалежними Q_∞-символами, які були проведені в [18]. Доцільно, напевно, буде звернути увагу читача на той факт, що аналогічні проблеми (дослідження лебегівської структури та тополого-метричних властивостей спектра) стосовно випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}_\infty$-символами досліджувалася в роботі [19]. Для того, щоб читач отримав загальне уявлення про $\widetilde{Q}_\infty$-розклад, зазначимо, що він отримується по аналогії з означеним на початку статті Q_∞-розкладом, але циліндри непарного рангу розбиваються на циліндри наступного рангу слідуючи зліва направо, а циліндри парного рангу розбиваються на циліндри наступного рангу слідуючи справа наліво (див. детальніше [19, 24]). Цей розклад дійсних чисел є частковим випадком f-розкладів, які були введені в розгляд в роботі B.H.Bissinger ([9]) як узагальнення ланцюгових дробів, і породжується строго спадною неперервною функцією f, яка визначена на $[1, +\infty)$ умовами: $f(1) = 1$ і f спадає лінійно на кожному відрізку $[n, n+1]$ з $f(n) - f(n+1) = q_{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ (для класу таких функцій B. H. Bissinger використовував позначення F_p). У цій же роботі започатковано дослідження з метричної теорії таких розкладів.

У випадках 1) та 3) спектр, очевидно, має розмірність Хаусдорфа–Безиковича, яка дорівнює 1. Як добре відомо ([13, 24]), отримання нижньої оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини є значно складнішою задачею, ніж отримання відповідних верхніх оцінок. Формулу для оцінки знизу розмірності спектра у випадку 2 ми отримаємо як наслідок після доведення формули для обчислення розмірності Хаусдорфа $\dim_H \mu_\xi$ ймовірнісної міри μ_ξ, тобто числа $\dim_H \mu_\xi = \inf_{E\in B(\mu)} \dim_H(E)$, де $B(\mu)$ — сімейство всеможливих (не обов'язково замкнутих) борелівських носіїв ймовірнісної міри μ_ξ. Виведенню цієї формули і присвячений даний розділ.

Нехай ν — неперервна ймовірнісна міра на борелівських підмножинах $[0, 1]$, Φ — сімейство циліндрів Q_∞-розбиття. Число

$$H^\alpha(M, \Phi, \nu) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\inf_{\nu(E_j)\le\varepsilon} \sum_j \nu^\alpha(E_j)\right\},$$

де $E_j \in \Phi$, $\bigcup_j E_j \supset M$ називається α-мірою Хаусдорфа-Біллінгслі підмножини $M \subset [0, 1)$ відносно сімейства покриттів Φ та міри ν.

Означення 3.1. Число $\dim_H(M, \Phi, \nu) = \inf\{\alpha\colon H^\alpha(M, \Phi, \nu) = 0\}$ називається розмірністю Хаусдорфа-Біллінгслі множини M відносно сімейства покриттів Φ та міри ν.

Якщо ν — міра Лебега на $[0, 1]$, то $\dim_H(M, \Phi, \nu) = \dim_H(M, \Phi)$.

Нехай ν та μ — дві неперервні ймовірнісні міри на борелівських підмножинах $[0, 1]$, $\Delta_n(x) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — циліндр n-го рангу Q_∞-розкладу точки x. Дві наступні леми є прямим наслідком двох класичних теорем Біллінгслі ([8]), які застосовані до Q_∞-розкладів.

Лема 3.1. *Нехай*

$$B = \left\{x\colon \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \nu(\Delta_n(x))}{\ln \mu(\Delta_n(x))} \le \delta\right\},$$

і нехай Φ — *сімейство циліндрів* Q_∞*-розбиття. Тоді, для довільного* $\delta \geq 0$ *має місце нерівність*

$$\dim_H(B, \Phi, \mu) \leq \delta.$$

Лема 3.2. *Якщо*

$$M \subset \left\{x\colon \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \nu(\Delta_n(x))}{\ln \mu(\Delta_n(x))} \geq \delta\right\}, \tag{11}$$

то

$$\dim_H(M, \Phi, \mu) \geq \delta \cdot \dim_H(M, \Phi, \nu). \tag{12}$$

Зауваження 3.2. Для доведення цих лем достатньо надати абстрактним ймовірнісним просторам та випадковим процесам, які розглядались в роботі [8], наступної інтерпретації: виберемо в якості $\sigma = \{0, 1, 2, \dots\} =: N_0$, в якості Ω — множину $[0, 1)$, в якості $\mathcal{B}$ — борелівську σ-алгебру підмножин множини $[0, 1)$, в якості ν — довільну неперервну ймовірнісну міру на $\mathcal{B}$. Для довільного $\omega \in \Omega$ існує єдиний Q_∞-розклад точки ω:

$$\omega = \Delta^{Q_\infty}_{a_1(\omega)a_2(\omega)\dots a_n(\omega)\dots}.$$

Означимо стохастичний процес наступним чином:

$$\forall \omega \in \Omega\colon \quad x_n(\omega) = a_n(\omega),$$

тобто $a_n(\omega)$ — n-тий символ Q_∞-розкладу точки ω. При такому виборі «абстрактні циліндри», які фігурують в роботі П. Біллінгслі, співпадають з Q_∞-циліндрами.

Зрозуміло, що аналогічний підхід працює і для інших ймовірнісних просторів та випадкових процесів, які породжені іншими розкладами дійсних чисел ($\widetilde{Q}$-розклади ([3]), ланцюгові дроби та інші).

Теорема 3.1. *Нехай* Φ — *довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейство циліндрів* Q_∞*-розбиття. Якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{13}$$

то розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ *з незалежними* Q_∞*-цифрами дорівнює*

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n} =: D, \tag{14}$$

де

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} h_j, \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$h_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln p_{ij}, \qquad b_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln q_i.$$

Доведення. Нехай $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}$ — така випадкова величина, що

$$\mathsf{P}(\alpha_j(x) = i) = p_{ij}$$

(тобто розподіл випадкової величини x описується мірою μ). Розглянемо дві допоміжні послідовності випадкових величин $\{\eta_j(x)\} = \{\ln p_{\alpha_j(x)j}\}$ та $\{\psi_j(x)\} = \{\ln q_{\alpha_j(x)}\}$.

η_j	$\ln p_{0j}$	$\ln p_{1j}$	$\dots$	$\ln p_{kj}$	$\dots$
	p_{0j}	p_{1j}	$\dots$	p_{kj}	$\dots$

ψ_j	$\ln q_0$	$\ln q_1$	$\dots$	$\ln q_k$	$\dots$
	p_{0j}	p_{1j}	$\dots$	p_{kj}	$\dots$

З (13) випливає, що другі моменти випадкових величин η_j скінченні і ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} \eta_j}{j^2}$$

збігається. Тому з теореми Колмогорова (посилений закон великих чисел) випливає, що для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1)$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n) - M(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)}{n} = 0. \tag{15}$$

Зауважимо, що

$$\mathsf{E}(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n) = \mathsf{E}\,\eta_1 + \mathsf{E}\,\eta_2 + \cdots + \mathsf{E}\,\eta_n = -h_1 - h_2 + \cdots + (-h_n) = -H_n.$$

Аналогічно, з (13) випливає, що для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1)$ має місце

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n) - \mathsf{E}(\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n)}{n} = 0 \tag{16}$$

і $\mathsf{E}(\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n) = \mathsf{E}\,\psi_1 + \mathsf{E}\,\psi_2 + \cdots + \mathsf{E}\,\psi_n = -b_1 + (-b_2) + \cdots + (-b_n) = -B_n$.

Розглянемо множину

$$\begin{aligned} A &= \left\{x\colon \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0\right\} \\ &= \left\{x\colon \lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)) - \frac{H_n}{B_n}(\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x))}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)} = 0\right\} \\ &= \left\{x\colon \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)+H_n}{n}\right) - \frac{H_n}{B_n}\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right)}{\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right) - \frac{B_n}{n}} = 0\right\}. \end{aligned}$$

Для заданого стохастичного вектора Q_∞ завжди існує $\max_j\{q_j\} =: \kappa < 1$. Тому

$$\left|\frac{B_n}{n}\right| = \left|\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^\infty p_{ij} \ln q_i}{n}\right| \ge \frac{|\ln\kappa| n}{n} = |\ln\kappa| > 0. \tag{17}$$

З класичної нерівності Гіббса (одне з добре відомих її доведень можна знайти в ([16])), яка рівносильна твердженню про невід'ємність відстані Кульбака–Лейблера ([15]), випливає, що $h_j \le b_j$. Тому

$$\frac{H_n}{B_n} = \frac{\sum_{j=1}^n h_j}{\sum_{j=1}^n b_j} \le 1. \tag{18}$$

Підсумовуючи, ми бачимо, що з (15), (16), (17) та (18) слідує, що для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1)$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)+H_n}{n}\right) - \frac{H_n}{B_n}\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right)}{\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right) - \frac{B_n}{n}} = 0.$$

Отже, $\mu_\xi(A) = 1$.

Розглянемо тепер множини

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0\right\}; \\ A_2 &= \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}\right) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}\right\}; \\ A_3 &= \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}\right) \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}\right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що $A \subset A_1$. Покажемо, що $A_1 \subset A_3$ та $A \subset A_2$. Як добре відомо, для двох довільних послідовностей дійсних чисел $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ має місце нерівність

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n - y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n) - \underline{\lim}_{n\to\infty}(y_n).$$

Якщо $x \in A_1$, то

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}\right)-\varliminf_{n\to\infty}\frac{H_n}{B_n}$$
$$\geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}-\frac{H_n}{B_n}\right)=0.$$

Отже, $x \in A_3$.

Якщо $x \in A$, то $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}-\frac{H_n}{B_n}\right)=0$, і

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{H_n}{B_n}-\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}\right)$$
$$\geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{H_n}{B_n}-\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)}-\frac{H_n}{B_n}\right)=0.$$

Отже, $x \in A_2$.

Оскільки

$$A\subset A_2=\left\{x\colon \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}\leq D\right\},$$

то з леми 3.1 випливає, що $\dim_H(A,\Phi)=\dim_H(A,\Phi,\lambda)\leq D$.

Так як

$$A\subset A_3=\left\{x\colon \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}\geq D\right\},$$

то з леми 3.2 випливає, що

$$\dim_H(A,\Phi)\geq D\cdot\dim_H(A,\Phi,\mu_\xi)=D.$$

Тому $\dim_H(A,\Phi)=D$.

Залишилось показати, що множина A є “розмірнісно мінімальним” носієм міри μ_ξ. Нехай C — довільний носій міри μ_ξ. Тоді множина $C_1=C\cap A$ теж є носієм для μ_ξ і $C_1\subset C$. Отже, $\dim_H(C_1,\Phi)\leq\dim_H(C,\Phi)$. Доведемо, що $\dim_H(C_1,\Phi)=\dim_H(A,\Phi)$.

Оскільки $C_1\subset A$, то $\dim_H(C_1,\Phi)\leq\dim_H(A,\Phi)$. У той же час

$$C_1\subset A\subset A_3=\left\{x\colon \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}\geq D\right\}$$

і з леми 3.2 випливає, що $\dim_H(C_1,\Phi)\geq D$.

Отже, $\dim_H(C_1,\Phi)=D=\dim_H(A,\Phi)$. Оскільки Φ — довірче сімейство циліндрів Q_∞-розкладу, то $\dim_H(A,\Phi)=\dim_H(A)$, і тому множина A є мінімальним (в смислі розмірності Хаусдорфа–Безиковича) носієм ймовірнісної міри μ_ξ. □

Як наслідок з доведеної теореми отримуємо вище анонсовану формулу для оцінки знизу розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра ймовірнісної міри з незалежними Q_∞-цифрами. Нехай $N_j=\{i: p_{ij}\neq 0,\}$ і $q_j^*=\sum_{i\in N_j}q_i$, $j\in\mathbf{N}$.

Теорема 3.2. *Якщо Φ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейство циліндрів Q_∞-розбиття і виконується умова*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sum_{i\in N_j}\frac{q_i}{q_j^*}\ln^2 q_i}{j^2}<\infty, \tag{19}$$

то

$$\dim_H(S_\xi)\geq\varliminf_{n\to\infty}\frac{H_n^*}{B_n^*},$$

де

$$H_n^* = \sum_{j=1}^{n} h_j^*, \qquad h_j^* = -\sum_{i \in N_j} \frac{q_i}{q_j^*} \cdot \ln \frac{q_i}{q_j^*},$$

$$B_n^* = \sum_{j=1}^{n} b_j^*, \qquad b_j^* = -\frac{1}{q_j^*} \sum_{i \in N_j} q_i \cdot \ln q_i.$$

Доведення. Розподіл випадкової величини ξ визначається матрицею $P = \|p_{ik}\|$ та стохастичним вектором Q_∞. Для цього ж стохастичного вектора Q_∞ побудуємо допоміжну випадкову величину ξ^a з незалежними Q_∞-цифрами наступним чином: $p_{ij}^a = 0$ якщо $p_{ij} = 0$ і $p_{ij}^a = q_i / q_j^*$, якщо $p_{ij} > 0$.

Нехай S_{ξ^a} — спектр розподілу в.в. ξ^a. Спектри S_{ξ^a} та S_ξ співпадають, оскільки $q_i^a = q_i$ і $p_{ij}^a = 0$ тоді і тільки тоді, коли $p_{ij} = 0$. Оскільки спектр міри — лише один з можливих її борелівських носіїв (а саме — мінімальний замкнений носій), то $\dim_H \mu_{\xi^a} \le \dim_H(S_{\xi^a})$. При виконанні умови (19) для допоміжної випадкової величини ξ^a виконуються умови попередньої теореми. Тому, застосовуючи теорему 3.1 для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілу випадкової величини ξ^a, отримуємо $\dim_H(S_\xi) \ge \dim_H \mu_{\xi^a} = \varliminf_{n\to\infty} H_n^*/B_n^*$. $\square$

Автори вдячні рецензентам за ретельну вичитку статті та пропозиції щодо покращення її тексту.

Література

1. S. Albeverio, G. Torbin, *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), №4, 356–367.
2. S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, and G. Torbin, *On fractal phenomena connected with infinite linear IFS and related singular probability measures*, J. London Math. Soc. (submitted)
3. S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols*, Methods of Functional Analysis and Topology **17** (2011), №2, 97–111.
4. S. Albeverio, V. Koval, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in R^2*, Random Operators and Stochastic Equations **16** (2008), № 2, 181–211.
5. A. Besicovitch, *On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure*, Indag. Math. **14** (1952), 339–344.
6. M. Bernardi and C. Bondioli, *On some dimension problems for self-affine fractals*, Journal for Analysis and its Applications **18** (1999), №3, 733–751.
7. P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
8. P. Billingsley, *Hausdorff dimension in probability theory II*, Ill. J. Math. **5** (1961), 291–298.
9. B. H. Bissinger, *A generalization of continued fractions*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 868–876.
10. S. D. Chatterji, *Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports"*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **3** (1964), 184–192.
11. C. D. Cutler, *A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on R*, Internat. J. Math. and Math. Sci. **4** (1988), 643–650.
12. C. I. Everett, *Representations for real numbers*, Bull. Amer. math. Soc. **52** (1946), 861–869.
13. K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 1990.
14. J. E. Hutchinson, *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.
15. S. Kullback and R. A Leibler, *On information and sufficiency*, Annals of Math. Statistics **22** (1951), 79-–86.
16. Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін, *Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами*, Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **9** (2008), 80–103.
17. Yu. Peres and G. Torbin, *Continued fractions and dimensional gaps.* (in preparation)
18. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, 1998.

19. М. В. Працьовитий, О. Л. Лещинський, *Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення*, Теорія ймовірностей та мат. статистика **57** (1997), 134–140.
20. М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями*, Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **7** (2006), 140–151.
21. М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича*, Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки **4** (2003), 207–215.
22. A. Renyi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Sci. Hungar. **8** (1957), 477–493.
23. Г. М. Торбін, *Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних ймовірнісних мір*, Український математичний журнал **57** (2005), №5, 837–857.
24. А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, “Наук. думка”, Киев, 1992.

Кафедра вищої математики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: rnikiforov@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна; відділ фрактального аналізу Інституту математики НАН України, вул. Терещенківська 3, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: torbin7@gmail.com, torbin@imath.kiev.ua

Надійшла 30/11/2011