Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 163–171

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 163–171

ДИСКРЕТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ I

УДК 519.21

О. І. ПОНОМАРЕНКО

Анотація. Розглядаються зображення скалярних і векторзначних випадкових функцій на множині T у вигляді нескінченних або скінченних сум з членами, що є скалярними функціями на T з випадковими коефіцієнтами, при досить широких припущеннях відносно множини T і властивостей випадкових функцій. Зокрема досліджуються випадки, коли T є компактним топологічним простором, вимірним простором з додатною мірою, довільною непорожньою множиною. Наводиться широкий спектр різноманітних типів і прикладів подібних зображень для конкретних видів випадкових функцій зі значеннями в гільбертових просторах. В частині I роботи досліджуються зображення типу Карунена–Лоева. Більш загальні зображення базисного типу вивчаються в частині II.

Аннотация. Рассматриваются представления скалярных и векторных случайных функций на множестве T в виде бесконечных или конечных сумм со слагаемыми, которые представляют собой скалярные функции на T со случайными коэффициентами, при достаточно общих предположениях относительно множества T и свойств случайных функций. В части I исследованы представления типа Карунена–Лоэва. Более общие представления базисного вида изучаются в части II.

Abstract. We consider representations of scalar and vector random functions on a set T in the form of infinite or finite sums with terms, which are scalar functions on T with random coefficients, under rather general assumptions on the set T and properties of random functions. In particular, the cases are investigated when T is a compact topological space, measurable space with positive measure. In Part I the Karhunen–Loeve type representations are considered. More general representations are studied in Part II.

1. Вступ

Під дискретним зображенням випадкової функції другого порядку на множині T будемо розуміти її подання у вигляді функціональної суми (скінченної або нескінченної) з членами, що є скалярними функціями на T з випадковими коефіцієнтами. Найбільш важливими з погляду зручності використання є подібні зображення в тих ситуаціях, коли відповідні випадкові коефіцієнти є некорельованими (ортогональними), а самі зображення визначаються єдиним чином.

Такого роду зображення є класичними в сучасній теорії випадкових процесів і полів другого порядку. До них відносяться так звані розклади Карунена–Лоева для скалярних випадкових процесів на відрізку, що базується на зображенні кореляційного ядра процесу через власні функції відповідного інтегрального оператора (див. [1]–[5]), відомого в теорії інтегральних рівнянь як теорема Мерсера [6], зображення типу Котельникова–Шеннона [2], а також різноманітні зображення базисного типу пов'язані з розкладами функцій, що беруть участь у факторизаційних зображеннях кореляційних ядер випадкових функцій в певних базисах відповідних

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G15; Secondary 60G57.

Ключові слова і фрази. Випадкові функції на компактному топологічному просторі, узагальнені випадкові функції зі значеннями в гільбертовому просторі, зображення типу Карунена–Лоева, зображення базисного типу, оператори Гільберта–Шмідта.

функціональних просторів, або ж пов'язані за підходами виділення базису в гільбертовому просторі значень випадкової функції другого порядку та відповідають розкладу її значень за цим базисом (див. [5, 7]).

Дискретні зображення випадкових функцій загалом є засобом конструктивного опису тих чи інших видів таких функцій, що насамперед становить інтерес для їхнього моделювання [5].

В даній роботі ми маємо за мету показати, що окреслені вище підходи до отримання дискретних зображень випадковий функцій другого порядку можуть бути реалізовані в більш загальних ситуаціях стосовно значень випадкових функцій та їхніх аргументів ніж це робилося досі. Так в розділі 2 цієї роботи зображення типу Карунена–Лоева поширюються на одновимірні та багатовимірні випадкові функції зі значенням в гільбертових просторах, коли аргументи таких функцій змінюються у компактах топологічних просторах. В розділі 3 вивчаються більш загальні зображення випадкових функцій базисного типу, пов'язані з різноманітними факторизаційними білінійними розкладами додатно визначених ядер, відомих в функціональному аналізі (див. [8, 9]), зокрема з використанням теорії операторів Гільберта–Шмідта результатів абстрактного гармонічного аналізу на групах і напівгрупах тощо. Подібні підходи дозволяють отримувати дискретні зображення випадкових функцій другого порядку при досить широких припущеннях про природу множин їх аргументів T і пов'язувати властивості самих випадкових функцій з властивостями членів їхніх зображень.

В роботі наводяться різноманітні приклади застосувань вказаних загальних підходів і пов'язаних із ними результатів для отримання дискретних розкладів важливих типів базових випадкових процесів и полів зі значеннями в гільбертових просторах і зокрема для тих з них, які з точки зору загальної теорії стаціонарних випадкових функцій на абельових інволютивних напівгрупах є спектрально нерозкладними (див. [10]).

2. Дискретні зображення типу Карунена–Лоева

2.1. Розглянемо спочатку зображення одновимірних випадкових функцій другого порядку на компактних просторах.

Нехай $\xi(t)$, $t \in T$ — комплекснозначна випадкова функція другого порядку, визначена на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\xi(t) \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ (тобто $\mathsf{E}\,|\xi(t)|^2 < \infty$ для всіх $t \in T$, де T — довільна непорожня множина. Позначимо через $m(t)$, $t \in T$ функцію середнього $\xi(t)$, $m(t) = \mathsf{E}\,\xi(t)$, $t \in T$, а через $k(t,s)$, $t,s \in T$ кореляційне ядро функції $\xi(t)$:

$$k(t,s) = \mathsf{E}\,\xi(t)\overline{\xi(s)}, \qquad t,s \in T. \tag{2.1}$$

Необхідною та достатньою умовою того, щоб задане комплекснозначне ядро

$$k(t,s), \qquad t,s \in T,$$

було б кореляційним для деякої випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$ є додатна визначеність $k(t,s)$. При цьому завжди існує гаусова випадкова функція $\xi(t)$, $t \in T$ із заданим додатновизначеним ядром $k(t,s)$ як кореляційним та заданою функцією середнього $m(t)$, ([1]–[3]).

Позначимо через $L_2(\xi)$ замикання в $L_2(\Omega)$ лінійної оболонки множини випадкових величин $\{\xi(t), t \in T\}$ і називатимемо його простором значень випадкової функції $\xi(t)$.

Нехай T — компактний топологічний простір $\mathcal{B} = \mathcal{B}(T)$ — σ-алгебра борельових множин простору T і $\xi(t)$, $t \in T$ — випадкова функція неперервна в середньому квадратичному на T. Тоді її кореляційне ядро $k(t,s)$ є неперервним на топологічному добутку $T \times T$. При цьому кореляційним критерієм неперервності $\xi(t)$ є неперервність $\mathrm{Re}k(t,s)$ на діагоналі квадрата $T \times T$. ([1]–[3], [8]).

Позначимо через μ σ-адитивну скінченну невід'ємну міру на $\mathcal{B}(T)$ таку, що для кожної відкритої множини V, $V \subset T$ маємо, що $\mu(V) > 0$. Якщо T — компакт в локально компактній групі G, то типово за μ береться звуження міри Хаара в G на T і, зокрема, для випадку $G = \mathbf{R}^n$ (n-вимірного евклідового простору) за μ береться міра Лебега на T.

Розглянемо інтегральний оператор K в просторі функцій $\varphi(t)$ з $L_2(T, \mathcal{B}, \mu)$, що породжується ядром $k(t,s)$:

$$K\varphi(t) = \int_T k(t,s)\varphi(s)\,\mu(ds), \qquad t \in T. \tag{2.2}$$

Цей оператор є цілком неперервним самоспряженим і додатним.

Нехай $\{\varphi_j(t)\}$ $j \in J$ — повна ортонормована система власних функцій оператора K, що відповідають системі власних значень $\{\lambda_j\}$, $\lambda_j > 0$ цього оператора, тобто

$$K\varphi_j(t) = \lambda_j \varphi_j(t), \qquad j \in J, \tag{2.3}$$

$$\int_T \varphi_j(t)\varphi_r(t)\,\mu(dt) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j \neq r, \\ 0, & j = r. \end{cases} \tag{2.4}$$

Має місце таке узагальнення теореми Мерсера ([9, стор. 102]), що належить М. Г. Крейну ([8, стор. 72]). При сформульованих вище припущеннях справедливе білінійне зображення ядра k:

$$k(t,s) = \sum_{j \in J} \lambda_j \varphi_j(t)\overline{\varphi_j(s)}, \qquad t, s \in T, \tag{2.5}$$

де в разі зліченності множини J ряд (2.5) збігається на $T \times T$ абсолютно та рівномірно, а функції $\varphi_j(t)$ є ω-незалежними за Крейном, тобто зі співвідношень

$$\sum_{j \in J} c_j \varphi_j(t) = 0, \qquad t \in T, \ \sum_{j \in J} |c_j|^2 < \infty, \ c_j \in \mathbf{C} \tag{2.6}$$

($\mathbf{C}$ — множина комплексних чисел) випливає, що всі $c_j = 0$. При цьому кожний ряд $\sum_{j \in J} c_j \sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t)$, де c_j задовольняють друге співвідношення в (2.6) є рівномірно збіжним. При зміні міри μ в означенні оператора K (2.2) маємо різні системи ω-незалежних функцій $\{\varphi_j(t)\}$, $j \in J$, що отримуються одна з іншої деяким унітарним перетворенням.

Крім того, оператор K є ядерним, що діє за формулою

$$K\psi(t) = \sum_{j \in J} \lambda_j (\psi|\varphi_j)\varphi_j, \qquad \psi \in L_2(T, \mathcal{B}, \mu),$$

де $(\cdot\,|\,\cdot)$ скалярний добуток, і для сліда $\mathrm{tr}K$ маємо формулу

$$\mathrm{tr}K = \int_T k(s,s)\,\mu(ds).$$

Теорема 2.1. *Неперервна в середньому квадратичному випадкова функція $\xi(t)$, $t \in T$, на компактному просторі T дозволяє розклад вигляду*

$$\xi(t) = \sum_{j \in J} \sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t) z_j, \qquad t \in T, \tag{2.7}$$

де $\{z_j, j \in J\}$ — система ортонормованих випадкових величин в $L_2(\xi)$ таких, що

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_T \xi(t)\overline{\varphi_j(t)}\,\mu(dt), \qquad j \in J, \tag{2.8}$$

а $\{\varphi_j(t)\}_{j\in J}$ і $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ відповідно системи власних функцій і значень інтегрального оператора K (2.2), побудованого за кореляційним ядром $k(t,s)$ функції $\xi(t)$. При зліченній множині J ряд (2.7) збігаються рівномірно в середньому квадратичному.

Якщо $\xi(t)$ дійсна гаусова випадкова функція з нульовим середнім, то коефіцієнти z_j розкладу (2.7) є гаусовими незалежними випадковими величинами та ряд (2.7) збігається з ймовірністю 1 при кожному $t\in T$.

Доведення. В умовах теореми для кореляційного ядра $k(t,s)$ випадкової функції $\xi(t)$ має через результати наведені вище, білінійне зображення (2.5). Це зображення можна інтерпретувати як інтегральне, що фігурує в теоремі Карунена ([3, стор. 235]) з рахуючою мірою на множині J. Тоді за цією теоремою має місце зображення (2.8) Рівномірна збіжність ряду (2.7) в сильній топології $L_2(\Omega)$ і випливає з рівномірної збіжності ряду (2.5).

Інтеграли (2.8), що розуміються як інтеграли Бохнера від векторзначних функцій $\xi(t)\overline{\varphi_j(t)}$ зі значеннями в гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$, існують, бо виконується умова
$$\int_T |\varphi_j(t)|\cdot\|\xi(t)\|_{L_2(\Omega)}\,\mu(dt)<\infty$$
(див. [11]). Підставивши до інтегралу з (2.8) зображення (2.7) і скориставшись ортонормованістю функцій φ_j (2.4) отримаємо рівність (2.8).

В разі, коли функція $\xi(t)$ є дійсною й гаусовою з нульовим середнім, маємо, що $L_2(\xi)$ складається з гаусових випадкових величин з нульовим середнім, звідки величини (2.7) є гаусовими та некорельованими і, отже, незалежними; через збіжність ряду
$$\sum_{j\in J}\mathsf{E}(\sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t)z_j)^2=\sum_{j\in J}\lambda_j|\varphi_j(t)|^2=k(t,t)$$
ряд (2.7) збігається з ймовірністю 1. □

Розглянемо застосування зображення (2.7) до розв'язання основних апроксимаційних задач для випадкових функцій.

В задачі оптимального лінійного прогнозування значення випадкових функціях другого порядку $\xi(v)$, $v\in V$ на топологічному просторі V за спостереженнями $\{\xi(t),t\in T\}$, де T є компактною власною підмножиною V, потрібно знайти найкращу в сенсі середньоквадратичної похибки оцінку $\hat\xi(v)$ для $\xi(v)$, $v\notin T$, що належить замиканню $L_2^T(\xi)$ в $L_2(\Omega)$ лінійної оболонки спостережень. В задачі оптимальної лінійної фільтрації за спостереженнями $\{\xi(t),t\in T\}$ потрібно знайти найкращі лінійні оцінки $\hat\eta(v)$ значень випадкової функції другого порядку $\eta(v)$, $v\in V$ заданої на тому ж ймовірностному просторі, що й $\xi(v)$ і залежної від $\xi(v)$.

Припустимо, шо функція $\xi(v)$ неперервна в середньому квадратичному на T і відомі кореляційні функції $k(v,t)=\mathsf{E}\,\xi(v)\overline{\xi(t)}$, $t\in T$ та $\tilde k(v,t)=\mathsf{E}\,\eta(v)\overline{\xi(t)}$, $(v,t)\in V\times T$ а також власні функції й значення інтегрального оператора з ядром $k(t,s)=\mathsf{E}\,\xi(t)\overline{\xi(s)}$, $t,s\in T$.

Теорема 2.2. *При сформульованих припущеннях найкращий лінійний прогноз $\xi(v)$, $v\notin T$ має вигляд*
$$\hat\xi(v)=\sum_{j\in J}\frac{1}{\lambda_j}\left(\int_T k(v,t)\varphi_j(t)\,\mu(dt)\right)\left(\int_T \xi(t)\overline{\varphi_j(t)}\,\mu(dt)\right),$$
а найкраща лінійна оцінка $\hat\eta(v)$, $v\in V$ в задачі фільтрації має вигляд
$$\hat\eta(v)=\sum_{j\in J}\frac{1}{\lambda_j}\left(\int_T \tilde k(v,t)\varphi_j(t)\,\mu(dt)\right)\left(\int_T \xi(t)\overline{\varphi_j(t)}\,\mu(dt)\right).$$

Доведення. Доведемо першу формулу. Оскільки із зображення (2.7) випливає, що величини z_j утворюють ортонормований базис в просторі спостережень $L_2^T(\xi)$, то $\hat{\xi}(v)$, що є ортогональною проекцією в $L_2(\xi)$ на $L_2^T(\xi)$, слід шукати у вигляді

$$\hat{\xi}(v) = \sum_{j \in J} a_j(v) z_j, \qquad a_j(v) = \mathsf{E}\,\hat{\xi}(v)\overline{z}_j.$$

Різниця $\xi(v) - \hat{\xi}(v)$ є перпендикуляром до $L_2^T(\xi)$ і отже

$$a_j(v) = \mathsf{E}\,\xi(v)\overline{z}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_T k(v,t)\varphi_j(t)\,\mu(dt), \qquad j \in J.$$

Звідси та (2.8) випливає потрібна формула. Друга формула теореми, що стосується задачі фільтрації доводиться аналогічно □

Зауважимо, що результати цього параграфу розвивають і доповнюють ті, які наведено автором в [20].

2.2. Розглянемо зображення типу Карунена–Лоева для випадкових функцій із значеннями в гільбертових просторах.

Нехай H — комплексний гільбертів простір і $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ — банаховий простір всіх лінійних неперервних операторів Ξ, шо діють з H в $L_2(\Omega)$ зі звичайною нормою таких операторів. Кожний елемент $\Xi \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ є випадковим $L_2(\Omega)$-значним лінійним неперервним функціоналом на H, який можна інтерпретувати як узагальнений випадковий елемент в H. Звичайний H-значний випадковий елемент $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, для якого $\mathsf{E}\,\|\xi\|^2 < \infty$, однозначно породжує такий функціонал Ξ рівністю $\Xi x = (x|\xi)_H$. В такому разі Ξ ідентифікується з ξ і називається регулярним узагальненим випадковим елементом в H. В загальній ситуації $\Xi \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ може бути реалізованим як звичайний випадковий елемент в деякому розширенні простору H (див. [12]). Якщо простір H скінченновимірний, то кожний елемент $\Xi x = (x|\xi)_H$ є регулярним. Ξ є в загальному випадку регулярним, тоді і тільки тоді, коли він має скінченну норму Гільберта-Шмідта як оператор з $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$.

Математичне сподівання $m = \mathsf{E}\,\Xi$ елемента $\Xi \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ визначається як вектор $m \in H$ для якого $\mathsf{E}(\Xi x) = (x|m)$, $x \in H$, а кореляційний оператор $[\Xi, \Psi]$ для $\Xi, \Psi \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ визначається як елемент банахової алгебри $\mathcal{B}(H)$ всіх лінійних неперервних операторів в H, для якого

$$([\Xi, \Psi]x|y) = \mathsf{E}(\Xi x)\overline{(\Psi y)}, \qquad x, y \in H.$$

Очевидно, що $[\Xi, \Psi] = \Psi^* \Xi$, де $\Psi^* \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ є спряженим до Ψ оператором, для якого

$$(\Psi^* \eta|x)_H = (\eta|\Psi x)_{L_2(\Omega)}, \qquad x \in H,\ \eta \in L_2(\Omega).$$

Зауважимо, що $[\Xi, \Psi]$ є півторалінійною формою на $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ причому $[\Xi, \Xi]$ належить опуклому конусу $\mathcal{B}_+(H)$ додатних ермітових операторів з $\mathcal{B}(H)$ і Ξ є регулярним, коли оператор $[\Xi, \Xi]$ — ядерний. Множина $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ узагальнених випадкових елементів в H має структури правого унітарного модуля над $\mathcal{B}(H)$ і лівого унітарного модуля над $\mathcal{B}(L_2(\Omega))$.

Узагальненою випадковою функцією другого порядку Ξ_t, $t \in T$ на множині T в просторі H називатимемо сім'ю випадкових елементів $\{\Xi_t \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega)), t \in T\}$. Позначимо через $m(t)$, $t \in T$ функцію середнього для Ξ_t, $m(t) = \mathsf{E}\,\Xi_t \in H$, а через $R(s,t) = \Xi_s^* \Xi_t$, $t, s \in T$, її кореляційне ядро, $R(t,s) \in \mathcal{B}(H)$. Функцію Ξ_t, $t \in T$, називатимемо гаусовою, якщо $\Xi_t x = \xi(t,x)$ комплекснозначна гаусова функція $T \times H$.

$\mathcal{B}(H)$-значне операторне ядро $R(s,t)$, $t, s \in T$ є кореляційним для деякої випадкової функції Ξ_t, $t \in T$ в H тоді і тільки тоді, коли воно є додатно визначеним, тобто для всіх натуральних n, $x_j \in H$, $t_j \in T$, $j = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} (R(t_i, t_r)x_j | x_r) \geq 0.$$

При цьому існує гаусова функція Ξ_t, $t \in T$ в H із заданим кореляційним ядром $R(t,s)$ заданим середнім $m(t)$.

Теорема 2.3. *Якщо Ξ_t, $t \in T$, узагальнена випадкова функція другого порядку в H на компактному просторі з кореляційним ядром $R(t,s) = k(t,s)A$, де оператор $A \in \mathcal{B}_+(H)$ і $k(t,s)$ — додатно визначене неперервне ядро на $T \times T$, то має місце зображення*

$$\Xi_t = \sum_{j \in J} \sqrt{\lambda_j} \varphi_j(t) \Phi_j, \qquad t \in T, \tag{2.9}$$

де $\{\varphi_j(t), j \in J\}$ — ортонормальна система власних функцій, відповідаючих власним значенням $\{\lambda_j, j \in J\}$ інтегрального оператора K з ядром $k(t,s)$, а Φ_j випадкові елементи з $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ такі, що $\Phi_r^* \Phi_j = \delta_{rj} A$. При цьому в разі зліченної множини J ряд (2.9) збігається за нормою $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ рівномірно на T. При умові, що оператор A є ядерним, випадкові елементи Φ_j є регулярними і функція Ξ_t є регулярною (тобто її можна ототожнити зі звичайною випадковою функцією $\xi(t)$ зі значеннями в H, $\mathsf{E}\,\|\xi(t)\|^2 < \infty$ при $t \in T$.

Доведення. В умовах теореми через результати, наведені вище пункті 2.1, ядро $R(t,s)$ має зображення

$$R(t,s) = \sum_{j \in J} \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi}_j(s) A, \qquad t, s \in T, \tag{2.10}$$

де ряд справа збігається за нормою в $\mathcal{B}(H)$ рівномірно по t, s. Застосовуючи до зображення (2,10) теорему 2 з [13] про зображення узагальнених випадкових функцій у векторних топологічних просторах маємо зображення (2.9). Зі збіжності ряду (2.10), описаної вище, випливає збіжність ряду (2.10), вказана у формулюванні теореми.

З ядерності опертора A випливає регулярність випадкових елементів Φ_j і функції Ξ_t через факти наведені перед теоремою. □

2.3. В цьому пункті розглянемо приклади застосувань теореми 2.2 до конкретних видів випадкових функцій в H. Скалярний випадок є частковою ситуацією при $\dim H = 1$.

Приклад 2.1. Нехай Ξ_t є випадковим процесом в H на відрізку $[0, \ell]$ з кореляційним ядром

$$R(t,s) = [\min(t,s)]A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H),\ t, s \in [0, \ell] \subset \mathbf{R}_+.$$

Звідси випливає, що процес Ξ_t має ортогональні прирости, тобто при $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq \ell$

$$(\Xi_{t_4} - \Xi_{t_3})^* (\Xi_{t_2} - \Xi_{t_1}) = 0.$$

Якщо простори H і $L_2(\Omega)$ — дійсні, Ξ_t — гаусів з нульовим середнім, то Ξ_t є узагальненим броунівським рухом в H (процесом Вінера). При $A = I$, де I — одиничний оператор, Ξ_t є процесом стандартного броунівського руху в H.

Власні функції та значення інтегрального оператора з ядром $\min(t,s)$ на $[0, \ell]$ мають вигляд

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}_j(t) = \sin \frac{(2j+1)\pi t}{2\ell}, \qquad \lambda_j = \frac{4\ell^2}{[(2j+1)\pi]^2}, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \qquad \|\tilde{\varphi}_j\|^2_{L_2[0,\ell]} = \frac{\ell}{2} \end{gathered} \tag{2.11}$$

(див. [14]). Функції $\varphi_j(t) = \sqrt{2/\ell} \cdot \tilde{\varphi}_j(t)$ є ортонормованими. Отже за теоремою 2.2. справедливе зображення

$$\Xi_t = \frac{2\sqrt{2\ell}}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2j+1)\pi t}{2\ell}}{(2j+1)} \Phi_j, \qquad t \in [0, \ell], \tag{2.12}$$

де $\Phi_j \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$ і $\Phi_r^* \Phi_j = \delta_{rj} A$.

Зауважимо, що розклад (2.12) можливо отримати безпосередньо розклавши за сінусами на $[0, \ell]$ функцію $g(t) = \min(t, s)$ при кожному s. Тоді матимемо, що

$$R(t, s) = \frac{8\ell}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2j+1)\pi t}{2\ell} \sin \frac{(2j+1)\pi s}{2\ell}}{(2j+1)^2} A,$$

звідси через теорему 2 з [13] справедливе зображення (2.12).

Приклад 2.2. Нехай Ξ_t, $t \in [0, \ell]$, випадковий процес в H з кореляційним ядром

$$R(t, s) = \ell^{-1} [\ell \min(t, s) - ts] A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H).$$

Тоді $\Xi_0 = \Xi_\ell = 0$ і процес Ξ_t називається стохастичним містком на $[0, \ell]$. Коли Ξ_t гаусів з нульовим середнім, то це броунівський місток. При $\ell = 1$ броунівський місток Ξ_t можна описати як процес $W_t - tW_1$, де W_t — процес броунівського руху на $[0, 1]$

Інтегральний оператор з ядром $\ell^{-1}[\ell \min(t, s) - ts]$ має систему власних функцій і значень ([15])

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \sin \frac{j\pi t}{\ell}, \qquad \lambda_j = \frac{\pi^2 j^2}{\ell^2}, \qquad \|\tilde{\varphi}_j\|^2_{L_2[0,\ell]} = \frac{\ell}{2}, \qquad j = 1, 2, \dots . \tag{2.13}$$

Тоді за теоремою 2.2. маємо, що

$$\Xi_t = \frac{\sqrt{2\ell}}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi t}{\ell}}{j} \Phi_j, \qquad t \in [0, \ell], \tag{2.14}$$

$$R(t, s) = \frac{2\ell}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi t}{\ell} \sin \frac{j\pi s}{\ell}}{j^2} A, \tag{2.15}$$

де $\Phi_j \in \mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$, $\Phi_r^* \Phi_j = \delta_{rj} A$.

Приклад 2.3. Нехай Ξ_t, $t \in [0, 1]$ випадковий процес в H з кореляційним ядром

$$R(t, s) = e^{-|t-s|} A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H). \tag{2.16}$$

Ξ_t природно називати узагальненим процесом Орштейна-Уленбека в H. Якщо розглядати Ξ_t на $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, то він є стаціонарним процесом при умові $\mathsf{E}\,\Xi_t = m = \text{const}$ і дозволяє інтегральне зображення

$$\Xi_t = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda t}\, \Phi(d\lambda), \qquad t \in \mathbf{R},$$

де Φ є $\mathcal{L}(H, L_2(\Omega))$-значною ортогональною мірою Радона на $\mathbf{R}$ і для борельових множин $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbf{R}$

$$\Phi^*(\Delta_1)\Phi(\Delta_2) = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} \right) A.$$

Інтегральний оператор з ядром $e^{-|t-s|}$, $t, s \in [0, 1]$ має власні функції $\tilde{\varphi}_j$ і значення λ_j вигляду ([14, пр. 216])

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \sin \alpha_j t + \alpha_j \cos \alpha_j t, \qquad \lambda_j = \frac{1 + \alpha_j^2}{2},$$

де α_j — корені рівняння $2\operatorname{ctg}\alpha = \alpha - \frac{1}{\alpha}$. При цьому

$$\|\tilde{\varphi}_j(t)\|_{L_2[0,1]} = c_j^2 \sin^2 \alpha_j, \qquad c_j^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4\alpha_j} + \frac{\alpha_j}{4} + \frac{\alpha_j^2}{2}.$$

Отже має місце розклад

$$\Xi_t = \sum_j \left(\frac{\sqrt{1+\alpha_j^2}}{\sqrt{2} c_j \sin \alpha_j} \right) (\sin \alpha_j t + \alpha_j \cos \alpha_j t) \Phi_j, \qquad t \in [0,1], \tag{2.17}$$

де $\Phi_r^* \Phi_j = \delta_{rj} A$.

Приклад 2.4. Нехай Ξ_t випадкове поле в просторі H на n-вимірному паралелепіпеді $M_\ell^n = \times_{r=1}^n [0, \ell_r]$, $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ з кореляційним ядром

$$R(t,s) = \left(\prod_{r=1}^n \min(t_r, s_r) \right) A = k(t,s) A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H), \tag{2.18}$$

де $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Поле Ξ_t, $t \in M_\ell^n$ має ортогональні n-вимірні прирости і коли воно є гаусовим з нульовим середнім, то інтерпретується я к узагальнене поле Ченцова-Вінера в H.

Через мультиплікативну структуру ядра $k(t,s)$ інтегральний оператор, що відповідає йому, має власні функції та значення вигляду

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \prod_{r=1}^n \sin \frac{(2j_r+1)\pi t_r}{2\ell_r}, \qquad \lambda_j = \prod_{r=1}^n \frac{4\ell_r^2}{[(2j_r+1)\pi]^2}, \qquad \|\tilde{\varphi}_j(t)\|^2 = \frac{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_n}{2^n},$$

де мультиіндекс $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ ($\mathbf{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел), згідно з результатами прикладу 2.1.

Тоді за теоремою 2.2 маємо такий розклад

$$\Xi_t = \frac{(2\sqrt{2})^n \sqrt{\ell_1 \ldots \ell_n}}{\pi^n} \sum_{j \in Z_+^n} \left(\prod_{r=1}^n \frac{\sin(2j_r+1)\pi t_r / 2\ell_r}{(2j_r+1)} \right) \Phi_j, \qquad t \in M_\ell^n, \tag{2.19}$$

де $\Phi_i^* \Phi_j = \delta_{ij} A$.

Приклад 2.5. Нехай Ξ_t, $t \in M_\ell^n$ випадкове поле в H з кореляційним ядром

$$R(t,s) = \left(\prod_{r=1}^n \ell_r^{-1} [\ell_r \min(t_r, s_r) - t_r s_r] \right) A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H). \tag{2.20}$$

З (2.20) маємо, що $\Xi_t = 0$ при $t \in \partial M_\ell^n$ (тут ∂M_ℓ^n — межа паралелепіпеду M_ℓ^n). Це дає підставу називати поле Ξ_t "стохастичною скринькою" на M_ℓ^n при $n \geq 3$ і "стохастичним простирадлом" при $n = 2$. Застосовуючи міркування подібні до тих, що наводилися в прикладах (2.4) і (2.1), із врахуванням прикладу 2.2. маємо розклад

$$\Xi_t = \frac{(2)^{n/2} \sqrt{\ell_1 \ldots \ell_n}}{\pi^n} \sum_{j \in N^n} \left(\prod_{r=1}^n \frac{1}{j_r} \sin \frac{2 j_r \pi t_r}{\ell_r} \right) \Phi_j, \qquad t \in M_\ell^n, \tag{2.21}$$

де $\Phi_i^* \Phi_j = \delta_{ij} A$ і $\mathbf{N}$ — множина натуральних чисел.

Приклад 2.6. Нехай Ξ_t, $t \in \mathbf{R}$, випадковий процес в H з кореляційним ядром вигляду

$$R(t,s) = k(t-s)A, \qquad A \in \mathcal{B}_+(H),$$

де $k(t)$ — дійсна неперервна додатно визначена функція. Якщо $\mathsf{E}\,\Xi_t = \mathrm{const}$, то процес Ξ_t є слабко стаціонарним. Розглянемо процес Ξ_t на симетричному відрізку $[-\pi, \pi]$, де інтегральний оператор K з ядром $k(t-s)$ має власні значення $\lambda_n = \pi a_n$,

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\cos nt\,dt$, $n = 0,1,2,\dots$. Значення λ_n, $n \geq 1$ є двократні, яким відповідають дві лінійно незалежні власні функції $\cos nt$ і $\sin nt$, $n \geq 1$, а λ_0 відповідає власна функція $\varphi_0(t) \equiv 1$ (див. [14]). Тоді згідно з (2.9) має місце розклад Фур'є з випадковими ортогональнимим коефіцієнтами вигляду

$$\Xi_t = \sqrt{\frac{a_0}{2}}\Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}\left(\Phi_n^1 \cos nt + \Phi_n^2 \sin nt\right). \tag{2.22}$$

Зокрема, якщо $k(t) = \cos^2 t$, то оператор K має ненульові власні значення $\lambda_0 = \pi$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{2}$ з відповідними власними функціями $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_2^1(t) = \cos 2t$, $\varphi_2^2(t) = \sin 2t$. Отже розклад (2.22) тут стає сумою з трьох членів.

В частині II роботи ми розглянемо більш загальні розклади випадкових функцій другого порядку.

Література

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, "Наука", Москва, 1971.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1977.
3. А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов* "Физмагиз", Москва, 2003.
4. Д. В. Гусак, О. Г. Кукуш, О. М. Кулік, Ю. С. Мішура, А. Ю. Пилипенко, *Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань*, ВПЦ Каївськ. ун-т, Київ, 2008.
5. Б. В. Довгай, Ю. В. Козаченко, І. В. Розора, *Моделювання випадкових процесів у фізичних системах*, ВПЦ "Задруга", Київ, 2010.
6. И. Г. Петровский, *Лекции по теории интегральных уравнений*, "Наука", Москва, 1965.
7. A. M. Yaglom, *Second-order homogeneous random fields*, Proc. of Fourth Berkely Symp. on Math.Stat. and Probab, Vol. II, Univ. Calif. Press, 1961, pp. 593–622.
8. М. Г. Крейн, *Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах Ч. 1*, Укр. мат. ж. **I** (1949), №4, 64–98.
9. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, 2-е изд., "Мир", Москва, 1979.
10. O. I. Ponomarenko and Yu. D. Perun, *Multidimensional weakly stationary random functions on semigroups*, Theor. Probab. and. Math. Statist **73** (2006), 151–162.
11. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, Москва, 1962.
12. О. І. Пономаренко, *Випадкові лінійні функціонали другого порядку. I*, Теор ймовірн. мат. статист **54** (1996), 137–146.
13. О. І. Пономаренко, *Інтегральні зображення випадкових функцій зі значеннями в локально опуклих просторах*, Теор ймовірн. мат. статист **46** (1992), 132–141.
14. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, *Интегральные уравнения*, "Наука", Москва, 1968.
15. М. Л. Краснов, *Интегральные уравнения*, "Наука", Москва, 1968.
16. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Ч. 2*, ИЛ, Москва, 1966.
17. O. Ponomarenko and Yu. Perun, *Multivariate random fields on some homogeneous spaces*, Theory of Stoch. Processes **14(30)** (2008), №3–4, 104–113.
18. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория преставлений групп*, "Наука", Москва, 1965.
19. О. І. Пономаренко, Ю. Д. Перун, *Багатовимірні адитивно стаціонарні випадкові функції на опуклих структурах*, Теор. ймовірн. та мат. статистика **74** (2006), 118–130.
20. А. И. Пономаренко, *Стохастические задачи оптимизации*, Изд. КГУ, Киев, 1980.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 7 г, Київ 03127, Україна

Надійшла 08/09/2011