Теорія ймовір. та матем. статист. Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
Вип. 86, 2012, стор. 172–181 No. 86, 2012, pp. 172–181

ВИПРАВЛЕННЯ $T(q)$-ВІРОГІДНОЇ ОЦІНКИ В ПОКАЗНИКОВІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

УДК 519.21

А. В. САВЧЕНКО

Анотація. Вивчається показникова структурна модель регресії з похибками вимірювання. Побудовано виправлену $T(q)$-вірогідну оцінку для коефіцієнтів регресії. Отримано достатню умову строгої консистентності оцінки, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності, а q залежить від обсягу вибірки і прямує до 1.

Анотація. The exponential structural measurement error model is studied. The corrected $T(q)$-likelihood estimator of regression coefficients is constructed. When the sample size tends to infinity and q depends on the sample size and q tends to 1, a sufficient condition for strong consistency of the estimator is presented.

Анотація. Изучается показательная структурная модель регрессии с ошибками измерения. Построена исправленная $T(q)$-правдоподобная оценка для коэффициентов регрессии. Получено достаточное условие строгой состоятельности оценки, когда размер выборки стремится к бесконечности и q зависит от объема выборки и стремится к 1.

1. Вступ

У статті вивчається загальна модель нелінійної регресії з похибками у змінних, де відгук має умовний показниковий розподіл відносно прихованої змінної.

За невідомого розподілу прихованої змінної, виправлена (CS, Corrected Score) оціночна процедура дає консистентну оцінку, див. роботу [4]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку при малих і середніх обсягах вибірки. В роботах [1] та [5] побудовано модифікацію CS оцінки для малої вибірки, що стійкіша для малої і середньої вибірок і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності. В даній статті використовується інша ідея модифікувати CS оцінку при малих і середніх обсягах вибірки.

Існує низка статей, пов'язаних з $T(q)$-вірогідною оцінкою за відсутності похибок у змінних. У роботах [2, 3] вивчаються властивості оцінки шляхом асимптотичного аналізу і комп'ютерних моделювань.

Метою цієї статті є розгляд виправленої $T(q)$-вірогідної оцінки за наявності похибок вимірювання.

Позначимо через E математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць, D означає дисперсію. Математичне сподівання $\mathsf{E}_b f$ береться за умови, що b — істинне значення параметра β. Верхній індекс T означає транспонування.

Стаття влаштована наступним чином. У розділі 2 описується модель спостережень. Розділ 3 представляє виправлену $T(q)$-вірогідну оцінку. В розділі 4 доводиться строга консистентність оцінки. Розділ 5 містить висновки, а в додатку формулюється лема, на якій ґрунтується доведення консистентності.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 62J12.

Ключові слова і фрази. Показникова структурна модель, похибка вимірювання, $T(q)$-вірогідна оцінка, виправлена оціночна функція.

2. Модель спостережень

Розглянемо відгук y, $f(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$, з неспостережуваною випадковою пояснювальною змінною ξ, такою що $\lambda = e^{\beta_0+\beta_1\xi}$. Замість ξ спостерігається сурогатна змінна $x = \xi + \delta$, де $\delta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$. Випадкова величина δ називається похибкою вимірювання і припускається незалежною від ξ та y. Вважаємо дисперсію похибки σ_δ^2 відомою.

Спостерігаються незалежні копії моделі $z_i = (y_i, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, оцінюється вектор $\beta = (\beta_0; \beta_1)^T$ (тут β є істинним значенням параметра). Позначимо $f(y, \xi, \beta) = f(y|\lambda)$, $\lambda = e^{\beta_0+\beta_1\xi}$. Припускаємо, що всі експоненційні моменти ξ скінченні, тобто для всіх $a \in \mathbb{R}$ $\mathsf{E}e^{a\xi} < \infty$. Маємо

$$\mathsf{E}_\beta y = \mathsf{E}\mathsf{E}_\beta(y|\xi) = \mathsf{E}\frac{1}{\lambda} = \mathsf{E}e^{-\beta_0-\beta_1\xi} = e^{-\beta_0}\mathsf{E}e^{-\beta_1\xi},$$

$$\mathsf{D}_\beta y = \mathsf{E}\mathsf{D}_\beta(y|\xi) + \mathsf{D}\mathsf{E}_\beta(y|\xi) = \mathsf{E}\frac{1}{\lambda^2} + \mathsf{D}\frac{1}{\lambda} = \mathsf{E}e^{-2\beta_0-2\beta_1\xi} + \mathsf{D}e^{-\beta_0-\beta_1\xi}$$
$$= e^{-2\beta_0}\left(2\mathsf{E}e^{-2\beta_1\xi} - (\mathsf{E}e^{-\beta_1\xi})^2\right).$$

Для $u > 0$, $q > 0$, введемо перетворення Бокса–Кокса

$$T(q, u) = \begin{cases} \frac{u^{1-q}-1}{1-q}, & \text{якщо } q \neq 1; \\ \ln u, & \text{якщо } q = 1. \end{cases}$$

$T(q)$-вірогідна оціночна функція визначається як

$$S^{(q)}(y, \xi, \beta) = \frac{\partial}{\partial\beta}T(q, f(y, \xi, \beta)) = f^{-q}\frac{\partial f}{\partial\beta} = e^{\lambda y(q-1)}\lambda^{1-q}(1 - \lambda y)(1; \xi)^T.$$

Для $q = 1$, $S^{(q)}$ збігається з оціночною функцією методу максимальної вірогідності. За відсутності похибки вимірювання, $S^{(q)}$ розглядалась в статтях [2, 3]. З $q = q_n \to 1$ і $\sqrt{n}(q_n - 1) \to 0$ при $n \to \infty$, $T(q)$-вірогідна оціночна функція дає консистентну оцінку β з тою ж ефективністю, що і оцінка максимальної вірогідності (ОМВ), але з кращою поведінкою для малих вибірок. За відсутності похибки вимірювання ОМВ, позначена як $\widehat{\beta}_n$, задається рівністю:

$$\widehat{\beta}_n = \underset{\beta\in\Theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n \ln(f(y_i, \xi_i, \beta)),$$

де $\widehat{\beta}_n = \left(\widehat{\beta}_{0,n}, \widehat{\beta}_{1,n}\right)^T$ і параметрична множина $\Theta \subset \mathbb{R}^2$.

3. Побудова оціночного рівняння

Адаптуємо оціночну функцію $S^{(q)}$ до похибок вимірювання, побудувавши виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$ таку, що для всіх β з Θ виконується майже напевно

$$\mathsf{E}_b\left[S_C^{(q)}(y, x, \beta)\big|y, \xi\right] = S^{(q)}(y, \xi, \beta). \tag{1}$$

Виправлена $T(q)$-вірогідна оцінка $\widehat{\beta}_n(q)$ визначається як вимірний розв'язок рівняння

$$\sum_{i=1}^n S_C^{(q)}(y_i, x_i, \beta) = 0, \qquad \beta \in \Theta. \tag{2}$$

Позначимо $h(y,x) = S_C^{(q)}(y,x,\beta)$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_b\left[h(y,x)|y,\xi\right] &= f^{-q}\frac{\partial f}{\partial\beta} = e^{\lambda(q-1)y}\cdot\left(\lambda^{1-q}-\lambda^{2-q}y\right)\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n-q+1}(q-1)^n y^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n-q+2}(q-1)^n y^{n+1}}{n!}\right)\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3}$$

де $\lambda = e^{\beta_0+\beta_1\xi}$. Розв'язок рівняння деконволюції (3) можна знайти у вигляді

$$h(y,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n y^n}{n!}\begin{pmatrix}\varphi_n(x)\\ \psi_n(x)\end{pmatrix}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n y^{n+1}}{n!}\begin{pmatrix}\varphi_{n+1}(x)\\ \psi_{n+1}(x)\end{pmatrix}.\tag{4}$$

Тут $\varphi_n(x)$ і $\psi_n(x)$ задовольняють наступні рівняння деконволюції:

$$\mathsf{E}\left[\varphi_n(x)|\xi\right] = \lambda^{n-q+1} = e^{(\beta_0+\beta_1\xi)(n-q+1)},\tag{5}$$

$$\mathsf{E}\left[\psi_n(x)|\xi\right] = \lambda^{n-q+1}\xi = e^{(\beta_0+\beta_1\xi)(n-q+1)}\xi.\tag{6}$$

Тепер розв'яжемо рівняння (5). Нехай $a_n = \beta_0(n-q+1)$, $r_n = \beta_1(n-q+1)$. Перепишемо (5) у вигляді $\mathsf{E}\left[\varphi_n(x)|\xi\right] = e^{a_n+r_n\xi}$ і шукаємо $\varphi_n(x)$ виду $\varphi_n(x) = C_n e^{r_n x}$. Отримаємо $\mathsf{E}\left(e^{r_n(\xi+\delta)}\cdot C_n|\xi\right) = C_n e^{r_n\xi}\mathsf{E}e^{r_n\delta} = e^{a_n+r_n\xi}$, звідки $C_n = \left(\mathsf{E}e^{r_n\delta}\right)^{-1}e^{a_n}$. Нагадаємо, що $\delta\sim\mathcal{N}(0,\sigma_\delta^2)$. З рівності $\mathsf{E}\exp(r_n\delta) = \exp\left(r_n^2\sigma_\delta^2/2\right)$ маємо

$$\mathsf{E}\delta\exp(r_n\delta) = \frac{d}{dr_n}\mathsf{E}\exp(r_n\delta) = r_n\sigma_\delta^2\exp\left(\frac{r_n^2\sigma_\delta^2}{2}\right).$$

Звідси

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= C_n e^{r_n x} = \frac{e^{(\beta_0+\beta_1 x)(n-q+1)}}{\mathsf{E}e^{\beta_1(n-q+1)\delta}}\\ &= \exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(n-q+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}\right).\end{aligned}\tag{7}$$

Далі розв'яжемо (6). Перепишемо (6) у вигляді $\mathsf{E}\left[\psi_n(x)|\xi\right] = \xi e^{a_n+r_n\xi}$ і шукаємо $\psi_n(x)$ виду $\psi_n(x) = e^{r_n x}(C_{1,n}+C_{2,n}x)$. Аналогічно знаходимо

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= e^{r_n x}(C_{1,n}+C_{2,n}x) = -\frac{e^{a_n+r_n x}\mathsf{E}\delta e^{r_n\delta}-xe^{a_n+r_n x}\mathsf{E}e^{r_n\delta}}{\left(\mathsf{E}e^{r_n\delta}\right)^2}\\ &= \frac{e^{(\beta_0+\beta_1 x)(n-q+1)}}{\mathsf{E}e^{\beta_1(n-q+1)\delta}}\left(x-\frac{\mathsf{E}\delta e^{\beta_1\delta(n-q+1)}}{\mathsf{E}e^{\beta_1\delta(n-q+1)}}\right)\\ &= (x-\beta_1(n-q+1)\sigma_\delta^2)\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(n-q+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}\right).\end{aligned}\tag{8}$$

Нарешті отримаємо $h(y,x)$ згідно з (4), (7), (8). Ряди в (4) абсолютно збіжні за ознакою Даламбера. За теоремою Фубіні можемо змінити порядок підсумування і обчислити $\mathsf{E}\left[\varphi_n(x)|\xi\right]$ та $\mathsf{E}\left[\psi_n(x)|\xi\right]$, тому справді функція (4) з $\varphi_n(x)$ і $\psi_n(x)$, представленими у (7), (8), задовольняє рівняння (1).

Якщо $q=1$, тоді з (4) отримаємо

$$S_C^{(1)}(y,x,\beta) = \begin{pmatrix}\varphi_0\\ \psi_0\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-y\exp\left(\beta_0+\beta_1 x-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\\ x-y(x-\beta_1\sigma_\delta^2)\exp\left(\beta_0+\beta_1 x-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

При побудові оцінки $\widehat{\beta_n}(q)$, $q>0$, не використовується розподіл ξ.

4. Консистентність оцінки

Нижче "зрештою" означає наступне: для послідовності випадкових величин

$$\{U_n\colon n \geq 1\}$$

послідовність тверджень $A_n(U_n)$ виконується зрештою за ймовірнісною мірою P, якщо існує випадкова подія $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$, така що $\forall \omega \in \Omega_0\ \exists N(\omega)\ \forall n \geq N\colon A_n(U_n(\omega))$ виконується.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $q = q_n$, *причому* $0 < q_n \leq 1$, $n \geq 1$, *та* $q_n \to 1$ *при* $n \to \infty$.
2. *Параметрична множина* Θ *– відома компактна множина в* $\mathbb{R}^2$ *та істинне значення* b *параметра* β *є внутрішньою точкою* Θ.
3. *Існує* $K > 0$ *таке, що* $|\xi| \leq K$ *майже напевно, де* K*– невідома стала.*
4. $\mathsf{D}\xi \neq 0$.

Тоді зрештою рівняння (2) *має розв'язок.*

Визначимо оцінку $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}$ як розв'язок (2), якщо існує такий розв'язок; інакше покладемо $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)} = 0$. Доведення теореми 4.1 наводиться нижче.

Теорема 4.2. *За умов теореми 4.1 оцінка* $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}$ *є строго консистентною, тобто* $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)} \to b$ *з ймовірністю 1 при* $n \to \infty$, *де* b *є істинним значенням* β.

Доведення теорем 4.1 і 4.2. Використовуємо лему О. Усольцевої [6] (див. Додаток) Маємо оціночне рівняння $\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i, x_i, \beta, q_n) = 0$, в якому $q_n \to 1$ при $n \to \infty$, де

$$\begin{pmatrix} S_1(y_i, x_i, \beta, q_n) \\ S_2(y_i, x_i, \beta, q_n) \end{pmatrix} = S_C(y_i, x_i, \beta, q_n) \ = \ S_C^{(q_n)}(y_i, x_i, \beta).$$

Позначимо

$$S_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_C(y_i, x_i, \beta, 1),$$

$$\Phi_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, \beta, q_n) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right).$$

Перепишемо оціночне рівняння у вигляді $S_n(\beta) + \Phi_n(\beta) = 0$, $\beta \in \Theta$.

Маємо

$$\mathsf{E}_b y^n e^{\beta_1 \xi} = \mathsf{E}\mathsf{E}_b \left(y^n e^{\beta_1 \xi} \mid \xi \right) = \mathsf{E} \frac{e^{\beta_1 \xi} n!}{\lambda^n(b_0, b_1)} = n!\, e^{-b_0 n} \mathsf{E} e^{(\beta_1 - b_1 n)\xi}, \tag{9}$$

$$\mathsf{E}_b y e^{\beta_1 \xi} = \mathsf{E}\mathsf{E}_b \left(y e^{\beta_1 \xi} \mid \xi \right) = \mathsf{E} \frac{e^{\beta_1 \xi}}{\lambda(b_0, b_1)} = e^{-b_0} \mathsf{E} e^{(\beta_1 - b_1)\xi},$$

$$\mathsf{E}_b y|\xi| e^{\beta_1 \xi} = \mathsf{E}\mathsf{E}_b \left(y|\xi| e^{\beta_1 \xi} \mid \xi \right) = \mathsf{E} \frac{|\xi| e^{\beta_1 \xi}}{\lambda(b_0, b_1)} = e^{-b_0} \mathsf{E}|\xi| e^{(\beta_1 - b_1)\xi},$$

$$\mathsf{E}_b y\xi^2 e^{\beta_1 \xi} = \mathsf{E}\mathsf{E}_b \left(y\xi^2 e^{\beta_1 \xi} \mid \xi \right) = \mathsf{E} \frac{\xi^2 e^{\beta_1 \xi}}{\lambda(b_0, b_1)} = e^{-b_0} \mathsf{E}\xi^2 e^{(\beta_1 - b_1)\xi},$$

$$\mathsf{E} e^{ax} = \mathsf{E} e^{a\xi + a\delta} = \mathsf{E} e^{a\xi} e^{\frac{a^2 \sigma_\delta^2}{2}},$$

$$\mathsf{E} x e^{ax} = \mathsf{E}\xi e^{a\xi} \mathsf{E} e^{a\delta} + \mathsf{E} e^{a\xi} \mathsf{E}\delta e^{a\delta} = \left(\mathsf{E}\xi e^{a\xi} + a\sigma_\delta^2 \mathsf{E} e^{a\xi} \right) e^{\frac{a^2 \sigma_\delta^2}{2}}.$$

Нагадаємо, що $\delta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$. З рівності $\mathsf{E}\exp(r_n \delta) = \exp\left(r_n^2 \sigma_\delta^2 / 2 \right)$ маємо

$$\mathsf{E}\delta^2 \exp(r_n \delta) \ = \ \frac{d^2}{dr_n^2} \mathsf{E}\exp(r_n \delta) \ = \ (r_n^2 \sigma_\delta^4 + \sigma_\delta^2) \exp\left(\frac{r_n^2 \sigma_\delta^2}{2} \right).$$

Тоді $\mathsf{E}x^2e^{ax} = \left(\mathsf{E}\xi^2e^{a\xi} + 2a\sigma_\delta^2\mathsf{E}\xi e^{a\xi} + (a^2\sigma_\delta^4 + \sigma_\delta^2)\mathsf{E}e^{a\xi}\right)\exp(a^2\sigma_\delta^2/2)$. Усі наведені математичні сподівання скінченні згідно з умовою 3 теореми 4.1.

Розглянемо умову 1 леми 6.1. Те, що $S_C(y_i, x_i, \cdot, 1) \in C^1(\Theta)$ майже напевно, випливає з вигляду цієї вектор-функції; належність до класу $C^1(\Theta)$ означає, що неперервна диференційованість виконується на деякій відкритій множині, що містить Θ. Тепер введемо норму в $\mathbb{R}^2$: $\|z\| = |z_1| + |z_2|$, $z \in \mathbb{R}^2$. Обмежимо наступне математичне сподівання, використовуючи незалежність ξ та δ, нормальний розподіл δ та нерівність $\mathsf{E}|\delta|e^{\beta_1\delta} \le \sigma_\delta e^{\beta_1^2\sigma_\delta^2}$, яка випливає з нерівності Коші–Шварца:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_b\|S_C(y,x,\beta,1)\| &= \mathsf{E}_b\left|1 - y\exp\left(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_1\delta - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\right| \\
&\quad + \mathsf{E}_b\left|\xi + \delta - y\left(\xi + \delta - \beta_1\sigma_\delta^2\right)\cdot\exp\left(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_1\delta - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\right| \\
&\le 1 + \exp\left(\beta_0 - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\mathsf{E}e^{\beta_1\delta}\mathsf{E}_b ye^{\beta_1\xi} + \mathsf{E}|\xi| + \mathsf{E}|\delta| \\
&\quad + \exp\left(\beta_0 - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\left(\mathsf{E}e^{\beta_1\delta}\mathsf{E}_b y\left(|\xi| + |\beta_1|\sigma_\delta^2\right)e^{\beta_1\xi}\mathsf{E}|\delta|e^{\beta_1\delta}\mathsf{E}_b ye^{\beta_1\xi}\right) \\
&\le 1 + \mathsf{E}|\xi| + \mathsf{E}|\delta| \\
&\quad + e^{\beta_0 - b_0}\left(\mathsf{E}|\xi|e^{(\beta_1 - b_1)\xi} + \left(1 + \sigma_\delta\exp\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2} + |\beta_1|\sigma_\delta^2\right)\mathsf{E}e^{(\beta_1 - b_1)\xi}\right).
\end{aligned}$$

Усі вирази в правій частині нерівності за умовою 3 теореми 4.1 обмежені зверху. Таким чином, $\mathsf{E}_b\|S_C(y,x,\beta,1)\| < \infty$.

В умові 2 леми 6.1 функція

$$\begin{aligned}
S_\infty(\beta, b) &:= \mathsf{E}_b S_C(y,x,\beta,1) = \mathsf{E}_b S_C^{(1)}(y,x,\beta) = \mathsf{E}_b\mathsf{E}_b\left(S^{(1)}(y,x,\beta) \mid y, \xi\right) \\
&= \mathsf{E}_b S^{(1)}(y,\xi,\beta) = \mathsf{E}_b(1 - \lambda(\beta)y)(1;\xi)^T = \mathsf{E}\left(1 - \frac{\lambda(\beta)}{\lambda(b)}\right)(1;\xi)^T \\
&= \mathsf{E}\left(1 - \exp(\beta_0 - b_0 + (\beta_1 - b_1)\xi)\right)(1;\xi)^T
\end{aligned}$$

неперервна по $\beta = (\beta_0;\beta_1)^T$ на Θ.

Перевіримо умову 3 леми 6.1. Матриця Якобі

$$\frac{\partial S_C^{(1)}(y,x,\beta)}{\partial\beta^T} = y\exp(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2})\begin{pmatrix} -1 & -(x - \beta_1\sigma_\delta^2) \\ -(x - \beta_1\sigma_\delta^2) & (\sigma_\delta^2 - (x - \beta_1\sigma_\delta^2)^2) \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1}^2$$

є 2×2-матриця.

Будемо використовувати матричну норму $\|A\| = \sum_{i,j=1}^2 |a_{ij}|$. Обмежимо математичне сподівання норми цієї матриці зверху, використовуючи умову 3 теореми 4.1:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_b\left\|\frac{\partial S_C^{(1)}(y,x,\beta)}{\partial\beta^T}\right\| \\
&\quad \le \exp\left(\beta_0 - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\mathsf{E}_b y\left(1 + 2|x| + 2|\beta_1|\sigma_\delta^2 + \sigma_\delta^2 + 2x^2 + 2\beta_1^2\sigma_\delta^4\right)e^{\beta_1 x} \\
&\quad \le e^{\beta_0 - b_0}\Bigg(2\mathsf{E}|\xi|e^{(\beta_1 - b_1)\xi} \\
&\qquad\qquad + \left(1 + 2|\beta_1|\sigma_\delta^2 + 5\sigma_\delta^2 + 6\beta_1^2\sigma_\delta^4 + 2\sigma_\delta\exp\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\mathsf{E}e^{(\beta_1 - b_1)\xi} \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathsf{E}\xi^2 e^{(\beta_1 - b_1)\xi}\Bigg) < \infty.
\end{aligned}$$

Розглянемо умову 4 леми 6.1. Матриця Якобі

$$\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T} = -e^{\beta_0-b_0}\begin{pmatrix}\mathsf{E}e^{(\beta_1-b_1)\xi} & \mathsf{E}\xi e^{(\beta_1-b_1)\xi}\\ \mathsf{E}\xi e^{(\beta_1-b_1)\xi} & \mathsf{E}\xi^2 e^{(\beta_1-b_1)\xi}\end{pmatrix}$$

є симетричною;

$$V := \left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=b} = \frac{\partial S_\infty(b,b)}{\partial\beta^T}$$

– невироджена матриця, бо її визначник відрізняється від 0 внаслідок умови 4 теореми 4.1:

$$\det\frac{\partial S_\infty(b,b)}{\partial\beta^T} = \begin{vmatrix}1 & \mathsf{E}\xi\\ \mathsf{E}\xi & \mathsf{E}\xi^2\end{vmatrix} = \mathsf{D}\xi \neq 0.$$

Для перевірки умови 5 леми 6.1 розв'яжемо систему рівнянь відносно β:

$$S_\infty(\beta,b)=0,$$

або

$$\begin{cases}1-e^{\beta_0-b_0}\mathsf{E}e^{(\beta_1-b_1)\xi}=0,\\ \mathsf{E}\xi-e^{\beta_0-b_0}\mathsf{E}\xi e^{(\beta_1-b_1)\xi}=0.\end{cases}$$

Якщо $\beta=b$, тоді $S_\infty(b,b)=0$.

Припустимо, що існує таке $\beta\neq b$, що $S_\infty(\beta,b)=0$, позначимо $f(\beta)=S_\infty(\beta,b)$. Розглянемо $g(t)=(f(tb+(1-t)\beta),b-\beta)$, тоді за припущенням $g(0)=g(1)=0$. За теоремою Ролля існує таке $\tau\in(0,1)$, що $g'(\tau)=0$ і

$$(b-\beta)^T\left(\left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=\bar b}\right)(b-\beta)=0, \tag{10}$$

де точка $\bar b$ розташована на відрізку з кінцями b і β. З нерівності Коші випливає, що

$$\left(\mathsf{E}\xi e^{(\beta_1-b_1)\xi/2}e^{(\beta_1-b_1)\xi/2}\right)^2 \le \mathsf{E}\xi^2 e^{(\beta_1-b_1)\xi}\mathsf{E}e^{(\beta_1-b_1)\xi},$$

звідки

$$\det\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\ge 0.$$

Тут насправді виконується строга нерівність, бо

$$\frac{\xi e^{(\beta_1-b_1)\xi/2}}{e^{(\beta_1-b_1)\xi/2}}=\xi$$

не є сталою величиною внаслідок умови 4 теореми 4.1. Звідси, використовуючи критерій Сильвестра, остаточно отримаємо, що матриця

$$\left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=\bar b}$$

від'ємно визначена для для всіх $b\in\Theta$, тоді приходимо до суперечності з рівністю (10).

Таким чином, рівняння $S_\infty(\beta,b)=0$ має єдиний розв'язок на Θ. Крім того, $S_\infty(\beta,b)=0$ тоді і тільки тоді, коли $\beta=b$.

Розглянемо умову 6 леми 6.1. Для того, щоб показати, що $\sup_{\beta\in\Theta}|\Phi_n(\beta)| \xrightarrow{P1} 0$, оцінимо

$$\begin{aligned}\|\Phi_n(\beta)\| &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\|\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sup_{q_n\le\gamma_n\le 1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma_n)}{\partial q}\right||q_n-1|,\end{aligned}$$

$$|q_n-1|\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sup_{1-\tilde\delta\le\gamma\le 1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma)}{\partial q}\right|\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Вимагаємо, щоб для кожного $k=1,2$ $\exists\tilde\delta>0$:

$$\mathsf{E}_b\sup_{1-\tilde\delta\le\gamma\le 1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma)}{\partial q}\right|<\infty.$$

Диференціюючи $S_C^{(q)}(y,x,\beta)$ по q, отримаємо вектор. Для першого компоненту $(k=1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1(y,x,\beta,q)}{\partial q} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n y^{n+1}}{n!}\exp\left((\beta_0+\beta_1x)(n-q+2)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+2)^2}{2}\right)\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n y^{n}}{n!}\left(-\beta_0-\beta_1x+\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)\right)\\ &\qquad\times\exp\left((\beta_0+\beta_1x)(n-q+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}\right)\\ &\quad-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n y^{n+2}}{n!}\exp\left((\beta_0+\beta_1x)(n-q+3)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+3)^2}{2}\right)\\ &\quad-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n y^{n+1}}{n!}\left(-\beta_0-\beta_1x+\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+2)\right)\\ &\qquad\times\exp\left((\beta_0+\beta_1x)(n-q+2)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+2)^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Оцінимо $x\le|x|\le|\xi|+|\delta|$, $|\beta_0|\le C_0$, $|\beta_1|\le C_1$ та

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}+\beta_1(n-q+1)|\delta|\right)\\ &\quad\le\mathsf{E}\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}+\beta_1(n-q+1)\delta\right)\\ &\qquad+\mathsf{E}\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}-\beta_1(n-q+1)\delta\right)\\ &\quad\le 2\mathsf{E}\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(n-q+1)^2}{2}+|\beta_1|(n-q+1)\delta\right).\end{aligned}$$

Із рівностей в лемі 6.2 та $\delta = \sigma_\delta \tau$, де $\tau \sim \mathcal{N}(0,1)$, випливають нерівності

$$\mathsf{E} \sup_{|\beta_1| \le C_1} \exp\left(-\frac{\beta_1^2 \sigma_\delta^2 (n-q+1)^2}{2} + |\beta_1|(n-q+1)\delta\right) \le C_1 \sigma_\delta (n-q+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1,$$

$$\mathsf{E} \sup_{|\beta_1| \le C_1} |\delta| \exp\left(-\frac{\beta_1^2 \sigma_\delta^2 (n-q+1)^2}{2} + |\beta_1|(n-q+1)\delta\right)$$
$$\le \frac{C_1^2 \sigma_\delta^3 (n-q+1)^2}{\sqrt{2\pi}} + C_1 \sigma_\delta^2 (n-q+1) + \sigma_\delta \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Використовуючи формулу (9), умови 2 і 3 теореми 4.1, формули суми геометричної прогресії та дії над степеневими рядами, отримаємо скінченність

$$\mathsf{E}_b \sup_{1-\tilde{\delta} \le q \le 1, \beta \in \Theta} \left| \frac{\partial S_1(y,x,\beta,q)}{\partial q} \right|.$$

Вибираємо $\tilde{\delta}$ так, щоб

$$\tilde{\delta} < \exp(b_0 - |b_1| K - C_0 - C_1 K). \tag{11}$$

Аналогічно до першого компоненту оцінюється другий компонент

$$\frac{\partial S_2(y,x,\beta,q)}{\partial q}.$$

Розглянемо умову 7 леми 6.1.

Нехай n_0– такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується $q_n \ge 1 - \tilde{\delta}$, де $\tilde{\delta}$ задовольняє (11). Маємо

$$\sup_{n\ge 1} \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^T} \right\| \le \sup_{n \ge n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{\beta \in \Theta; 1-\tilde{\delta} \le q \le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \big(S_C(y_i,x_i,\beta,q) - S_C(y_i,x_i,\beta,1) \big) \right\|$$
$$+ \sup_{n < n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \big(S_C(y_i,x_i,\beta,q_n) - S_C(y_i,x_i,\beta,1) \big) \right\|.$$

Доданок

$$\sup_{n < n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \big(S_C(y_i,x_i,\beta,q_n) - S_C(y_i,x_i,\beta,1) \big) \right\|$$

скінченний м.н.

Розглянемо

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta^T} S_C(y,x,\beta,q) - \frac{\partial}{\partial \beta^T} S_C(y,x,\beta,1) \right)_{11}$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(n-q+1)(q-1)^n y^n}{n!} \exp\left((\beta_0 + \beta_1 x)(n-q+1) - \frac{\beta_1^2 \sigma_\delta^2 (n-q+1)^2}{2} \right)$$
$$- \sum_{n=0}^\infty \frac{(n-q+2)(q-1)^n y^{n+1}}{n!} \exp\left((\beta_0 + \beta_1 x)(n-q+2) - \frac{\beta_1^2 \sigma_\delta^2 (n-q+2)^2}{2} \right)$$
$$+ y \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2 \sigma_\delta^2}{2} \right).$$

За схожими міркуваннями перевірки умови 6 леми 6.1 встановлюється скінченність математичного сподівання, але істинне значення параметра таке, яке присутнє у виразі для λ.

Безпосередньо перевіряється, що при всіх $k, l = 1, 2$

$$\mathsf{E} \sup_{\beta\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le 1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial\beta^T} S_C(y_i, x_i, \beta, q) - \frac{\partial}{\partial\beta^T} S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right)_{kl} \right| < \infty,$$

де елемент

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T} S_C(y_i, x_i, \beta, q) - \frac{\partial}{\partial\beta^T} S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right)_{kl}$$

знаходиться в k-му рядку і в l-му стовпчику матриці 2×2, тоді

$$\sup_{n\ge 1} \sup_{\beta\in\Theta} \left\| \frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T} \right\| < \infty \quad \text{м.н.}$$

Усі умови леми 6.1 перевірені, і твердження теорем 4.1 та 4.2 виконуються за лемою 6.1.

5. Висновки

Вивчається показникова структурна модель з нормально розподіленою похибкою вимірювання. Припускається, що дисперсія σ_δ^2 похибки вимірювання відома. Щоб оцінити невідомий параметр $b = (b_0; b_1)^T$, побудовано виправлену $T(q)$-вірогідну оцінку. Наведено достатні умови її строгої консистентності. Надалі можна намагатися послабити умови консистентності і вивчати асимптотичну нормальність оцінки.

Автор вдячний професору О. Г. Кукушу за постановку задачі та обговорення.

Література

1. C.–L. Cheng and H. Schneeweiss, *Polynomial regression with errors in the variables*, J. R. Statistical Society B, **60** (1998), 189–199.
2. D. Ferrari and Y. Yang, *Maximum Lq–likelihood Estimation*, Annals of Statistics, **38** (2010), 753–783.
3. N. Kolev, *Maximum $T(q)$–likelihood Estimation: a New Method and its Application in Risk Management*, 6^{th} Conference in Actuarial Science & Finance on Samos, 2010, p. 22.
4. A. Kukush and H. Schneeweiss *Comparing different estimators in a non-linear measurement error model*, I. Mathematical Methods of Statistics, **14** (2005), 53–79.
5. A. Kukush,I. Markovsky, and S. Van Huffel *Consistent adjusted least squares estimator for errors-in-variables model $AXB = C$*, Metrika, **57** (2003), 253–285.
6. О. С. Усольцева, *Консистентна оцінка в моделі тривалості життя з цензурованими спостереженнями за наявності похибок вимірювання*, Теорія ймовірностей та математична статистика, **82** (2010), 156–162.

6. Додаток

Лема 6.1 ([6]). *Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — імовірнісний простір, Θ – компактна підмножина $\mathbb{R}^m$. Спостерігаються незалежні однаково розподілені в $\mathbb{R}^k$ випадкові вектори Z_i, $i = 1, \ldots, n$, розподіл яких залежить від $\beta \in \Theta$. Для заданої борелевої функції $q\colon \Theta \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ розглянемо $S_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n q(\beta, Z_i)$, $\beta \in \Theta$. Нехай істинне значення параметра β дорівнює b, причому b є внутрішньою точкою Θ.*

Нехай виконуються наступні умови:

1. $q(\cdot, Z) \in C^1(\Theta)$ *майже напевно;* $\mathsf{E}_b\|q(\beta, Z)\| < \infty$, $\beta \in \Theta$.
2. *Функція* $S_\infty(\beta, b) := \mathsf{E}_b q(\beta, Z)$ *неперервна по* β *на* Θ.
3. $\mathsf{E}_b \left\|\partial q(\beta, Z)/\partial\beta^T\right\| < \infty$, $\beta \in \Theta$.
4. $V := \partial S_\infty(\beta, b)/\partial\beta^T\big|_{\beta=b}$ — *невироджена матриця.*
5. $S_\infty(\beta, b) = 0$, $\beta \in \Theta$, *тоді і тільки тоді, коли* $\beta = b$.

Нехай випадкові вектор-функції $\Phi_n(\beta) = \Phi_n(\beta, \omega)$, $n \ge 1$, із значеннями в $\mathbb{R}^m$ задовольняють умови:

6. *Для всіх $\beta \in \Theta$: $\Phi_n(\beta) \to 0$ з ймовірністю 1 при $n \to \infty$, $\Phi_n(\cdot) \in C^1(\Theta)$ майже напевно.*

7. $\sup_{n\geq 1}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\| < \infty$ *майже напевно.*

Тоді мають місце наступні твердження:

a) *зрештою існує розв'язок оціночного рівняння* $S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)=0$, $\beta\in\Theta$;

b) *оцінка* $\widehat{\beta}_n$ *параметра* β, *для якої зрештою виконується* $S_n(\widehat{\beta}_n)+\Phi_n(\widehat{\beta}_n)=0$, *є строго консистентною.*

Лема 6.2. *Нехай* $\tau\sim\mathcal{N}(0,1)$. *Тоді мають місце рівності*

$$\mathsf{E}\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1,$$

$$\mathsf{E}\sup_{|b|\leq C}|\tau|\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=\frac{C^2}{\sqrt{2\pi}}+C+\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Доведення леми 6.2. Якщо $|t|\leq C$, то

$$\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)$$

досягається при $b=t$, а для $|t|\geq C$ при $|b|=C$. Розглянемо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}+t^2\right)dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{C^2}{2}-Ct\right)dt\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{C^2}{2}+Ct\right)dt\\
&=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1.
\end{aligned}$$

Схожими міркуваннями встановлюється інша рівність леми. □

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вулиця Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: nebulous@bigmir.net

Надійшла 02/06/2011