АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ МАКСИМУМУ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ФУНКЦІЙНІЙ БАНАХОВІЙ ГРАТЦІ

УДК 519.21

К. С. АКБАШ І І. К. МАЦАК

Анотація. У роботі дається узагальнення відомих для $\mathbb{R}^1$ результатів про асимптотичну стійкість максимуму незалежних випадкових величин на q-вгнуті банахові ідеальні простори. Також уточнюється одна теорема про відносну асимптотичну стійкість максимуму.

Abstract. There are well-known for $\mathbb{R}^1$ results of maximum asymptotic stability of independent random variables on q-concave Banach ideal spaces that are being generalized at work. And also one theorem of maximum relative asymptotic stability is being obtained.

Аннотация. В работе дается обобщение известных для $\mathbb{R}^1$ результатов об асимптотической устойчивости максимума независимых случайных величин на q-вогнутые банаховы идеальные пространства. Также уточняется одна теорема об относительной асимптотической устойчивости максимума.

1. Вступ. Основні результати

Нехай ξ випадкова величина (в.в.) в $\mathbb{R}^1$ з функцією розподілу $F(x)$, ξ_i незалежні копії ξ, $z_n = \max_{1\le i\le n} \xi_i$.

Кажуть, що послідовність (z_n) відносно стійка майже напевне (м.н.), якщо існує числова послідовність (a_n) така, що при $n \to \infty$

$$\frac{z_n}{a_n} \to 1 \quad \text{м.н.} \tag{1}$$

і відповідно, (z_n) стійка м.н., якщо при $n \to \infty$

$$z_n - a_n \to 0 \quad \text{м.н.} \tag{2}$$

Ще у класичній роботі Б. В. Гнєденка [1] вивчалась збіжність (слабка) до вироджених законів. Критерії для виконання асимптотичних співвідношень (1), (2) в $\mathbb{R}^1$ також добре відомі (див. [2, 3]); огляд ранніх робіт по збіжності до вироджених законів міститься в ([3]).

У даній роботі ставиться задача отримати співвідношення (1), (2) у нескінченновимірному випадку.

Поняття максимуму двох або більше випадкових елементів (в.е.) може бути введене у банахових гратках [4]. Важливим прикладом банахової гратки є банахів ідеальний простір (БІП) [5]. БІП — це банахів простір B вимірних функцій на вимірному просторі (T, Λ, μ), μ — σ-скінченна, σ-адитивна і невід'ємна міра, для якого з $|x(t)| \le |y(t)|$ майже скрізь і $y \in B$ випливає, що $x \in B$ і $\|x\| \le \|y\|$. Всюди ми розглядаємо лише сепарабельні БІП.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60B12.

Ключові слова і фрази. максимуми незалежних випадкових елементів, асимптотична стійкість, банахові ідеальні простори.

Нехай B — БІП з нормою $\|\cdot\|$ і модулем $|\cdot|$, X — в.е. заданий на ймовірнісному просторі (Ω, A, P) із значеннями в B, X_i — незалежні копії X, $Z_n = \max_{1\le i\le n} X_i$. І нехай

$$\begin{gathered} X = \{X(t), t\in T\}, \qquad \mathfrak{S}X = \{\sigma(t), t\in T\}, \\ X(t) = \sigma(t)\widetilde{X}(t) \quad \text{для всіх } t\in T \end{gathered} \tag{3}$$

і для всіх $t\in T$

$$\mathsf{P}(\widetilde{X}(t) < x) = \mathsf{P}(\xi < x) = F(x),$$

тобто припускається, що для всіх t $X(t)$ та $\widetilde{X}(t)$ в.в.

Тоді узагальнення співвідношень (1), (2) для БІП запишуться так:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{Z_n}{a_n} - \mathfrak{S}X \right\| = 0 \quad \text{м.н.}, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|Z_n - a_n\mathfrak{S}X\| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{5}$$

Окрім збіжності за нормою в (4), (5) ми установимо також порядкову збіжність максимуму.

Нагадаємо, що послідовність елементів (x_n) банахової гратки B називається о-збіжною до елемента x, $x = \text{o-}\lim_{n\to\infty} x_n$, якщо існує така послідовність (v_n), що $|x - x_n| < v_n$ і $v_n \downarrow 0$, тобто $v_1 \ge v_2 \ge \dots$ і $\inf_{n\ge1} v_n = 0$ ([5, 6]).

Банахова гратка B називається q-вгнутою, $1\le q<\infty$, якщо для деякої сталої $D_{(q)} = D_{(q)}(B)$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \le D_{(q)} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|.$$

Покладемо $\tau(F) = \sup(x\colon F(x) < 1)$,

$$\begin{gathered} \varphi(y) = \inf\left(x\ge 1\colon \frac{1}{1-F(x)} \ge y\right), \\ a_n = \varphi(n) = \inf\left(x\ge1\colon F(x) \ge 1 - \frac{1}{n}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Далі будемо вважати, що $F(x)$ неперервна, зростаюча функція і $\tau(F) = \infty$.

Теорема 1.1. *Нехай X — випадковий елемент із значеннями в q-вгнутому БІП B, $1\le q<\infty$, який зображується у вигляді (3), $\varphi(y)$ повільно змінюється на нескінченності, a_n — задається рівністю (6). Якщо виконуються умови:*

$$\exists t_0\colon \quad \int_1^\infty \frac{1-F(x)}{x\,[1-F(x/t_0)]}\,dx < \infty \tag{7}$$

$$\forall t_0 > 1\colon \quad \int_1^\infty \frac{dF(x)}{1-F(x/t_0)} < \infty, \tag{8}$$

то

$$\text{o-}\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{a_n} = \mathfrak{S}X \quad \textit{м.н.} \tag{9}$$

і

$$\mathsf{E}\left\| \sup_{n\ge1} \frac{(Z_n)_+}{a_n} \right\|^q < \infty, \tag{10}$$

де $x_+ = \max(x,0)$, $x_- = \max(-x,0)$.

Наслідок 1.1. *В умовах теореми 1.1 виконується асимптотичне співвідношення (4).*

Зауваження 1.1. У роботі [4] доведено справедливість рівності (4) при умові: $\forall t_0 > 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^q \, dF(x)}{1 - F\left(x/t_0\right)} < \infty. \tag{11}$$

Наслідок 1.1 дещо уточнює цей результат. У кінці роботи наведений простий приклад, для якого умова (6) не виконується, в той час як умови (7), (8) виконуються.

Відзначимо також, що у просторі l_q умова (7) буде і необхідною для виконання (10).

Теорема 1.2. *Нехай X випадковий елемент із значеннями в q-вгнутому БІП, $1 \le q < \infty$, який зображується у вигляді* (3), *a_n — задається рівністю* (6) *і виконуються умови:*

$$\exists x_0\colon \quad \int_{x_0}^{+\infty} \frac{x^q dF(x)}{1 - F\left(\left(x^q - x_0^q\right)^{1/q}\right)} < \infty \tag{12}$$

$$\forall \varepsilon > 0\colon \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dF(x)}{1 - F(x - \varepsilon)} < \infty. \tag{13}$$

Тоді

$$\operatorname*{o\text{-}lim}_{n\to\infty} (Z_n - a_n \mathfrak{S} X) = 0 \quad \textit{м.н.} \tag{14}$$

Наслідок 1.2. *В умовах теореми 1.2 виконується асимптотичне співвідношення* (5).

Наслідок 1.3. *Якщо в умовах теореми 1.2 замінити умову* (12) *умовами:*

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x + \varepsilon)}{1 - F(x)} = 0 \tag{15}$$

та

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^q \, dF(x) < \infty, \tag{16}$$

то послідовність Z_n буде стійкою за ймовірністю, тобто

$$\|Z_n - a_n \mathfrak{S} X\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{17}$$

2. Доведення теореми 1.1

Спочатку наведемо кілька допоміжних результатів в $\mathbb{R}^1$.

Лема 2.1. *Нехай $\psi(s)$ повільно зростаюча функція на нескінченності в сенсі Карамати, $a_n = \psi(n)$, $a_1 > 0$. Тоді при $m \to \infty$*

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} \sim \frac{m}{a_m}. \tag{18}$$

Лема 2.1 безпосередньо випливає із теореми Карамати ([7, т. 2, с. 322, теорема 1]): при $y \to \infty$

$$\int_1^y \frac{dx}{\psi(x)} \sim \frac{y}{\psi(y)}.$$

Дійсно, оскільки

$$\frac{1}{\psi(n+1)} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\psi(x)} \le \frac{1}{\psi(n)},$$

то звідси негайно отримуєм (18).

Лема 2.2. *Нехай ξ невід'ємна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$, (ξ_i) незалежні копії ξ, (α_n) — неспадна числова послідовність така, що $\alpha_n \uparrow \infty$ і $\alpha_n > 0$ і нехай*

$$\lambda(t) = \sum_{\alpha_n < t} \frac{1}{\alpha_n}.$$

Тоді $\forall t_0$, $0 < t_0 < \infty$,

$$\mathsf{E} \sup_{n\ge 1} \frac{\xi_n}{\alpha_n} \le t_0 + \int_{\alpha_1 t_0}^{\infty} \lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)(1 - F(t))\, dt \tag{19}$$

і для $m = \operatorname{med}(\sup_{n\ge 1} \xi_n/\alpha_n)$

$$\mathsf{E} \sup_{n\ge 1} \frac{\xi_n}{\alpha_n} \le \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1 m}^{\infty} \lambda\left(\frac{t}{m}\right)(1 - F(t))\, dt. \tag{20}$$

Лема 2.2 установлена в роботі [8].

Лема 2.3. *Нехай ξ невід'ємна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$, (ξ_i) незалежні копії ξ. Тоді умова (7) еквівалентна нерівності: $\forall q$, $1 \le q < \infty$*

$$\mathsf{E} \sup_{n\ge 1} \left|\frac{\xi_n}{a_n}\right|^q < \infty, \tag{21}$$

де a_n визначається рівністю (6).

Доведення леми 2.3. Спочатку покажемо, що (7) $\Rightarrow$ (21). Покладемо

$$\lambda_q(t) = \sum_{a_n^q < t} \frac{1}{a_n^q}, \qquad \mathbf{M}_q = \mathsf{E} \sup_{n\ge 1} \left|\frac{\xi_n}{a_n}\right|^q$$

і застосуємо оцінку (19) леми 2.2 при $a_1 = 1$, $1 < t_0 < \infty$. Маємо

$$\mathbf{M}_q \le t_0 + \int_{t_0}^{\infty} \lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)\left(1 - F\big(t^{1/q}\big)\right) dt. \tag{22}$$

Ясно, що вірні імплікації

$$a_n^q \le t \quad \Leftrightarrow \quad F(a_n) \le F(t^{1/q}) \quad \Leftrightarrow \quad n \le \frac{1}{1 - F(t^{1/q})}.$$

Тоді, оскільки a_n^q повільно зростає на нескінченності, за лемою 2.1 при

$$m = \left[\frac{1}{1 - F(t^{1/q})}\right] \quad \text{і} \quad t \to \infty$$

$$\lambda_q(t) \sim \frac{m}{a_m^q} \sim \frac{1}{t(1 - F(t^{1/q}))}. \tag{23}$$

Із (22), (23) випливає, що $\mathbf{M}_q$ буде скінченною величиною, коли при деякому $1 < t_0 < \infty$ обмежений інтеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1 - F\big(t^{1/q}\big)}{t\left[1 - F((t/t_0)^{1/q})\right]}\, dt = \begin{bmatrix} t^{1/q} = x \\ t_0^{1/q} = x_0 \end{bmatrix} = q\int_{x_0}^{\infty} \frac{1 - F(x)}{x(1 - F(x/x_0))}\, dx < \infty, \tag{24}$$

що еквівалентно умові (7).

Встановимо обернену імплікацію (21) $\Rightarrow$ (7). Вибираємо

$$t_0 = m = \operatorname{med}\left(\sup_{n\ge 1} \left|\frac{\xi_n}{a_n}\right|^q\right)$$

і скористаємось оцінкою (20) леми 2.2

$$\infty > \mathbf{M}_q \ge \frac{t_o}{2} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \lambda_q\left(\frac{t}{t_0}\right)\left(1 - F\big(t^{1/q}\big)\right) dt.$$

Із асимптотичного співвідношення (23) випливає, що обмеженість останнього інтегралу еквівалентна обмеженості інтегралів із рівності (24) тобто (7) установлено. $\square$

Доведення теореми 1.1. Нагадаємо, що $z_n = \max_{1\le i\le n} \xi_i$, (ξ_i) незалежні копії в.в. ξ, (a_n) задана рівністю (6). Відомо, що при умові (8) виконується (1) (див. [3, с. 205–207, теорема 4.4.4], де установлено еквівалентність (1) і (8)).

Звідси зрозуміло, що $\forall t \in T$

$$\frac{\widetilde{Z}_n(t)}{a_n} \to 1 \quad \text{м.н.},$$

де $\widetilde{Z}_n(t) = \max_{1\le i\le n} \widetilde{X}_n(t)$. А отже $\forall t \in T$

$$\frac{Z_n(t)}{a_n} \to \sigma(t) \quad \text{м.н.} \tag{25}$$

Тому за теоремою Фубіні

$$\mathsf{P}\left(\frac{Z_n(t)}{a_n} \to \sigma(t) \text{ майже скрізь на } T\right) = 1 \tag{26}$$

Далі установимо, що існує в.е. $Z \in B$ такий, що для всіх $n \ge 1$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{Z_n(t)}{a_n}\right| \le Z(t) \text{ майже скрізь на } T\right) = 1. \tag{27}$$

Елементарні міркування показують, що для $n \ge 1$

$$\frac{(Z_n)_+}{a_n} \le \sup_{n\ge 1} \frac{(X_n)_+}{a_n}, \qquad \frac{(Z_n)_-}{a_n} \le |X_1|, \tag{28}$$

А отже

$$\sup_{n\ge 1}\left|\frac{Z_n}{a_n}\right| \le V + |X_1|,$$

де

$$V := \sup_{n\ge 1} \frac{(X_n)_+}{a_n}.$$

Остання нерівність приводить до оцінки (27) при $Z = V + |X_1|$, якщо ми установимо, що

$$\mathsf{E}\left\|\sup_{n\ge 1} \frac{(X_n)_+}{a_n}\right\|^q < \infty. \tag{29}$$

Із (28), (29) безпосередньо випливає нерівність (10) теореми 1.1.

Щоб вивести оцінку (29) скористаємось відомою нерівністю [4]: для будь якого в.е. Y із значеннями у q-вгнутому БІП B $1 \le q < \infty$

$$(\mathsf{E}\,\|Y\|^q)^{1/q} \le D_q \left\|(\mathsf{E}\,|Y(\cdot)|^q)^{1/q}\right\|$$

$D_q = D_q(B)$ — константа q-вгнутості.

Маємо

$$(\mathsf{E}\,\|V\|^q)^{1/q} \le D_q \left\|(\mathsf{E}\,|V(\cdot)|^q)^{1/q}\right\| \le D_q \|\mathfrak{S}X\| \left(\mathsf{E}\sup_{n\ge 1}\left|\frac{(\widetilde{X}_n(t))_+}{a_n}\right|^q\right)^{1/q} < \infty. \tag{30}$$

Скінченність величини

$$\mathsf{E}\sup_{n\ge 1}\left(\frac{(\widetilde{X}_n(t))_+}{a_n}\right)^q$$

— це наслідок умови (7) та леми 2.3.

Рівності (26), (27) забезпечують порядкову збіжність (Z_n/a_n) у БІП, тобто рівність (9) у теоремі 1.1 ([5, с. 368]). $\square$

Зауваження 2.1. q-вгнута, $q < \infty$, банахова гратка буде σ-повною і σ-порядково неперервною ([6, с. 83]). Окрім того ясно, що така гратка не містить підпросторів ізоморфних l_∞. Тому q-вгнутий БІП має порядково неперервну норму ([5, с. 383]). У такому просторі виконується імплікація

$$\operatorname*{o\text{-}lim}_{n\to\infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Отже, наслідки 1.1, 1.2 безпосередньо виливають із теорем 1.1, 1.2 відповідно.

3. Доведення теореми 1.2

Далі нам буде потрібна одна елементарна лема. Нам не вдалося знайти в літературі подібної оцінки.

Лема 3.1. *Нехай $x > 0$, $y > 0$. Тоді при $q \ge 1$*

$$|x - y|^q \le |x^q - y^q|. \tag{31}$$

Доведення леми 3.1. Досить розглянути випадок $q > 1$. Нехай

$$y \ge x > 0, \qquad 0 < z = \frac{x}{y} \le 1.$$

Ясно, що нерівність (31) еквівалентна такій

$$|1 - z|^q \le 1 - z^q. \tag{32}$$

Покладемо

$$f(z) = 1 - z^q - (1 - z)^q, \qquad 0 \le z \le 1.$$

Тоді матимемо

$$f'(z) = -qz^{q-1} + q(1 - z)^{q-1} = \begin{cases} 0, & z = \frac{1}{2}, \\ > 0, & 0 \le z < \frac{1}{2}, \\ < 0, & \frac{1}{2} < z \le 1. \end{cases}$$

Таким чином функція $f(z)$ зростає на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$ і спадає на $(\frac{1}{2}, 1)$. Окрім того $f(0) = f(1) = 0$. Звідси зрозуміло, що $f(z) \ge 0$ при $z \in (0, 1)$, тобто нерівність (32) установлена. $\square$

Основний момент доведення теореми, пов'язаний з наступною лемою.

Лема 3.2. *Нехай ξ в.в. з функцією розподілу $F(x)$, (ξ_i) незалежні копії ξ. Послідовність a_n визначена рівністю* (6), $z_n = \max_{1\le i\le n} \xi_i$. *Якщо виконуються умови* (12), (13), *то*

$$\mathsf{E} \sup_{n\ge1} |z_n - a_n|^q < \infty. \tag{33}$$

Доведення леми 3.2. 1-й крок. Випадок $q = 1$. Очевидно, що майже напевно

$$\sup_{n\ge1} |z_n - a_n| \le \max\left(\sup_{n\ge1} (z_n - a_n)_+, \sup_{n\ge1} (a_n - z_n)_+ \right)$$

Таким чином досить установити оцінки

$$\mathsf{E} \sup_{n\ge1} (z_n - a_n)_+ < \infty. \tag{34}$$

$$\mathsf{E} \sup_{n\ge1} (a_n - z_n)_+ < \infty. \tag{35}$$

Спочатку розглянемо оцінку (34). За означеняям a_n не спадна послідовність. Тоді зрозуміло, що м.н.

$$\sup_{n\geq 1}(z_n - a_n)_+ \leq \sup_{n\geq 1}(\xi_n - a_n)_+$$

і (34) буде випливати із нерівності

$$\mathsf{E}\sup_{n\geq 1}(\xi_n - a_n)_+ < \infty.$$

Звідси ясно, що досить показати обмеженість інтегралу

$$\int_1^\infty \mathsf{P}\left(\sup_{n\geq 1}(\xi_n - a_n) > x\right) dx < \infty \tag{36}$$

(див. [7, с. 178]).

Оцінимо зверху підінтегральний вираз в (36)

$$\mathsf{P}\left(\sup_{n\geq 1}(\xi_n - a_n) > x\right) \leq \sum_{n\geq 1}\mathsf{P}(\xi_n > x + a_n) = \sum_{n\geq 1}(1 - F(x + a_n)).$$

Нагадаємо, що $a_n = \varphi(n)$, $n \geq 1$, де $\varphi(y)$ визначена в рівності (6), і

$$1 - F(x + a_n) \leq \int_{n-1}^{n}(1 - F(x + \varphi(y)))\, dy.$$

Таким чином

$$\sum_{n\geq 1}(1 - F(x + a_n)) \leq \int_0^\infty (1 - F(x + \varphi(y)))\, dy = \int_0^\infty \left(\int_{x+\varphi(y)}^\infty dF(z)\right) dy$$
$$= \int_{x+1}^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{1-F(z-x)}} dy\right) dF(z) \leq \int_{x+1}^\infty \frac{dF(z)}{1 - F(z-x)}.$$

Остання оцінка та умова (12) дозволяють оцінити інтеграл (36)

$$\int_1^\infty \left(\int_{x+1}^\infty \frac{dF(z)}{1 - F(z-x)}\right) dx = \int_2^\infty dF(z)\int_1^{z-1}\frac{1}{1 - F(z-x)}\, dx$$
$$\leq C\int_2^\infty \frac{z\, dF(z)}{1 - F(z-1)} < \infty.$$

Тобто нерівність (34) установлена. Покажемо справедливість оцінки (35).

Як відомо ([2]), при виконанні умови (13)

$$\lim_{n\to\infty}(z_n - a_n) = 0 \quad \text{м.н.}$$

Тому для будь-якого $x > 0$

$$\left\{\sup_{n\geq 1}(a_n - z_n) > x\right\} \subset \bigcup_{n\geq 1}\{a_n - z_n > x, a_{n+1} - z_{n+1} < x\},$$

а враховуючи, що a_n монотонно зростаюча послідовність, отримаємо

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\sup_{n\geq 1}(a_n - z_n) > x\right) &\leq \sum_{n\geq 1}\mathsf{P}(z_n < a_n - x, \xi_{n+1} > a_{n+1} - x)\\ &\leq \sum_{n\geq 1}F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x)).\end{aligned} \tag{37}$$

Для цього, так само, як і у випадку нерівності (34), перевіримо обмеженість інтегралу

$$I(x_0) = \int_{x_0}^\infty \mathsf{P}\left(\sup_{n\geq 1}(a_n - z_n) > x\right) dx$$

при деякому x_0, $1 < x_0 < \infty$:

$$I(x_0) \le \int_{x_0}^{\infty} \left[\sum_{n\ge 1} F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x)) \right] dx$$
$$= \sum_{n\ge 1} \int_{x_0}^{\infty} F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x))\, dx \tag{38}$$
$$= \sum_{n\ge 1} \int_{-\infty}^{a_n - x_0} F^n(y)(1 - F(y))\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n\ge m} F^n(y)(1 - F(y)) \right] dy$$

де

$$m = \left[\frac{1}{1 - F(x_0 + y)} \right].$$

Нерівність $a_n - x_0 \ge y$ в силу рівності $1 - \frac{1}{n} = F(a_n)$ еквівалентна такій

$$n \ge \frac{1}{1 - F(x_0 + y)}.$$

Виберемо y_0 таке, що $0 < F(y_0) < 1$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{y_0} \sum_{n\ge m} F^n(y)(1 - F(y))\, dy \le \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1 - F(y)}{1 - F(y_0)}\, dy$$
$$\le \frac{1}{1 - F(y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, dF(y) < \infty. \tag{39}$$

Далі

$$\int_{y_0}^{\infty} \sum_{n\ge m} F^n(y)(1 - F(y))\, dy = \int_{y_0}^{\infty} (F(y))^{m+1}\, dy \le \int_{y_0}^{\infty} (F(y))^{\frac{1}{1 - F(x_0 + y)}}\, dy. \tag{40}$$

Покладемо $\overline{F}(y) = 1 - F(y)$. Скориставшись елементарними оцінками

$$(1 - x)^{1/x} \le \exp(-1) \quad \text{та} \quad \exp(-x) < \frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$

запишемо останній інтеграл в (40) так

$$\int_{y_0}^{\infty} \left((1 - \overline{F}(y))^{\frac{1}{\overline{F}(y)}} \right)^{\frac{1 - F(y)}{1 - F(x_0 + y)}} dy \le \int_{y_0}^{\infty} \frac{1 - F(x_0 + y)}{1 - F(y)}\, dy$$
$$\le C \int_{t_0}^{\infty} \frac{1 - F(t)}{1 - F(t - x_0)}\, dt \tag{41}$$

де $t_0 = x_0 + y_0$.

Залишається помітити, що інтеграл в умові (12) при $q = 1$ можна зобразити у такому вигляді:

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{y\, dF(y)}{1 - F(y - y_0)} = - \frac{y(1 - F(y))}{1 - F(y - y_0)} \Bigg|_{y_0}^{\infty} + \int_{y_0}^{\infty} \frac{(1 - F(y))}{1 - F(y - y_0)}\, dy$$
$$+ \int_{y_0}^{\infty} \frac{y(1 - F(y))}{(1 - F(y - y_0))^2}\, dF(y - y_0). \tag{42}$$

Ясно, що перший доданок справа обмежений, а другий еквівалентний інтегралу (41).

Таким чином установлено, що обмеженість інтегралу (12) достатня для справедливості оцінки (35) при $q = 1$.

2-й крок. Нехай $q > 1$. Припустимо спочатку, що $\forall k \ge 1$, $\xi_k \ge 0$ м.н.. За лемою 3.1

$$\sup_{n\ge 1} |z_n - a_n|^q \le \sup_{n\ge 1} |z_n^q - a_n^q|\,. \tag{43}$$

Покладемо

$$\xi_k^* = \xi_k^q, \qquad a_n^* = a_n^q, \qquad z_n^* = \max_{1\le k\le n} \xi_k^*,$$

$$F^*(x) = \mathsf{P}(\xi_k^* < x) = F\big(x^{1/q}\big).$$

Із наведених вище міркувань (1-й крок, $q = 1$) маємо

$$\mathsf{E}\sup_{n\ge1} |z_n^* - a_n^*| = \mathsf{E}\sup_{n\ge1} |z_n^q - a_n^q| < \infty,$$

якщо при деякому $y_0 > 0$

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{y\,dF^*(y)}{1-F^*(y-y_0)} = \int_{y_0}^{\infty} \frac{y\,dF(y^{1/q})}{1-F((y-y_0)^{1/q})} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{t^q\,dF(t)}{1-F\left(\left(t^q-t_0^q\right)^{1/q}\right)} < \infty, \quad (44)$$

де $t_0 = y_0^{1/q}$. Звідси та оцінок (12), (43) негайно випливає (35).

Нехай тепер ξ_k довільні в.в. в умовах теореми 1.2. Із відомих елементарних нерівностей отримаємо

$$\sup_{n\ge1} |z_n - a_n|^q = \sup_{n\ge1} |(z_n)_+ - (z_n)_- - a_n|^q \le 2^{q-1}\left(\sup_{n\ge1} |(z_n)_+ - a_n|^q + \sup_{n\ge1} |(z_n)_-|^q\right). \quad (45)$$

Зрозуміло, що

$$(z_n)_+ = \max_{1\le k\le n} (\xi_k)_+, \quad (46)$$

а

$$(z_n)_- \le |\xi_1|. \quad (47)$$

Із означення a_n ясно, що при переході від в.в. (ξ_n) до в.в. $((\xi_n)_+)$ послідовність a_n не змінюється.

Тому із наведеного вище та (46)–(47) одержимо

$$\mathsf{E}\sup_{n\ge1} |(z_n)_-|^q < \infty, \qquad \mathsf{E}\sup_{n\ge1} |(z_n)_+ - a_n|^q < \infty.$$

Ці оцінки разом з нерівністю (45) і завершують доведення леми 3.2. □

Доведення теореми 1.2. Тепер довести теорему 1.2 вже неважко. Слід лише повторити міркування із доведення теореми 1.1. При цьому замість співвідношень (26) і (27) будемо мати відповідно:

$$\mathsf{P}\left(Z_n(t) - a_n\sigma(t) \to 0 \text{ майже скрізь на } T\right) = 1 \quad (48)$$

та

$$\mathsf{P}\left(|Z_n(t) - a_n\sigma(t)| \le Z(t) \text{ майже скрізь на } T\right) = 1, \quad (49)$$

де $Z(t) = \sigma(t)\sup_{n\ge1} |\widetilde{Z}_n(t) - a_n|$.

Рівність (48) випливає із результатів [2] та теореми Фубіні.

Обмеженість величини $\mathsf{E}\,\|Z_n\|^q$ виводиться із q-вгнутості БІП та оцінки (33) леми 2.3. □

Доведення наслідку 1.3 також фактично міститься в доведенні теореми 1.1. Дійсно, за умовою (15) маємо: при $n \to \infty$

$$z_n - a_n \xrightarrow{P} 0,$$

(див. [1], [3]). Останнє співвідношення та нерівність (16) забезпечують також і збіжність моментів [9]:

$$\mathsf{E}\,|z_n - a_n|^q \to 0, \qquad n \to \infty$$

А звідси, так само як і у теоремі 1.1, одержуємо

$$\mathsf{E}\,\|Z_n - a_n\mathfrak{S}X\|^q \to 0.$$

Приклади. 1. Елементарні обчислення показують, що функція розподілу

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\ln^\alpha x), & \text{при } x > 1, \\ 0, & \text{при } x \le 1, \end{cases}$$

задовольняє умови (7), (8) при $\alpha > 1$. При $\alpha = 1$ ці умови не виконуються. Відзначимо, що умова (11) не виконується для $F_1(x)$ при $\alpha = 2$ і $q = 1$.

2. Функція розподілу

$$F_2(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^\alpha), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \le 0, \end{cases}$$

задовольняє умови (12), (13) при $\alpha > q$. При $\alpha = q$ умова (12) не виконується.

Література

1. B. V. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire*, Ann. Math. **44** (1943), no. 3, 423–453.
2. O. Barndorff-Nielsen, *On the limit behaviour of extreme order statistics*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), no. 3, 992–1002.
3. Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, "Наука", Москва, 1984.
4. І. К. Мацак, А. М. Плічко, *Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці*, Теорія ймовір. та матем. статист. **61** (1999), 105–116.
5. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, "Наука", Москва, 1984.
6. J. Lindenstraus and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Springer, Berlin e.a., 1979.
7. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, "Мир", Москва, 1984.
8. І. К. Мацак, *Оцінки моментів супремума нормованих сум незалежних випадкових величин*, Теорія ймовір. та матем. статист **67** (2002), 104–116.
9. J. Pickands, *Moment convergence of sample extremes*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), no. 3, 881–889.

Кафедра дослідження операцій, факультет кібернетики, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 2, корп.6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: k_m_s_kirovograd@mail.ru

Кафедра дослідження операцій, факультет кібернетики, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 2, корп.6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: ivanmatsak@gmail.com

Надійшла 19/05/2011