СУБГАУССІВСЬКА НОРМА БІНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

УДК 519.21

$\boxed{\text{В. В. БУЛДИГІН}}$ І К. К. МОСКВИЧОВА

Анотація. В роботі знайдені точні значення субгауссівських норм бернуллівських та бінарних випадкових величин. За допомогою цих норм встанолені експоненціальні оцінки для розподілів сум (як залежних так і незалежних) центрованих бінарних випадкових величин, зокрема бернуллівських випадкових величин, які доповнюють та уточнюють відомі нерівності.

Abstract. The sharp values for subgaussian norms of two-valued random variables are founded. The exponential bounds for the distributions of sums of independent two-valued random variables are studied.

1. Вступ

Роботу присвячено знаходженню точних значень субгауссівських норм центрованих бернуллівських та бінарних випадкових величин. Випадкові величини, які зустрічаються нижче, задані на загальному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$.

Випадкову величину ξ називають *субгауссівською*, якщо знайдеться таке число $a \in [0, \infty)$, що для всіх $\lambda \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Відповідно, величину

$$\tau(\xi) = \inf\left\{a \ge 0\colon\ \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}, \lambda \in \mathbf{R}\right\}$$

називають *субгауссівським стандартом* випадкової величини ξ. Випадкова величина ξ є субгауссівською тоді і тільки тоді, коли $\tau(\xi) < \infty$. При цьому

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{\tau^2(\xi)\lambda^2}{2}\right\}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Субгауссівські випадкові величини були впроваджені Ж. П. Каханом [16]. Властивості та застосування цих випадкових величин розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [16, 17, 8, 1, 2, 9, 3, 7, 13, 4]).

Субгауссівські випадкові величини ξ є центрованими ($\mathsf{E}\,\xi = 0$), $\mathsf{E}\,\xi^2 \le \tau^2(\xi)$, а субгауссівський стандарт $\tau(\xi)$ є нормою (*субгауссівською нормою*), відносно якої простір усіх субгауссівських випадкових величин $Sub\,(\Omega)$ є банаховим, [1, 2, 3]. Якщо $\tau^2(\xi) = \mathsf{E}\,\xi^2$, то випадкову величину ξ *називають строго субгауссівською.*

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50, 65B10, 60G15; Secondary 40A05.

Ключові слова і фрази. Субгауссівська випадкова величина, субгауссівська норма, експоненціальні нерівності, суми випадкових величин, нерівність Бернштейна, нерівність Хефдінга.

Важливою властивістю *субгауссівської норми* є те, що для норми суми незалежних субгауссівських випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ справджується нерівність

$$\tau^2\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) \le \sum_{j=1}^n \tau^2(\xi_j). \tag{1}$$

Для розподілів субгауссівських випадкових величин виконуються експоненціальні нерівності, [16, 17, 2, 3, 9]. Якщо $\xi \in \mathrm{Sub}\,(\Omega)$, то для всіх $x > 0$

$$\mathsf{P}\{\xi \ge x\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}, \qquad \mathsf{P}\{\xi \le -x\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}, \tag{2}$$
$$\mathsf{P}\{|\xi| \ge x\} \le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}.$$

Тут і далі вважаємо, що $\exp\left\{-\frac{1}{0}\right\} = 0$.

Будь-яка центрована гауссівська випадкова величина є субгауссівською та квадрат її субгауссівської норми збігається з дисперсією. Відомо (див. [9, 3]), що за умови $\mathsf{P}\{|\xi| \le c\} = 1$, де $c > 0$, центрована випадкова величина ξ є субгауссівською і $\tau(\xi) \le c$. Але загалом точні значення субгауссівських норм мало відомі, а їх знаходження може бути складною задачею.

У розділі 2 цієї роботі знайдено субгауссівську норму центрованої бернуллівської випадкової величини, а в розділі 3 знайдено субгауссівську норму центрованої бінарної випадкової величини, тобто випадкової величини яка приймає лише два значення. Завдяки цьому в розділі 4 встановлено точні значення субгауссівських характеристик емпіричних функцій розподілу, а у розділі 5 встановлено експоненціальні нерівності для розподілів сум (як залежних так і незалежних) бінарних випадкових величин. Експоненціальні нерівності для розподілів сум бернуллівських випадкових величин розглядаються в розділі 6. Для сум бернуллівських та бінарних випадкових величин одержані нерівності в деяких випадках уточнюють нерівності Бернштейна [5] та Хефдінга [14]. У розділі 7 встановлено умови, за яких суми нескінченних рядів центрованих бінарних випадкових величин є субгауссівськими.

2. **Основна теорема**

Нехай $\beta(p)$ — *бернуллівська випадкова величина*, тобто випадкова величина, яка приймає значення 1 та 0 з імовірностями $p \in [0,1]$ та $q = 1 - p$, відповідно. Разом з $\beta(p)$ будемо розглядати *центровану бернуллівську випадкову величину з параметром* p:

$$\beta^{(0)}(p) = \beta(p) - \mathsf{E}\,\beta(p) = \beta(p) - p,$$

яка приймає значення q та $(-p)$ з імовірностями p та q, відповідно. У наступній теоремі встановлюється субгауссівська норма випадкової величини $\beta^{(0)}(p)$.

Теорема 2.1. *Нехай $\beta^{(0)}(p)$ — центрована бернуллівська випадкова величина з параметром $p \in [0,1]$. Тоді*

$$\tau^2(\beta^{(0)}(p)) = K(p), \tag{3}$$

де

$$K(p) = \begin{cases} 0, & p \in \{0,1\}; \\ 1/4, & p = 1/2; \\ \frac{p-q}{2(\ln p - \ln q)}, & p \in (0,1) \setminus \{1/2\}. \end{cases} \tag{4}$$

Перш ніж доводити теорему 2.1 розглянемо деякі властивості функції K, означеної в цій теоремі.

Лема 2.1. *Для функції K виконуються наступні властивості:*

(K1) *K симетрична відносно $p = 1/2$ і додатна на інтервалі $(0, 1)$;*

(K2) *K неперервна на відрізку $[0, 1]$;*

(K3) *K зростає на інтервалі $[0, 1/2]$ і спадає на інтервалі $[1/2, 1]$;*

(K4)
$$\max_{p\in[0,1]} K(p) = K(1/2) = 1/4; \tag{5}$$

(K5) *K опукла догори на відрізку $[0, 1]$;*

(K6) *для будь-якого $p \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$*
$$\frac{|p-q|}{|\ln(p\wedge q)|} = \frac{|p-q|}{\ln\left(\frac{1}{p\wedge q}\right)} < 2K(p) = \frac{|p-q|}{\ln\left(\frac{1}{p\wedge q}-1\right)} \tag{6}$$
$$< \frac{|p-q|}{|\ln(2p\wedge 2q)|} = \frac{|p-q|}{|\ln(p\wedge q)|-\ln 2} < \frac{1}{|\ln(p\wedge q)|-\ln 2},$$
де $p \wedge q = \min\{p, q\}$;

(K7)
$$\lim_{p\downarrow 0} K(p)|\ln p\,| = \lim_{p\uparrow 1} K(p)|\ln(1-p)\,| = 1/2, \tag{7}$$
тобто $K(p) \sim 1/|2\ln p\,|$, якщо $p \downarrow 0$, і $K(p) \sim 1/|2\ln(1-p)\,|$, якщо $p \uparrow 1$;

(K8) *для будь-якого $p \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$*
$$K(p) = \frac{q-p}{2H'(p)}, \tag{8}$$
де
$$H(p) = -p\ln p - q\ln q$$
— ентропія бернуллівської випадкової величини $\beta(p)$ і $H'(p\,)$ — похідна функції $H(p\,)$.

Доведення. Оскільки $K(p) = K(1-p)$ для будь-якого $p \in [0, 1]$, то K симетрична відносно $p = 1/2$ на відрізку $[0, 1]$. Крім того, якщо $p \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$, то
$$K(p) = \frac{|p-1/2|}{\ln(1/2+|p-1/2|)-\ln(1/2-|p-1/2|)}.$$

Додатність функції K на інтервалі $(0, 1)$ випливає з (4).

З означення функції K випливає, що для перевірки її неперервності на відрізку $[0, 1]$ треба довести її неперервність лише в точках $p = 0$, $p = 1$ і $p = 1/2$. Оскільки
$$\lim_{p\downarrow\frac12} K(p) = \lim_{p\downarrow\frac12}\frac{|p-1/2|}{\ln(1/2+|p-1/2|)-\ln(1/2-|p-1/2|)} = 1/4,$$
$$\lim_{p\uparrow\frac12} K(p) = \lim_{p\uparrow\frac12}\frac{|p-1/2|}{\ln(1/2+|p-1/2|)-\ln(1/2-|p-1/2|)} = 1/4$$
і $K(1/2) = 1/4$, то K неперервна в точці $p = 1/2$. Функція K неперервна також у точках $p = 0$ і $p = 1$, оскільки
$$\lim_{p\downarrow 0} K(p) = \lim_{p\downarrow 0}\frac{|p-1/2|}{\ln(1/2+|p-1/2|)-\ln(1/2-|p-1/2|)} = 0,$$
$$\lim_{p\uparrow 1} K(p) = \lim_{p\uparrow 1}\frac{|p-1/2|}{\ln(1/2+|p-1/2|)-\ln(1/2-|p-1/2|)} = 0$$
і $K(0) = K(1) = 0$. Таким чином, неперервність функції K на відрізку $[0, 1]$ доведено.

Далі, за нерівністю Коші–Буняковського
$$\ln p - \ln q = \int_q^p \frac{du}{u} \le \sqrt{(p-q)\int_q^p \frac{du}{u^2}} = \frac{p-q}{\sqrt{pq}}.$$

Тому для будь-якого $p \in (0,1) \setminus \{1/2\}$

$$K(p) \geq \frac{\sqrt{pq}}{2} > pq. \tag{9}$$

На множині $(0,1) \setminus \{1/2\}$ похідна функція K має вигляд

$$K'(p) = \frac{pq - K(p)}{pq\,(\ln p - \ln q)}.$$

Звідси та з (9) випливає, що $K'(p) < 0$ для всіх $p \in (1/2, 1)$ і $K'(p) > 0$ для всіх $p \in (0, 1/2)$. Тому функція K спадає на проміжку $(1/2, 1]$ і зростає на проміжку $[0, 1/2)$. Таким чином, виконується (K3), оскільки функція K неперервна на $[0,1]$. Звідси, враховуючи (4), дістаємо (5) і, крім того, нерівність

$$K(p) < 1/4, \qquad p \neq 1/2. \tag{10}$$

На множині $(0,1) \setminus \{1/2\}$ друга похідна функція K має вигляд

$$K''(p) = \frac{2\left(K(p) - \frac{1}{4}\right)}{p^2q^2\,(\ln p - \ln q)^4}.$$

Тому, згідно з (10),

$$K''(p) < 0, \qquad p \in (0,1) \setminus \{1/2\}.$$

Отже, неперервна функція K опукла догори на проміжках $(0, 1/2)$ та $(1/2, 1)$ і тому вона опукла догори на відрізку $[0,1]$.

При $p \in (0, 1/2)$

$$\frac{|p-q|}{|\ln p|} = \frac{|p-q|}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} < 2K(p) = \frac{|p-q|}{\ln\left(\frac{1}{p} - 1\right)} < \frac{|p-q|}{\ln\left(\frac{1}{2p}\right)} < \frac{|p-q|}{|\ln p| - \ln 2} < \frac{1}{|\ln p| - \ln 2},$$

звідки випливає (6). У свою чергу співвідношення (7) випливає з (6). Нарешті, оскільки $H'(p) = \ln q - \ln p$, для будь-кого $p \in (0,1)$, то (8) випливає з (4). □

Перейдемо до доведення теореми 2.1.

Доведення. Для будь-якого $p \in [0,1]$ випадкова величина $\beta^{(0)}(p)$ є центрованою та обмеженою, звідки випливає, що $\beta^{(0)}(p) \in Sub(\Omega)$ (див. [9, 3]).

Якщо $p = 0$ або $p = 1$, то $\beta^{(0)}(p) = 0$ майже напевно, тобто $\tau(\beta^{(0)}(p)) = 0$, що тягне (3). Якщо $p = 1/2$, то добре відомо, що $\tau^2\left(\beta^{(0)}(1/2)\right) = 1/4$ (див., наприклад, [16, 17, 3]). Тому при $p = 1/2$ виконується (3).

Нам залишилось довести рівність (3) при $p \in (0,1) \setminus \{1/2\}$. Оскільки для будь-якої субгауссівської випадкової величини ξ

$$\tau^2(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\ln \mathsf{E}\, e^{\lambda \xi}}{\lambda^2},$$

то

$$\tau^2(\beta^{(0)}(p)) = \sup_{\lambda \neq 0} G_p(\lambda),$$

де

$$G_p(\lambda) = \frac{2\ln(pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})}{\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Отже, для доведення теореми потрібно показати, що

$$K(p) = \sup_{\lambda \neq 0} G_p(\lambda) \tag{11}$$

для будь-якого $p \in (0,1) \setminus \{1/2\}$.

Безпосередня перевірка показує, що

$$G_p\left(2\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right) = K(p), \qquad p \in (0,1) \setminus \{1/2\}.$$

Таким чином, достатньо показати, що для будь-яких $p \in (0,1)\setminus\{1/2\}$ і $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$

$$G_p(\lambda) \le K(p) \tag{12}$$

або, що рівносильно,

$$h_p(\lambda) \le 0, \tag{13}$$

де

$$h_p(\lambda) = \ln\left(pe^{\lambda} + q\right) - \lambda p - \frac{K(p)\cdot\lambda^2}{2}.$$

Для доведення нерівності (13) розглянемо похідні функції h_p та зупинимось на їхніх властивостях. Прості обчислення показують, що

$$h_p'(\lambda) = \frac{pe^{\lambda}}{pe^{\lambda}+q} - p - K(p)\cdot\lambda,$$

$$h_p''(\lambda) = \frac{qpe^{\lambda}}{\left(pe^{\lambda}+q\right)^2} - K(p) \quad \text{і} \quad h_p'''(\lambda) = \frac{qpe^{\lambda}\left(q-pe^{\lambda}\right)}{\left(pe^{\lambda}+q\right)^3}.$$

З останньої рівності випливає, що: $h_p'''(\lambda) = 0$, якщо $\lambda = \ln(q/p)$; $h_p'''(\lambda) > 0$, якщо $\lambda < \ln(q/p)$, і $h_p'''(\lambda) < 0$, якщо $\lambda > \ln(q/p)$. Отже:

(A) h_p'' зростає на проміжку $(-\infty, \ln(q/p))$;
(B) h_p'' спадає на проміжку $(\ln(q/p), \infty)$;
(C) h_p'' досягає максимуму, при $\lambda = \ln(q/p)$.

Крім того, з (9) та (10) випливають співвідношення

$$h_p''(2\ln(q/p)) = h_p''(0) = qp - K(p) < 0, \tag{14}$$

і

$$h_p''(\ln(q/p)) = \frac{1}{4} - K(p) > 0. \tag{15}$$

Аналіз поведінки функції h_p' почнемо з того, що

$$h_p'(0) = 0, \tag{16}$$

$$h_p'(\ln(q/p)) = 0 \tag{17}$$

і

$$h_p'(2\ln(q/p)) = 0. \tag{18}$$

Далі будемо розглядати окремо два випадки: $p \in (0,1/2)$ і $p \in (1/2,1)$.

Нехай $p \in (1/2,1)$. Тоді з співвідношень (14), (15), властивостей (A)–(C) і неперервності функції h_p'' випливає

(D) рівність $h_p'(\lambda) = 0$ можлива тільки в двох точках λ_1 і λ_2 таких, що

$$\lambda_1 \in (2\ln(q/p), \ln(q/p)) \quad \text{і} \quad \lambda_2 \in (\ln(q/p), 0).$$

З (A)–(D) випливають, наступні властивості функції h_p':

(E) h_p' зростає на проміжку $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$;
(F) h_p' спадає на проміжках $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ і $\lambda \in (\lambda_2, \infty)$;
(G) h_p' досягає мінімуму, при $\lambda = \lambda_1$;
(H) h_p' досягає максимуму, при $\lambda = \lambda_2$.

Тепер, враховуючи те, що

$$h_p\left(0\right) = 0 \tag{19}$$

і

$$h_p\left(2\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right) = 0, \tag{20}$$

проаналізуємо поведінку функції h_p на всій множині визначення.

З (18), (20) та (F) випливає

(I) $h_p\left(\lambda\right) < 0$ і h_p зростає на інтервалі $(-\infty, 2\ln(q/p))$.

У свою чергу, з (F) та рівностей (16) і (19) випливає

(II) $h_p\left(\lambda\right) < 0$ і h_p спадає на інтервалі $(0, \infty)$.

Крім того, з властивостей (E)–(G) та рівностей (17)–(18) випливає

(III) $h_p\left(\lambda\right) < 0$, при $\lambda \in (2\ln(q/p), \ln(q/p))$.

Нарешті, з властивостей (E), (F), (H) та з рівностей (16)–(17) випливає

(IV) $h_p\left(\lambda\right) < 0$, при $\lambda \in (\ln(q/p), 0)$.

Властивості (I)–(IV) показують, що на відрізку $[2\ln(q/p), 0]$ функція h_p має локальні максимуми, в точках $\lambda = 0$ і $\lambda = 2\ln(q/p)$ і — локальний мінімум в точці $\lambda = \ln(q/p)$. Тому функція h_p досягає максимального значення в точках $\lambda = 0$ і $\lambda = 2\ln(q/p)$. Звідси випливає, що для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ виконується нерівності (13) і (12). Отже, за умови $p \in (1/2, 1)$ число $K(p)$ є максимальним значенням функції G_p, тобто виконується рівність (11).

Нехай тепер $p \in (0, 1/2)$. З вище доведеного, враховуючи симетричність функції K відносно $p = 1/2$ і те, що

$$G_p(\lambda) = G_q(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

дістаємо рівність (11) при $p \in (0, 1/2)$.

Таким чином, теорему 2.1 доведено. □

3. Субгауссівська норма бінарної випадкової величини

Субгауссівська норма центрованої бернуллівської випадкової величини дозволяє знайти точне значення субгауссівської норми *центрованої бінарної випадкової величини.*

Теорема 3.1. *Нехай X — випадкова величина, яка приймає значення b та a, $b > a$, з імовірностями $p \in [0, 1]$ та $q = 1 - p$ відповідно. Тоді*

$$\tau^2(X - \mathsf{E}\,X) = (b-a)^2 K(p), \tag{21}$$

де K — функція, означена в (4).

Доведення. Оскільки

$$\mathsf{E}\,X = b \cdot p + a \cdot q = (b-a)p + a,$$

то

$$\mathsf{P}\{X - \mathsf{E}\,X = (b-a)q\} = p \quad \text{і} \quad \mathsf{P}\{X - \mathsf{E}\,X = -(b-a)p\} = q,$$

тобто

$$X - \mathsf{E}\,X = (b-a)\beta^{(0)}(p).$$

де $\beta^{(0)}(p)$ — центрована бернуллівська випадкова величина з параметром p. Тому

$$\tau\left(X - \mathsf{E}\,X\right) = (b-a)\tau(\beta^{(0)}(p)).$$

Звідси та з теореми 2.1 випливає (21). □

Зауваження 3.1. *Якщо X — випадкова величина з теореми* 3.1, *то* $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}\,X)^2 = (b-a)^2pq$. *Звідси та з співвідношень* (21) *і* (9) *випливає, що рівність*

$$\tau^2(X-\mathsf{E}\,X) = \mathsf{E}(X-\mathsf{E}\,X)^2$$

виконується лише тоді, коли $p=0$ *або* $p=1$ *або* $p=1/2$. *Отже, лише у цих трьох випадках центрована бінарна випадкова величина* $X-\mathsf{E}\,X$ *є строго субгауссівською. Крім того, співвідношення* (5) *і* (10) *показують, що* $\tau^2\,(X-\mathsf{E}\,X) \le (b-a)^2/4$ *і рівність досягається лише тоді, коли* $p=1/2$.

Нехай X_j, $j=1,\dots,n$, — випадкові бінарні величини, які приймають значення b_j і a_j, $b_j>a_j$, з імовірностями $p_j\in[0,1]$ і $q_j=1-p_j$, відповідно. Оскільки τ є нормою у просторі субгауссівських випадкових величин, то з теореми 3.1 випливає, що

$$\tau\biggl(\sum_{j=1}^n(X_j-\mathsf{E}\,X_j)\biggr) \le \sum_{j=1}^n\tau(X_j-\mathsf{E}\,X_j) = \sum_{j=1}^n(b_j-a_j)K^{\frac12}(p_j) \tag{22}$$

і

$$\tau^2\biggl(\sum_{j=1}^n(X_j-\mathsf{E}\,X_j)\biggr) \le \biggl(\sum_{j=1}^n(b_j-a_j)K^{\frac12}(p_j)\biggr)^2. \tag{23}$$

Тому для однаково розподілених X_j, $j=1,\dots,n$, які приймають значення b і a, $b>a$, з імовірностями $p\in[0,1]$ і $q=1-p$ відповідно, виконується нерівність

$$\tau^2\biggl(\sum_{j=1}^n(X_j-\mathsf{E}\,X_j)\biggr) \le n^2(b-a)^2K(p). \tag{24}$$

Якщо випадкові бінарні величини X_j, $j=1,\dots,n$, є незалежними, то нерівності (22)–(24) можна покращити. Дійсно, з нерівності (1) та теореми 3.1 випливає, що

$$\tau^2\biggl(\sum_{j=1}^n(X_j-\mathsf{E}\,X_j)\biggr) \le \sum_{j=1}^n\tau^2(X_j-\mathsf{E}\,X_j) = \sum_{j=1}^n(b_j-a_j)^2K(p_j). \tag{25}$$

Наступна лема показує, що для однаково розподілених субгауссівських випадкових величин у (1) досягається рівність.

Лема 3.1. *Нехай* $\xi_1,\dots,\xi_n$ — *незалежні субгауссівські випадкові величини, однаково розподілені з* ξ. *Тоді:*

$$\tau^2\biggl(\sum_{j=1}^n\xi_j\biggr) = \sum_{j=1}^n\tau^2(\xi_j) = n\tau^2(\xi), \tag{26}$$

$$\tau^2\biggl(\frac{1}{\sqrt n}\sum_{j=1}^n\xi_j\biggr) = \tau^2(\xi) \quad \text{і} \quad \tau^2\biggl(\frac1n\sum_{j=1}^n\xi_j\biggr) = \frac{\tau^2(\xi)}{n}. \tag{27}$$

Доведення. Якщо $S_n=\sum_{j=1}^n\xi_j$, то

$$\tau^2(S_n) = \sup_{\lambda\ne0}\frac{\ln\mathsf{E}\,e^{\lambda S_n}}{\lambda^2} = \sup_{\lambda\ne0}\frac{\ln\bigl(\mathsf{E}\,e^{\lambda\xi}\bigr)^n}{\lambda^2} = n\sup_{\lambda\ne0}\frac{\ln\mathsf{E}\,e^{\lambda\xi}}{\lambda^2} = n\tau^2(\xi),$$

і (26) доведено. Оскільки τ є нормою, то (27) випливає з (26). □

Зауваження 3.2. *Для незалежних субгауссівських випадкових величин* $\xi_1,\dots,\xi_n$, *рівність у лівій частині співвідношення* (26) *виконується, якщо знайдеться число* $\lambda_0\ne0$ *таке, що для всіх* $j=1,\dots,n$

$$\sup_{\lambda\ne0}\frac{\ln\mathsf{E}\,e^{\lambda\xi_j}}{\lambda^2} = \frac{\ln\mathsf{E}\,e^{\lambda_0\xi_j}}{\lambda_0^2},$$

або, якщо для всіх $j = 1, \dots, n$

$$\sup_{\lambda \neq 0} \frac{\ln \mathsf{E}\, e^{\lambda \xi_j}}{\lambda^2} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\ln \mathsf{E}\, e^{\lambda \xi_j}}{\lambda^2} = \mathsf{E}\, \xi_j^2.$$

Ці умови виконуються, якщо, наприклад, $\xi_1, \dots, \xi_n$*, мають однаковий розподіл, як у лемі* 3.1*, або є строго субгауссівськими.*

Розглянемо деякі наслідки теореми 3.1 та леми 3.1.

Наслідок 3.1. *Нехай* X_j, $j = 1, \dots, n$, *— незалежні однаково розподілені випадкові бінарні величини, які приймають значення* b *і* a, $b > a$, *з імовірностями* $p \in [0, 1]$ *і* $q = 1 - p$, *відповідно. Тоді:*

$$\tau^2\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathsf{E}\, X_j)\right) = n(b-a)^2 K(p),$$

$$\tau^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathsf{E}\, X_j)\right) = K(p) \quad i \quad \tau^2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathsf{E}\, X_j)\right) = \frac{K(p)}{n}.$$

Наслідок 3.2. *Нехай* $\beta_j(p)$, $j = 1, \dots, n$, *— незалежні однаково розподілені бернуллівські випадкові величини, з параметром* $p \in [0, 1]$. *Тоді:*

$$\tau^2\left(\sum_{j=1}^{n}(\beta_j(p) - p)\right) = nK(p),$$

$$\tau^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\beta_j(p) - p)\right) = K(p) \quad i \quad \tau^2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j(p) - p\right) = \frac{K(p)}{n}.$$

4. Субгауссівські характеристики емпіричних функцій розподілу

Нехай η_j, $j = 1, \dots, n$, — незалежні випадкові величини, однаково розподілені з η, яка має функцію розподілу $F(t) = \mathsf{P}\{\eta < t\}$, $t \in \mathbf{R}$. Центровану емпіричну функцію розподілу

$$\Upsilon_n(t) = \hat{F}_n(t) - F(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}\{\eta_j < t\} - F(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{1}\{\eta_j < t\} - F(t)\right)$$

будемо розглядати як випадковий процес за параметром $t \in \mathbf{R}$. Оскільки $\mathbf{1}\{\eta_j < t\}$ є бернуллівською випадковою величиною з параметром $p(t) = F(t)$ і при $s < t$ приріст $\mathbf{1}\{\eta_j < t\} - \mathbf{1}\{\eta_j < s\}$ також є бернуллівською випадковою величиною з параметром $p(t, s) = F(t) - F(s)$, то з наслідку 3.2 та твердження (K7) леми 2.1 випливає наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай* η_j, $j = 1, \dots, n$, *— незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцію розподілу* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}$. *Тоді*

$$\tau^2\left(\Upsilon_n(t)\right) = \frac{K(F(t))}{n}, \qquad \tau^2\left(\sqrt{n}\Upsilon_n(t)\right) = K(F(t))$$

і

$$\tau^2\left(\Upsilon_n(t) - \Upsilon_n(s)\right) = \frac{K\left(F(t) - F(s)\right)}{n},$$
$$\tau^2\left(\sqrt{n}\left(\Upsilon_n(t) - \Upsilon_n(s)\right)\right) = K\left(F(t) - F(s)\right).$$

Нехай η_j, $j = 1, \dots, n$, *— незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцію розподілу* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}$. *Тоді*

$$\tau^2\left(\Upsilon_n(t)\right) = \frac{K(F(t))}{n}, \qquad \tau^2\left(\sqrt{n}\Upsilon_n(t)\right) = K(F(t))$$

і

$$\tau^2\left(\Upsilon_n(t)-\Upsilon_n(s)\right)=\frac{K\left(F(t)-F(s)\right)}{n},$$

$$\tau^2\left(\sqrt{n}\left(\Upsilon_n(t)-\Upsilon_n(s)\right)\right)=K\left(F(t)-F(s)\right).$$

Якщо функція розподілу F неперервна, то для будь-якого $n\geq 1$ при $(t-s)\to 0$

$$\tau^2\left(\sqrt{n}\left(\Upsilon_n(t)-\Upsilon_n(s)\right)\right)\sim\frac{1}{2\ln(F(t)-F(s))}.$$

Зокрема, якщо $F(t)=t$, $t\in[0,1]$, тобто η_j, $j=1,\ldots,n$, — незалежні рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$ випадкові величини, то при $0\leq s<t\leq 1$

$$\tau^2\left(\Upsilon_n(t)\right)=\frac{K(t)}{n},\qquad \tau^2\left(\sqrt{n}\Upsilon_n(t)\right)=K(t),$$

$$\tau^2\left(\Upsilon_n(t)-\Upsilon_n(s)\right)=\frac{K(t-s)}{n},\qquad \tau^2\left(\sqrt{n}\left(\Upsilon_n(t)-\Upsilon_n(s)\right)\right)=K(t-s)$$

і для будь-якого $n\geq 1$ при $(t-s)\to 0$

$$\tau^2\left(\sqrt{n}\left(\Upsilon_n(t)-\Upsilon_n(s)\right)\right)\sim\frac{1}{2\ln(t-s)}.$$

5. Експоненціальні оцінки для розподілів сум бінарних випадкових величин

З теореми 3.1 випливають експоненціальні нерівності для розподілів сум бінарних випадкових величин.

Теорема 5.1. *Нехай X_j, $j=1,\ldots,n$, — випадкові величини, які приймають значення b_j і a_j, $b_j>a_j$, з імовірностями $p_j\in[0,1]$ і $q_j=1-p_j$, відповідно; $S_n^{(0)}=\sum_{j=1}^n(X_j-\mathsf{E}\,X_j)$ і K — функція, означена в (4). Тоді:*

(i) *для будь-якого $x>0$*

$$\mathsf{P}\left\{S_n^{(0)}\geq x\right\}\leq\mathcal{E}(x;p_1,\ldots,p_n),\qquad \mathsf{P}\left\{S_n^{(0)}\leq -x\right\}\leq\mathcal{E}(x;p_1,\ldots,p_n),\tag{28}$$

$$\mathsf{P}\left\{\left|S_n^{(0)}\right|\geq x\right\}\leq 2\mathcal{E}(x;p_1,\ldots,p_n),$$

де

$$\mathcal{E}(x;p_1,\ldots,p_n)=\exp\left\{\frac{-x^2}{B(p_1,\ldots,p_n)}\right\}$$

і

$$B(p_1,\ldots,p_n)=2\left(\sum_{j=1}^n(b_j-a_j)K^{\frac{1}{2}}(p_j)\right)^2;$$

(ii) *якщо випадкові величини X_j, $j=1,\ldots,n$, є незалежними, то для будь-якого $x>0$ виконується (28), де*

$$B(p_1,\ldots,p_n)=2\sum_{j=1}^n K(p_j)(b_j-a_j)^2.$$

Доведення. Твердження (i) випливає з нерівностей (2) та (23). У свою чергу, твердження (ii) випливає з нерівностей (2) та (25). Якщо випадкові величини X_j, $j=1,\ldots,n$, є незалежними, то □

Зауваження 5.1. *Оскільки $K(p_j)=K(q_j)$, $j=1,\ldots,n$, то*

$$\mathcal{B}(p_1,\ldots,p_n)=\mathcal{B}(q_1,\ldots,q_n).$$

Відомою експоненціальною нерівністю для сум обмежених незалежних різнорозподілених випадкових величин є нерівність Хефдінга, [14]. Згідно з цією нерівністю для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \mathsf{E}\,X_j\right) \geq x\right\} \leq \exp\left\{\frac{-2x^2}{\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)^2}\right\}, \tag{29}$$

де X_j, $j = 1, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини такі, що $\mathsf{P}\{a_j \leq X_j \leq b_j\} = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Враховуючи те, що $K(p) < 1/4$ для будь-якого $p \neq 1/2$, бачимо, що згідно з твердженням (b) теореми 5.1 для незалежних випадкових величин перша нерівність у (28) точніша за нерівність (29). При цьому "точність" може значно зростати при p_j близьких до нуля або одиниці. Лише при $p_j = 1/2$, $j = 1, \ldots, n$, праві частини у цих нерівностях збігаються.

6. Експоненціальні оцінки для розподілів сум бернуллівських випадкових величин

Для бернуллівських випадкових величин теорема 5.1 приймає наступного вигляду.

Теорема 6.1. *Нехай $\beta_j(p_j)$, $j = 1, \ldots, n$, — бернуллівські випадкові величини, $S_n = \sum_{j=1}^{n}\beta_j(p_j)$, $S_n^{(0)} = S_n - \sum_{j=1}^{n} p_j$, і K — функція, означена в* (4). *Тоді:*

(i) *для будь-якого $x > 0$ виконується* (28), *де*

$$B(p_1, \ldots, p_n) = 2\left(\sum_{j=1}^{n} K^{\frac{1}{2}}(p_j)\right)^2;$$

(ii) *якщо випадкові величини $\beta_j(p_j)$, $j = 1, \ldots, n$, є незалежними, то для будь-якого $x > 0$ виконується* (28), *де*

$$B(p_1, \ldots, p_n) = 2\sum_{j=1}^{n} K(p_j).$$

Розглянемо наслідок теореми 6.1 для однаково розподілених бернуллівських випадкових величин.

Наслідок 6.1. *Нехай $\beta_j(p)$, $j = 1, \ldots, n$, — однаково розподілені бернуллівські випадкові величини, $S_n = \sum_{j=1}^{n}\beta_j(p)$, і K — функція, означена в* (4). *Тоді:*

(i) *для будь-якого $x > 0$*

$$\mathsf{P}\{S_n - np \geq x\} \leq \exp\left\{\frac{-x^2}{2n^2K(p)}\right\}, \qquad \mathsf{P}\{S_n - np \leq -x\} \leq \exp\left\{\frac{-x^2}{2n^2K(p)}\right\},$$

$$\mathsf{P}\{|S_n - np| \geq x\} \leq 2\exp\left\{\frac{-x^2}{2n^2K(p)}\right\};$$

зокрема, для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n}{n} - p \geq x\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{-x^2}{2K(p)}\right\};$$

(ii) *якщо випадкові величини $\beta_j(p)$, $j = 1, \ldots, n$, є незалежними, то для будь-якого $x > 0$*

$$\mathsf{P}\{S_n - np \geq x\} \leq \exp\left\{\frac{-x^2}{2nK(p)}\right\}, \qquad \mathsf{P}\{S_n - np \leq -x\} \leq \exp\left\{\frac{-x^2}{2nK(p)}\right\},$$

$$\mathsf{P}\{|S_n - np| \geq x\} \leq 2\exp\left\{\frac{-x^2}{2nK(p)}\right\};$$

зокрема, для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n}{n} - p \geq x\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{-nx^2}{2K(p)}\right\}.$$

Приклад 6.1. *Нехай $\beta_j(p)$, $j = 1, \dots, n$, — однаково розподілені бернуллівські випадкові величини, де $p \in (0, 1/2)$. Тоді:*

(i) *для будь-якого $x > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n}{n} - p \geq x\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{-x^2 \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}{1-2p}\right\};$$

(ii) *якщо випадкові величини $\beta_j(p)$, $j = 1, \dots, n$, є незалежними, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n}{n} - p \geq x\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{-nx^2 \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}{1-2p}\right\},$$

яка збігається з відповідною нерівністю у роботі [14].

Для незалежних однаково розподілених випадкових величин нерівності у теоремах 5.1, 6.1 узгоджуються із відомими нерівностями великих відхилень (див., наприклад, [15, 14]), хоча іноді є менш точними. Для залежних, а також для незалежних неоднаково розподілених випадкових величин ці нерівності дають додаткову інформацію.

Послідовності з n випробувань Бернуллі, в j-ому з яких з імовірністю p_j відбувається деяка подія ("успіх"), відповідає послідовність бернуллівських випадкових величин $\beta_j(p_j)$, $j = 1, \dots, n$, а їх сума $\sum_{j=1}^n \beta_j(p_j)$ дорівнює числу "успіхів" в n випробуваннях Бернуллі. Якщо випробування залежні (незалежні), то відповідні бернуллівські випадкові величини також залежні (незалежні). З цієї точки зору нерівності з теореми 6.1 дають експоненціальні нерівності для розподілу числа "успіхів" у послідовності (як залежних так і незалежних, як однорідних так і неоднорідних) випробувань Бернуллі і доповнюють відомі оцінки, [5, 6, 15, 10, 11].

7. Ряди бінарних випадкових величин

У наступній теоремі встановлюються умови, за яких суми нескінченних рядів центрованих бінарних випадкових величин є субгауссівськими.

Теорема 7.1. *Нехай X_j, $j \geq 1$, — послідовність бінарних випадкових величин, які приймають значення b_j і a_j, $b_j > a_j$, з імовірностями $p_j \in [0, 1]$ і $q_j = 1 - p_j$ відповідно, і K — функція, означена в (4). Тоді:*

(i) *якщо*

$$B_\infty(\{p_j\}) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)K^{\frac{1}{2}}(p_j)\right)^2 < \infty, \tag{30}$$

то ряд $\sum_{j=1}^{\infty}(X_j - \mathsf{E}\,X_j)$ збігається майже напевно і у просторі $Sub\,(\Omega)$, сума цього ряду $S_\infty^{(0)}$ є субгауссівською випадковою величиною, $\tau^2(S_\infty^{(0)}) \leq B_\infty(\{p_j\})$ і для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\{S_\infty^{(0)} \geq x\} \leq \exp\left\{\frac{-x^2}{B_\infty(\{p_j\})}\right\}, \qquad \mathsf{P}\{S_\infty^{(0)} \leq -x\} \leq \exp\left\{\frac{-x^2}{B_\infty(\{p_j\})}\right\}, \tag{31}$$

$$\mathsf{P}\{|(S_\infty^{(0)})| \geq x\} \leq 2\exp\left\{\frac{-x^2}{B_\infty(\{p_j\})}\right\};$$

(ii) *якщо випадкові величини* $(X_j, j \geq 1)$ *є незалежними і*

$$B_\infty(\{p_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)^2 K(p_j) < \infty, \tag{32}$$

то виконується твердження (i), *де величина* $B_\infty(\{p_j\})$ *означена у* (32).

Доведення. На підставі умови (30) і теореми 3.1

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}\,|X_j - \mathsf{E}\,X_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(X_j - \mathsf{E}\,X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) K^{\frac{1}{2}}(p_j) < \infty.$$

Тому ряди $\sum_{j=1}^{\infty} |X_j - \mathsf{E}\,X_j|$ і $\sum_{j=1}^{\infty} (X_j - \mathsf{E}\,X_j)$ збігаються майже напевно. Більше того, оскільки τ є нормою у просторі $Sub\,(\Omega)$, відносно якої цей простір є банаховим, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (X_j - \mathsf{E}\,X_j)$ збігається у просторі $Sub\,(\Omega)$ і його сума $S_\infty^{(0)}$ є субгауссівською випадковою величиною такою, що $\tau^2(S_\infty^{(0)}) \leq B_\infty(\{p_j\})$, де величина $B_\infty(\{p_j\})$ означена у (30). Звідси та з (2) випливає (31). Отже, твердження (i) доведено.

Для доведення твердження (ii) припустимо, що випадкові величини X_j, $j \geq 1$, є незалежними, і зауважимо, що за умови (32)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}(X_j - \mathsf{E}\,X_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^2(X_j - \mathsf{E}\,X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)^2 K(p_j) < \infty.$$

Тому ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (X_j - \mathsf{E}\,X_j)$ збігається майже напевно. Крім того, з співвідношення (25) випливає, що для будь-яких $n, m \geq 1$

$$\tau\left(\sum_{j=n}^{n+m} (X_j - \mathsf{E}\,X_j)\right)^2 \leq \sum_{j=n}^{n+m} \tau^2(X_j - \mathsf{E}\,X_j) = \sum_{j=n}^{n+m} (b_j - a_j)^2 K(p_j).$$

Звідси та з (32) випливає, що послідовність часткових сум ряду $\sum_{j=1}^{\infty} (X_j - \mathsf{E}\,X_j)$ є послідовністю Коші у банаховому просторі $Sub\,(\Omega)$, а тому цей ряд є збіжним у просторі $\mathrm{Sub}\,(\Omega)$ і його сума $S_\infty^{(0)}$ є субгауссівською випадковою величиною такою, що $\tau^2(S_\infty^{(0)}) \leq B_\infty(\{p_j\})$, де величина $B_\infty(\{p_j\})$ означена у (32). Співвідношення (2) завершує доведення твердження (ii). □

Зауваження 7.1. *Якщо*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} (b_j - a_j) \quad i \quad \limsup_{n\to\infty} (b_j - a_j) < \infty.$$

то згідно з твердженнями (K6) *і* (K7) *леми* 2.1*:*

(i) *умова* (30) *виконується, тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\ln(p_j \wedge q_j)|}} < \infty,$$

при цьому

$$B_\infty(\{p_j\}) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j - a_j}{\sqrt{|\ln(p_j \wedge q_j)| - \ln 2}}\right)^2;$$

(ii) *умова* (32) *виконується, тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\ln(p_j \wedge q_j)|} < \infty,$$

при цьому

$$B_\infty(\{p_j\}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j - a_j)^2}{|\ln(p_j \wedge q_j)| - \ln 2}.$$

Приклад 7.1. *Нехай* $d = b_j - a_j > 0$, $j \geq 1$, *і*

$$p_j = 2^{-(j+1)^\alpha}, \qquad j \geq 1, \tag{33}$$

де $\alpha > 1$. *Тоді*

$$A_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} p_j = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+1)^\alpha} < \infty,$$

і, якщо $\alpha > 2$, *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\ln(p_j \wedge q_j)|}} = \left(\sqrt{\log_2 e}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^{-\alpha/2} < \infty,$$

а, якщо $\alpha > 1$, *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\ln(p_j \wedge q_j)|} = (\log_2 e) \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^{-\alpha} < \infty,$$

Таким чином, при $\alpha > 2$, *виконуються умови* (30) *і* (32), *див. зауваження* 7.1, *а при* $\alpha \in (1, 2]$ *виконується лише умова* (32).

З теореми 7.1, зауваження 7.1 та прикладу 7.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 7.1. *Нехай для ймовірностей "успіху"* p_j, $j \geq 1$, *у нескінченній послідовності незалежних випробувань Бернуллі виконується співвідношення* (33) *і* S_∞ — *число "успіхів" у цій послідовності. Тоді* $\mathsf{E}\, S_\infty = A_\alpha$ *і* $(S_\infty - A_\alpha)$ *є субгауссівською випадковою величиною такою, що* $\tau^2(S_\infty - A_\alpha) \leq (\log_2 e) \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\alpha}$.

Далі буде розглядатися нескінченна неоднорідна послідовність незалежних випробувань Бернуллі з ймовірностями "успіху" p_j, $j \geq 1$, ряд з яких розбігається, але ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j(p_j) - p_j)$ збігається майже напевно і у просторі $Sub\,(\Omega)$. Такі послідовності природно виникають у результаті "малих збурень" певних вироджених схем випробувань Бернуллі.

Нехай "детермінована" послідовність випробувань Бернуллі задається ймовірностями виграшу $\mathfrak{p}_j$, $j \geq 1$, де для будь-якого $j \geq 1$

$$\mathfrak{p}_j = 1 \quad \text{або} \quad \mathfrak{p}_j = 0. \tag{34}$$

Це означає, що результатами випробувань є детерміновані події, а число "успіхів" за n випробувань буде невипадковою величиною

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j, \qquad n \geq 1.$$

Крім того, нехай

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{p}_j = \infty,$$

тобто $V_n \to \infty$ при $n \to \infty$. При цьому можливо, хоча і не обов'язково, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - \mathfrak{p}_j) = \infty,$$

тобто $n - V_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Припустимо, що завдяки "малим збуренням" імовірності "успіху" $\mathfrak{p}_j$, $j \geq 1$, перетворюються у p_j, $j \geq 1$, так, що

$$|\mathfrak{p}_j - p_j| = \delta_j \in (0, 1/2), \qquad j \geq 1. \tag{35}$$

В результаті, замість детермінованої послідовності числа "успіхів" V_n, $n \geq 1$, спостерігається випадкова величина $S_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(p_j)$. Наступне твердження показує, що при достатньо малих збуреннях δ_j, $j \geq 1$, справджується "субнормалізація" похибки $Z_n = V_n - S_n$, $n \geq 1$.

Наслідок 7.2. *Нехай ймовірності "успіху" p_j, $j \geq 1$, у нескінченній послідовності випробувань Бернуллі є такими, що виконуються співвідношення (34)–(35), і K — функція, означена в (4). Тоді:*

(i) *якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty} K^{\frac{1}{2}}(\delta_j) < \infty, \tag{36}$$

то послідовність $Z_n = V_n - S_n$, $n \geq 1$, збігається до граничної похибки

$$Z_\infty = \Delta_\infty + S_\infty^{(0)},$$

де

$$\Delta_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j < \infty$$

— детермінована компонента граничної похибки та

$$S_\infty^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty} (p_j - \beta_j(p_j)) \tag{37}$$

— випадкова кормпонента граничної похибки така, що ряд у (37) збігається майже напевно та у просторі $Sub\,(\Omega)$ і

$$\tau^2(S_\infty^{(0)}) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} K^{\frac{1}{2}}(\delta_j) \right)^2; \tag{38}$$

(ii) *якщо випробування Бернуллі є незалежними і*

$$\sum_{j=1}^{\infty} K(\delta_j) < \infty, \tag{39}$$

то виконується твердження (i) *з тією різницею, що ряд у* (37) *є рядом з незалежних центрованих бернуллівських випадкових величин і*

$$\tau^2(Z_\infty) \leq \sum_{j=1}^{\infty} K(\delta_j). \tag{40}$$

Доведення. З умов (34) і (35) випливає, що $\delta_j = p_j \wedge (1 - p_j)$, $j \geq 1$. Звідси та з твердження (K1) леми 2.1 випливає, що за умов (36) і (39) збігаються ряди $\sum_{j=1}^{\infty} K^{\frac{1}{2}}(p_j)$ і $\sum_{j=1}^{\infty} K(p_j)$, відповідно. Отже, в твердженнях (i) та (ii) збіжність ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} (p_j - \beta_j(p_j))$$

і нерівності (38), (40) випливають з теореми 7.1. Оскільки (див. (9))

$$\delta_j = p_j \wedge (1 - p_j) \leq 2p_j(1 - p_j) \leq 2K(p_j) \leq 2K^{\frac{1}{2}}(p_j),$$

то збіжність будь-якого з рядів $\sum_{j=1}^{\infty} K^{\frac{1}{2}}(p_j)$ і $\sum_{j=1}^{\infty} K(p_j)$ тягне збіжність ряду $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j$. Таким чином, наслідок 7.2 доведено. □

8. Висновки

У роботі знайдені точні значення субгауссівських норм бернуллівських та бінарних випадкових величин, що дозволило знайти точні значення субгауссівських норм для сумм незалежних однаково розподілених бінарних випадкових величин, а також для центрованих емпіричних функцій розподілу та її приростів. За допомогою цих норм встанолені експоненціальні нерівності для розподілів сум (як залежних так і незалежних) центрованих бінарних випадкових величин, зокрема бернуллівських випадкових величин, які доповнюють та уточнюють відомі нерівності. Результати цієї роботи можуть бути корисними при вивченні асимптотичних властивостей сум та рядів бінарних випадкових величин.

Література

1. В. В. Булдыгин, *Сходимость случайных элементов в топологических пространствах*, "Наукова думка", Киев, 1980.
2. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *О субгауссовских случайных величинах*, Укр. мат. ж. **32** (1980), № 6, 723–730.
3. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВiМС", Киев, 1998.
4. В. В. Булдигін, Є. Д. Печук, *Нерівності для розподілів функціоналів від субгауссівських векторів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **80** (2009), 23–33.
5. С. Н. Бернштейн, *Об одном видоизменении неравенства Чебышева и о погрешности формулы Лапласа*, Уч. зап. научн.-иссл. кафедр Украины, Отд. матем. (1924), № 1, 38–48.
6. С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, т. 4, "Наука", Москва, 1964.
7. Н. Н. Вахания, В. В. Кварацхелия, В. И. Тариеладзе, *Слабо субгауссовские случайные элементы в банаховых пространствах*, Укр. мат. ж. **57** (2005), № 9, 1187–1208.
8. Ю. В. Козаченко, *Достатні умови неперервності з імовірністю одиниця субгаусовських випадкових процесів*, Доповіді АН УРСР, **2** (1968), 113–115.
9. Е. И. Островский, *Экспоненциальные оценки распределения максимума негауссовского случайного поля*, Теория вероятн. применен. **35** (1990), № 3, 482–493.
10. В. В. Петров, *Обобщение и уточнение неравенств Бернштейна*, Вестн. Ленинградского ун-та **19** (1967), 63–68.
11. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1987.
12. H. Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hyposesis based on the sum of observations*, Annals of Mathematical Statistics **23** (1952), 493–507.
13. R. Giuliano Antonini and Yu. V. Kozachenko, *A note on the asymptotic behavior of sequences of generalized subgaussian random vectors*, Rand. Oper. Stoch. Equ. **13** (2005), № 1, 39–52.
14. W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. Amer. Statist. Assoc. **58** (1963) № 301, 13–30.
15. M. Okamoto, *Some inequalities relating to the partial sum of binomial probabilities*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics **10** (1959), 29–35.
16. J. P. Kahane, *Propriétés locales des fonctions à series de Fouries aléatories*, Studia Math. **19** (1960), № 1, 1–25.
17. J. P. Kahane, *Случайные функциональные ряды*, "Мир", Москва, 1973.

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України ("КПІ"), прос. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: matan@ntu-kpi.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України ("КПІ"), прос. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: matan@ntu-kpi.kiev.ua

Надійшла 10/10/2011