Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 43–55

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 43–55

ФІЛЬТРАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

УДК 519.21

І. І. ДУБОВЕЦЬКА І М. П. МОКЛЯЧУК

Анотація. Досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(-j)$$

від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ за спостереженнями послідовності $\zeta(j)+\theta(j)$ при $j \le 0$, які забруднені періодично корельованим шумом $\theta(j)$. Знайдені формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала, коли спектральні щільності послідовностей точно відомі. Для заданої множини допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятлива спектральна щільність та мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала.

Abstract. The problem of optimal estimation of linear functional $A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(-j)$ depending on the unknown values of periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j)$ from observations of the sequence and noise $\zeta(j)+\theta(j)$ for $j \le 0$ is considered. Formulas for calculating mean square error and spectral characteristic of optimal linear estimation of the functional are proposed in the case where spectral densities are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral density and the minimax spectral characteristic are proposed for the given set of admissible spectral densities.

Аннотация. Исследуется задача оптимального оценивания линейного функционала

$$A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(-j)$$

от неизвестных значений периодически коррелированной последовательности $\zeta(j)$ по наблюдениям последовательности $\zeta(j)+\theta(j)$ при $j \le 0$, которая загрязнена периодически коррелированным шумом $\theta(j)$. Найдены формулы для вычисления среднеквадратической ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала, когда спектральные плотности последовательностей точно известны. Для заданного множества допустимых спектральных плотностей определены наимение благоприятная спектральная плотность и минимаксная спектральная характеристика оптимальной линейной оценки функционала.

1. Вступ

У статті Є.Г. Гладишева [1] проведено аналіз спектральних властивостей та зображень періодично корельованих послідовностей, який базується на зв'язку періодично корельованих та векторних стаціонарних послідовностей. Завдяки результатам Є.Г. Гладишева задача оцінювання періодично корельованих послідовностей зводиться до відповідної задачі для векторних стаціонарних послідовностей. Основні результати стосовно зображення періодично корельованих послідовностей через простіші випадкові послідовності викладені у книзі Л. Херда та А. Міамі [2], а також статтях А. Макагона [3, 4].

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Періодично корельована послідовність, робастна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А.М. Колмогоровим [5], Н. Вінером [6], А.М. Ягломом [7, 8]. Задача прогнозу векторних стаціонарних послідовностей досліджена Ю.А. Розановим [9]. У тому випадку, коли повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданої множини. У. Гренандер [10] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У роботах Ю. Франке [11, 12], Ю. Франке та Х. Пура [13] досліджуються задачі мінімаксної екстраполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. М.П. Моклячук [14]–[17], М.П. Моклячук та А.Ю. Масютка [18] досліджували задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній роботі вивчається задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(-j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ за спостереженнями послідовності $\zeta(j) + \theta(j)$ при $j \le 0$, де $\theta(j)$ — некорельована з $\zeta(j)$ періодично корельована послідовність. Виведено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки функціонала у тому випадку, коли відомі спектральні щільності послідовності $\zeta(j)$ та шуму $\theta(j)$. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, але задана множина допустимих спектральних щільностей, вказано формули для визначення найменш сприятливої спектральної щільності та мінімаксної спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

2. Періодично корельовані послідовності, які породжуються векторними стаціонарними

Періодично корельовані послідовності є стохастичними послідовностями з періодичною структурою [2].

Означення 2.1. Послідовність комплекснозначних випадкових величин $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, зі скінченним другим моментом, $\mathsf{E}\,|\zeta(n)|^2 < +\infty$, називається періодично корельованою з періодом T (T-ПК), якщо

$$\mathsf{E}\,\zeta(n+T) = \mathsf{E}\,\zeta(n), \tag{1}$$

$$\mathsf{E}\,\zeta(n+T)\overline{\zeta(m+T)} = R(n+T, m+T) = R(n,m), \tag{2}$$

і не існує меншого за $T > 0$ числа такого, що виконуються рівності (1) та (2).

Поняття періодично корельованих послідовностей було впроваджене Є.Г. Гладишевим [1]. В.Р. Беннет [19] називав випадкові та періодичні процеси циклостаціонарними.

Означення 2.2. Комплекснозначна T-вимірна випадкова послідовність

$$\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

зі скінченним другим моментом, $\mathsf{E}\,\|\vec{\xi}(n)\|^2 < \infty$, називається стаціонарною, якщо для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$ та $j, k \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$\mathsf{E}\,\xi_k(n) = m_k,$$

$$\mathsf{E}\,\xi_k(n)\overline{\xi_j(m)} = R_{kj}(n,m) = R_{kj}(n-m).$$

В цьому випадку матрицю $R(n) = \{R_{kj}(n)\}_{k,j=0}^{T-1}$ називають коваріаційною матрицею T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\xi}(n)$.

Теорема 2.1 (Е.Г. Гладишев [1]). *Послідовність $\zeta(n)$ є періодично корельованою з періодом T тоді і лише тоді, коли існує T-вимірна стаціонарна послідовність $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$ така, що $\zeta(n)$ має наступне зображення*

$$\zeta(n) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi ink/T}\xi_k(n), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Послідовність $\vec{\xi}(n)$ називають такою, що породжує послідовність $\zeta(n)$.

Позначимо через $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$ матрицю спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$. Через $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ позначимо матрицю спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$, яка будується розбиттям періодично корельованої послідовності $\zeta(n)$ на блоки довжини T. Тобто p-та координата вектора $\vec{\zeta}(n)$ дорівнює

$$[\vec{\zeta}(n)]^p = \zeta(nT + p), \qquad n \in \mathbb{Z},\ p = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Якщо існує спектральна щільність $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$, то існує спектральна щільність $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ і для них виконується співвідношення

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = T \cdot V(\lambda) f^{\vec{\xi}}(\lambda/T) V^{-1}(\lambda), \tag{4}$$

де $V(\lambda)$ — унітарна матриця з (k,j)-им елементом

$$v_{kj}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi ijk/T + ik\lambda/T}, \qquad k, j = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Неперервність $V(\lambda)$ для $\lambda \in [-\pi, \pi)$ та існування оберненої до $V(\lambda)$ матриці дає можливість записати співвідношення (4) у вигляді

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda) = T^{-1} \cdot V^{-1}(T\lambda) f^{\vec{\zeta}}(T\lambda) V(T\lambda). \tag{5}$$

3. Задача фільтрації та класичний метод її розв'язання

Нехай $\zeta(n)$, $\theta(n)$ — некорельовані між собою T-періодично корельовані стохастичні послідовності. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(-j)$, який залежить від невідомих значень $\zeta(n)$, за спостереженнями послідовності $\zeta(j) + \theta(j)$ при $j \le 0$. Така задача називається задачею лінійної фільтрації.

Нехай $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$, $\vec{\eta}(n) = \{\eta_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$ — некорельовані між собою T-вимірні стаціонарні стохастичні послідовності, що породжують T-періодично корельовані стохастичні послідовності $\zeta(n)$ та $\theta(n)$ відповідно. $\vec{\zeta}(n)$, $\vec{\theta}(n)$ — це T-вимірні стаціонарні послідовності, які отримані розбиттям періодично корельованих послідовностей $\zeta(n)$ та $\theta(n)$ на блоки довжини T.

Матриці спектральних щільностей $f^{\vec{\xi}}(\lambda) = \left\{f^{\vec{\xi}}_{kj}(\lambda)\right\}_{k,j=0}^{T-1}$, $f^{\vec{\eta}}(\lambda) = \left\{f^{\vec{\eta}}_{kj}(\lambda)\right\}_{k,j=0}^{T-1}$ T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\xi}(n)$, $\vec{\eta}(n)$ пов'язані з матрицями спектральних щільностей $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$, $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ векторних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(n)$, $\vec{\theta}(n)$ співвідношеннями (4), (5).

Використовуючи звязок (3) між періодично корельованими та векторними стаціонарними послідовностями, отримаємо наступне перетворення функціонала $A\zeta$

$$A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(-j) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) \sum_{k=0}^{T-1} e^{-2\pi ijk/T}\xi_k(-j) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{T-1} a(j) e^{-2\pi ijk/T}\xi_k(-j)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \vec{a}^{\top}(j)\vec{\xi}(-j) = A\vec{\xi},$$

де $\vec{a}(j) = (a_0(j), \ldots, a_{T-1}(j))^\top$, $a_k(j) = a(j)e^{-2\pi ijk/T}$, $k = 0, 1, \ldots, T-1$.

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\vec{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{a}^\top(j)\vec{\xi}(-j),$$

який залежить від невідомих значень $\vec{\xi}(j)$, за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(j) + \vec{\eta}(j)$ при $j \leq 0$.

Припустимо, що послідовність коефіцієнтів

$$\vec{a}(j) = \{a_k(j)\}_{k=0}^{T-1} = \left\{a(j)e^{-2\pi ijk/T}\right\}_{k=0}^{T-1}, \qquad j \geq 0,$$

що задає функціонал $A\vec{\xi} = A\zeta$, задовольняє умови

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{T-1}|a_k(j)| = T\sum_{j=0}^{\infty}|a(j)| < \infty, \qquad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\|\vec{a}(j)\|^2 = T\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)|a(j)|^2 < \infty. \quad (6)$$

За умов (6) функціонал $A\vec{\xi} = A\zeta$ має скінченний другий момент.

Нехай стаціонарна послідовність $\vec{\xi}(j) + \vec{\eta}(j)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього:

$$\vec{\xi}(j) + \vec{\eta}(j) = \sum_{u=-\infty}^{j} d(j-u)\vec{\varepsilon}(u),$$

де $d(k) = \{d_{ij}(k)\}_{i=0,\ldots,T-1}^{j=0,\ldots,m-1}$, $\vec{\varepsilon}(u) = \{\varepsilon_k(u)\}_{k=0}^{m-1}$ — векторна стаціонарна послідовність білого шуму, тобто

$$\mathsf{E}\,\varepsilon_k(n)\overline{\varepsilon_j(m)} = \delta_{kj}\delta_{nm},$$

де δ_{kl} — символ Кронекера: $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kl} = 0$ для $k \neq l$.

Тоді матриця спектральної щільності послідовності $\vec{\xi}(j) + \vec{\eta}(j)$ за співвідношенням (5) має вигляд

$$f^{\vec{\xi}}(\lambda) + f^{\vec{\eta}}(\lambda) = T^{-1}V^{-1}(T\lambda)\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda) + f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right)V(T\lambda)$$

і допускає канонічну факторизацію

$$T^{-1}V^{-1}(T\lambda)\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda) + f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right)V(T\lambda) = d(\lambda)d^*(\lambda), \qquad d(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}, \quad (7)$$

де $d^*(\lambda) = \overline{d(\lambda)}^\top$ — комплексноспряжена до $d(\lambda)$ матриця.

Нехай спектральна щільність $T^{-1}V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)V(T\lambda)$ допускає канонічну факторизацію

$$T^{-1}V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)V(T\lambda) = \varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda), \qquad \varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)e^{-ik\lambda}, \quad (8)$$

де $\varphi(k) = \{\varphi_{ij}(k)\}_{i=0,\ldots,T-1}^{j=0,\ldots,m-1}$. Або спектральна щільність $T^{-1}V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\theta}}(T\lambda)V(T\lambda)$ допускає канонічну факторизацію

$$T^{-1}V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\theta}}(T\lambda)V(T\lambda) = \psi(\lambda)\psi^*(\lambda), \qquad \psi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)e^{-ik\lambda}, \quad (9)$$

де $\psi(k) = \{\psi_{ij}(k)\}_{i=0,\ldots,T-1}^{j=0,\ldots,m-1}$. Тоді для факторизації (7) щільності

$$T^{-1}V^{-1}(T\lambda)\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda) + f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right)V(T\lambda)$$

достатньо регулярності однієї із щільностей (8) або (9).

Позначимо через $L_2(f)$ гільбертів простір вектор-функцій $b(\lambda) = \{b_k(\lambda)\}_{k=0}^{T-1}$, які інтегровані за мірою з щільністю $f(\lambda) = \{f_{kj}(\lambda)\}_{k,j=0}^{T-1}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b^\top(\lambda) f(\lambda) \overline{b(\lambda)}\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k,l=0}^{T-1} b_k(\lambda) \overline{b_l(\lambda)} f_{kl}(\lambda)\, d\lambda < +\infty.$$

Позначимо через $L_2^-(f)$ підпростір у $L_2(f)$, породжений функціями вигляду

$$e^{ij\lambda}\delta_k, \qquad \delta_k = \{\delta_{kl}\}_{l=0}^{T-1}, \ k = 0, 1, \ldots, T-1, \ j \le 0.$$

Лінійна оцінка $\hat{A}\zeta$ функціонала $A\zeta$, за даними спостережень $\zeta(j)+\theta(j)$ при $j \le 0$, визначається спектральною характеристикою $h(e^{i\lambda}) \in L_2^-\left(f^{\vec{\zeta}} + f^{\vec{\theta}}\right)$ та має вигляд

$$\hat{A}\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^\top\left(e^{i\lambda}\right) \left(Z^{\xi+\eta}(d\lambda)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{T-1} h_k\left(e^{i\lambda}\right) \left(Z_k^{\xi+\eta}(d\lambda)\right), \tag{10}$$

де $Z^{\xi+\eta}(\Delta) = \left\{Z_k^{\xi+\eta}(\Delta)\right\}_{k=0}^{T-1}$ — ортогональна випадкова міра суми послідовностей $\vec{\xi}(j)$ та $\vec{\eta}(j)$, які породжують $\zeta(j)$ та $\theta(j)$, відповідно.

Середньоквадратичну похибку лінійної оцінки $\hat{A}\zeta$ зі спектральною характеристикою $h(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{h}(k) e^{-ik\lambda}$ можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned}
\Delta\left(h; f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) &= \mathsf{E}\left|A\vec{\zeta} - \hat{A}\vec{\zeta}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi} A^\top\left(e^{i\lambda}\right) V^{-1}(T\lambda) f^{\vec{\theta}}(T\lambda) V(T\lambda) \overline{A(e^{i\lambda})}\, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi} \left[A\left(e^{i\lambda}\right) - h\left(e^{i\lambda}\right)\right]^\top \\
&\quad\quad \times V^{-1}(T\lambda)\left(f^{\vec{\zeta}}(T\lambda) + f^{\vec{\theta}}(T\lambda)\right) V(T\lambda) \overline{[A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})]}\, d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi} \left[A\left(e^{i\lambda}\right) - h\left(e^{i\lambda}\right)\right]^\top V^{-1}(T\lambda) f^{\vec{\theta}}(T\lambda) V(T\lambda) \overline{A(e^{i\lambda})}\, d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi} A^\top\left(e^{i\lambda}\right) V^{-1}(T\lambda) f^{\vec{\theta}}(T\lambda) V(T\lambda) \overline{[A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})]}\, d\lambda \\
&= \|\Psi a\|^2 + \|D(a-h)\|^2 - \langle \Psi(a-h), \Psi a\rangle - \langle \Psi a, \Psi(a-h)\rangle,
\end{aligned}$$

де

$$A\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{a}(j) e^{-ij\lambda}, \qquad \|\Psi a\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|(\Psi a)_k\|^2, \qquad (\Psi a)_k = \sum_{l=0}^{k} \psi^\top(k-l)\vec{a}(l),$$

$$\|D(a-h)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|(D(a-h))_k\|^2, \qquad (D(a-h))_k = \sum_{l=0}^{k} d^\top(k-l)\left(\vec{a}(l) - \vec{h}(l)\right),$$

$$\langle \Psi(a-h), \Psi a\rangle = \overline{\langle \Psi a, \Psi(a-h)\rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle (\Psi(a-h))_k, (\Psi a)_k\rangle.$$

Спектральна характеристика $h(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\zeta$ при заданих щільностях $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$, $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ мінімізує середньоквадратичну похибку

$$\begin{aligned}
\Delta\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) = \Delta\left(h\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right); f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) &= \min_{h \in L_2^-\left(f^{\vec{\zeta}} + f^{\vec{\theta}}\right)} \Delta\left(h; f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) \\
&= \min_{\hat{A}\vec{\zeta}} \mathsf{E}\left|A\vec{\zeta} - \hat{A}\vec{\zeta}\right|^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Нехай щільності стаціонарної послідовності, що спостерігається, і послідовності, що оцінюється, допускають факторизації (7) та (8), відповідно. Тоді розв'язками задачі (11) будуть спектральна характеристика $h(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ оптимальної оцінки $\hat{A}\zeta$, які обчислюються за формулами

$$h\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) = b^{\top}(\lambda) r^{\vec{\zeta}}\left(e^{i\lambda}\right), \tag{12}$$

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) = \langle c^{\vec{\zeta}}, a\rangle - \left\|C^{\vec{\zeta}}\overline{b}\right\|^2, \tag{13}$$

де

$$\begin{gathered} b(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k) e^{-ik\lambda}, \qquad b(\lambda)d(\lambda) = I_m, \\ r^{\vec{\zeta}}\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(C^{\vec{\zeta}}\overline{b}\right)_k e^{-ik\lambda}, \qquad \left(C^{\vec{\zeta}}\overline{b}\right)_k = \sum_{l=0}^{\infty}\overline{b(l)} c^{\vec{\zeta}}(l+k), \\ c^{\vec{\zeta}}(k) = \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\varphi(l)}(\Phi a)_{l+k}, \\ (\Phi a)_k = \sum_{l=0}^{k}\varphi^{\top}(k-l)\vec{a}(l), \qquad \left\langle c^{\vec{\zeta}}, a\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle c^{\vec{\zeta}}(k), \vec{a}(k)\right\rangle, \\ \left\|C^{\vec{\zeta}}\overline{b}\right\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left(C^{\vec{\zeta}}\overline{b}\right)_k\right\|^2. \end{gathered} \tag{14}$$

Якщо щільності послідовності, що спостерігається, і послідовності шуму допускають факторизації (7) та (9), відповідно, то спектральна характеристика $h\big(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\big)$ та середньоквадратична похибка $\Delta\big(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\big)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\zeta$ обчислюються за формулами

$$h\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) = A\left(e^{i\lambda}\right) - b^{\top}(\lambda)\, r^{\vec{\theta}}\left(e^{i\lambda}\right), \tag{15}$$

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) = \left\langle c^{\vec{\theta}}, a\right\rangle - \left\|C^{\vec{\theta}}\overline{b}\right\|^2, \tag{16}$$

де

$$\begin{gathered} r^{\vec{\theta}}\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(C^{\vec{\theta}}\overline{b}\right)_k e^{-ik\lambda}, \qquad \left(C^{\vec{\theta}}\overline{b}\right)_k = \sum_{l=0}^{\infty}\overline{b(l)} c^{\vec{\theta}}(l+k), \\ c^{\vec{\theta}}(k) = \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\psi(l)}(\Psi a)_{l+k}, \\ (\Psi a)_k = \sum_{l=0}^{k}\psi^{\top}(k-l)\vec{a}(l), \qquad \left\langle c^{\vec{\theta}}, a\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle c^{\vec{\theta}}(k), \vec{a}(k)\right\rangle, \\ \|C^{\vec{\theta}}\overline{b}\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left(C^{\vec{\theta}}\overline{b}\right)_k\right\|^2. \end{gathered} \tag{17}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ — некорельовані між собою T-періодично корельовані випадкові послідовності з матрицями спектральних щільностей $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ та $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(j)$ та $\vec{\theta}(j)$, отриманих поділом одновимірних періодично корельованих послідовностей $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ на блоки довжиною T, відповідно, та нехай спектральні щільності допускають канонічні* *факторизації* (7), (8) *або* (7), (9). *Тоді лінійна оптимальна оцінка функціонала* $A\zeta$ *за відомими спостереженнями послідовності* $\zeta(j)+\theta(j)$ *при* $j\leq 0$ *визначається за формулою* (10). *Спектральна характеристика* $h\big(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\big)$ *такої оцінки обчислюється за формулою* (12) *або* (15), *відповідно. Величина середньоквадратичної похибки* $\Delta\big(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\big)$ *обчислюється за формулою* (13) *або* (16), *відповідно.*

Наслідок 3.1. *Нехай* $\zeta(j)$ *та* $\theta(j)$ — *некорельовані між собою* T*-періодично корельовані випадкові послідовності,* $\vec{\zeta}(j)$ *та* $\vec{\theta}(j)$ — T*-вимірні стаціонарні послідовності, отримані поділом одновимірних періодично корельованих послідовностей* $\zeta(j)$ *та* $\theta(j)$ *на блоки довжиною* T, *відповідно. Припустимо, що одна з послідовностей* $\vec{\zeta}(j)$ *або* $\vec{\theta}(j)$ *є векторною послідовністю білого шуму з дисперсією координат* σ^2. *Тоді спектральна характеристика* $h\big(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\big)$ *оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\zeta$ *обчислюється за формулою* (12) *або* (15). *Середньоквадратична похибка такого прогнозу дорівнюватиме*

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\right)=\sigma^2\|\vec{a}\|^2-\frac{\sigma^4}{T^2}\|\overline{b}a\|^2,$$

де

$$\vec{a}=(a(0),a(1),\dots),\qquad \|\vec{a}\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|a(k)|^2,\ \ \|\overline{b}a\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\|(\overline{b}a)_k\|^2,$$

$$(\overline{b}a)_k=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{b(l)}\vec{a}(l+k).$$

Наслідок 3.2. *В умовах наслідку 3.1 середньоквадратична похибка оптимальної лінійної оцінки* $a(N)\zeta(-N)$ *за даними спостереження послідовності* $\zeta(j)+\theta(j)$ *при* $j\leq 0$ *обчислюється за формулою*

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}}\right)=\sigma^2|a(N)|^2-\frac{\sigma^4}{T^2}\sum_{k=0}^{N}\left\|\overline{b(k)}\vec{a}(N)\right\|^2.$$

Приклад 3.1. Розглянемо некорельовані 2-вимірні стаціонарні послідовності $\vec{\xi}(n)=\begin{pmatrix}\xi_0(n)\\ \xi_1(n)\end{pmatrix}$ та $\vec{\eta}(n)=\begin{pmatrix}\eta_0(n)\\ \eta_1(n)\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{Z}$, такі, що $\xi_0(n)$ — одновимірна стаціонарна послідовність Орнштейна–Уленбека зі спектральною щільністю

$$f_0(\lambda)=\frac{5/4}{2\pi|1-1/2\cdot e^{-i\lambda}|^2},$$

$\xi_1(n)$ — некорельована з $\xi_0(n)$ одновимірна стаціонарна послідовність із щільністю $f_1(\lambda)=\frac{3}{2\pi}|1+e^{i\lambda}|^2$, $\eta_0(n)$ — послідовність білого шуму зі спектральною щільністю $g_0(\lambda)=\frac{3}{2\pi}$, $\eta_1(n)$ — некорельований з $\eta_0(n)$ білий шум із щільністю $g_1(\lambda)=\frac{2}{\pi}$. Згідно з теоремою Гладишева 2.1 можна побудувати періодично корельовані послідовності з періодом $T=2$

$$\zeta(n)=\xi_0(n)+e^{\pi in}\xi_1(n)\quad \text{та}\quad \theta(n)=\eta_0(n)+e^{\pi in}\eta_1(n).$$

Оцінимо лінійний функціонал $A\zeta=\alpha\zeta(0)=\alpha\xi_0(0)+\alpha\xi_1(0)$, де $a(0)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a(k)=0$, $k\geqslant 1$.

Тоді, обчисливши спектральну характеристику $h(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ за формулою (12), оцінка згідно формули (10) дорівнюватиме

$$\begin{aligned}\hat{A}\zeta &= \alpha\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}(\xi_0(0)+\eta_0(0)) + \frac{\alpha}{3}(\xi_1(0)+\eta_1(0)) - \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1367}{3456}(\xi_0(-1)+\eta_0(-1)) \\ &+ \alpha\frac{2}{9}(\xi_1(-1)+\eta_1(-1)) + \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1367}{6912}(\xi_0(-2)+\eta_0(-2)) - \alpha\frac{2}{9}(\xi_1(-2)+\eta_1(-2)) \\ &+ 2\alpha\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}(\xi_1(-k)+\eta_1(-k)),\end{aligned}$$

а середньоквадратична похибка такої оцінки обчислюється за формулою (13)

$$\Delta\left(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}\right) = \alpha^2 \cdot 0.596.$$

Спектральна щільність 2-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$ за (4) дорівнює

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{5}{\left|2-e^{-i\lambda/2}\right|^2} + 3\left|1+e^{-i\lambda/2}\right|^2 & \frac{5e^{-i\lambda/2}}{\left|2-e^{-i\lambda/2}\right|^2} - 3e^{-i\lambda/2}\left|1+e^{-i\lambda/2}\right|^2 \\ \frac{5e^{i\lambda/2}}{\left|2-e^{-i\lambda/2}\right|^2} - 3e^{i\lambda/2}\left|1+e^{-i\lambda/2}\right|^2 & \frac{5}{\left|2-e^{-i\lambda/2}\right|^2} + 3\left|1+e^{-i\lambda/2}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, матриця спектральної щільності 2-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\theta}(n)$ задається формулою

$$f^{\vec{\theta}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 7 & 3e^{-i\lambda/2} - 4e^{-i\lambda/2} \\ 3e^{i\lambda/2} - 4e^{i\lambda/2} & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Мінімаксний (робастний) метод фільтрації

Якщо відомі матриці спектральних щільностей $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(j)$ та $\vec{\theta}(j)$, відповідно, отриманих поділом одновимірних періодично корельованих послідовностей $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ на блоки довжини T, то для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\zeta$ можна користуватись формулами (12)–(16). Якщо ж матриці щільностей точно не відомі, але задана множина $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання функціоналу від невідомих значень періодично корельованої послідовності. Ми шукаємо оцінку, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу D.

Означення 4.1. Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ матриці спектральних щільностей $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими у класі D для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\zeta$, якщо

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f,g)\in D}\Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 4.2. Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A\zeta$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D} L_2^-(f+g), \qquad \min_{h\in H_D}\max_{(f,g)\in D}\Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D}\Delta\left(h^0; f, g\right).$$

Виходячи із даних означень та отриманих вище співвідношень (7)–(16), можна перевірити спаведливість наступних лем [18].

Лема 4.1. *Матриці спектральних щільностей $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, які допускають канонічні факторизації (7)–(9), будуть найменш сприятливими в класі D для оптимальної лінійної фільтрації $A\zeta$, якщо коефіцієнти факторизацій (7)–(9) визначають розв'язки задачі на умовний екстремум*

$$\Delta(f,g) = \left\langle c^{\vec{\zeta}}, a \right\rangle - \left\| C^{\vec{\zeta}} b^* \right\|^2 \to \sup,$$
$$f(\lambda) = TV(\lambda)\varphi(\lambda/T)\left(V(\lambda)\varphi(\lambda/T)\right)^* \in D_f, \tag{18}$$
$$g(\lambda) = TV(\lambda)\big(d(\lambda/T)\, d^*(\lambda/T) - \varphi(\lambda/T)\,\varphi^*(\lambda/T)\big)V^*(\lambda) \in D_g,$$

або задачі на умовний екстремум

$$\Delta(f,g) = \left\langle c^{\vec{\theta}}, a \right\rangle - \left\| C^{\vec{\theta}} b^* \right\|^2 \to \sup,$$
$$g(\lambda) = TV(\lambda)\psi(\lambda/T)\left(V(\lambda)\psi(\lambda/T)\right)^* \in D_g, \tag{19}$$
$$f(\lambda) = TV(\lambda)\big(d(\lambda/T)\, d^*(\lambda/T) - \psi(\lambda/T)\,\psi^*(\lambda/T)\big)V^*(\lambda) \in D_f.$$

Якщо одна із щільностей (8), (9) відома, то задачі (18), (19) перетворюються на задачі на умовний екстремум лише за послідовністю коефіцієнтів $\{b(k), k \geq 0\}$ матричної фукнції $b(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)e^{-ik\lambda}$.

Лема 4.2. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома та допускає канонічну факторизацію (8). Тоді спектральна щільність $g^0(\lambda)$ також допускає канонічні факторизації (7), (9) та буде найменш сприятливою для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\zeta$, якщо*

$$f(\lambda) + g^0(\lambda) = TV(\lambda)d^0(\lambda/T)\left(V(\lambda)d^0(\lambda/T)\right)^*,$$

де $d^0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}$ з матричними коефіцієнтами $\{d^0(k), k \geq 0\}$, які визначаються розв'язками $\{b^0(k), k \geq 0\}$ задачі на умовний екстремум

$$\left\| C^{\vec{\zeta}} \overline{b} \right\|^2 \to \inf, \qquad g(\lambda) = TV(\lambda)d(\lambda/T)\left(V(\lambda)d(\lambda/T)\right)^* - f(\lambda) \in D_g. \tag{20}$$

Лема 4.3. *Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома та допускає канонічну факторизацію (9). Тоді спектральна щільність $f^0(\lambda)$ також допускає канонічні факторизації (7), (8) та буде найменш сприятливою для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\zeta$, якщо*

$$f^0(\lambda) + g(\lambda) = TV(\lambda)d^0(\lambda/T)\left(V(\lambda)d^0(\lambda/T)\right)^*,$$

де $d^0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}$ з матричними коефіцієнтами $\{d^0(k), k \geq 0\}$, які визначаються розв'язками $\{b^0(k), k \geq 0\}$ задачі на умовний екстремум

$$\left\| C^{\vec{\theta}} \overline{b} \right\|^2 \to \inf, \qquad f(\lambda) = TV(\lambda)d(\lambda/T)\left(V(\lambda)d(\lambda/T)\right)^* - g(\lambda) \in D_f. \tag{21}$$

Найменш сприятливі спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h^0; f, g\right) \leq \Delta\left(h^0; f^0, g^0\right) \leq \Delta\left(h; f^0, g^0\right), \qquad \forall h \in H_D,\ \forall f \in D_f,\ \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f^0, g^0)$, $h(f^0, g^0) \in H_D$ та (f^0, g^0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\Delta\left(h(f^0, g^0); f, g\right) \to \sup, \qquad (f, g) \in D, \tag{22}$$

де функціонал

$$\Delta\left(h(f^0,g^0);f,g\right) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}\left(r^{\vec{\theta},0}(e^{i\lambda})\right)^{\top} b^0(\lambda)V^{-1}(T\lambda)f(T\lambda)V(T\lambda)\left(b^0(\lambda)\right)^{*}\overline{r^{\vec{\theta},0}(e^{i\lambda})}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}\left(r^{\vec{\zeta},0}(e^{i\lambda})\right)^{\top} b^0(\lambda)V^{-1}(T\lambda)g(T\lambda)V(T\lambda)\left(b^0(\lambda)\right)^{*}\overline{r^{\vec{\zeta},0}(e^{i\lambda})}\,d\lambda$$

лінійно залежить від невідомих щільностей (f,g) із множини допустимих щільностей D, функції $r^{\vec{\zeta},0}(e^{i\lambda})$, $r^{\vec{\theta},0}(e^{i\lambda})$ обчислюються за формулами (14), (17) за умови $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)=f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)$, $f^{\vec{\theta}}(\lambda)=f^{\vec{\theta},0}(\lambda)$.

Задача на умовний екстремум (22) еквівалентна наступній задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g) = -\Delta\left(h(f^0,g^0);f,g\right)+\delta((f,g)\mid D)\to\inf,$$

де $\delta((f,g)\mid D)$ — індикаторна функція множини D. Розв'язок (f^0,g^0) останньої задачі визначається умовою $0\in\partial\Delta_D(f^0,g^0)$, де $\partial\Delta_D(f^0,g^0)$ — субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f,g)$ в точці $(f,g)=(f^0,g^0)$ [20].

5. Найменш сприятливі спектральні щільності у класі $D_{F,G}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A\zeta$ від T-періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ для множини спектральних щільностей T-вимірних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(j)$ та $\vec{\theta}(j)$, які отримані розбиттям $\zeta(j)$ та $\theta(j)$ на блоки довжини T:

$$D_{F,G}=\left\{\left(f^{\vec{\zeta}}(\lambda),f^{\vec{\theta}}(\lambda)\right):\frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\zeta}}(T\lambda)V(T\lambda)\,d\lambda=F,\ \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}V^{-1}(T\lambda)f^{\vec{\theta}}(T\lambda)V(T\lambda)\,d\lambda=G\right\},\tag{23}$$

де F, G — задані числові матриці. Розв'завши задачу на умовний екстремум (22) за допомогою методу невизначених множників Лагранжа знаходимо, що найменш сприятливі спектральні щільності $f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)$ та $f^{\vec{\theta},0}(\lambda)$ задовольняють наступні співвідношення:

$$\overline{V(T\lambda))}\left(b^0(\lambda)\right)^{\top}r^{\vec{\zeta},0}(\lambda)\left(r^{\vec{\zeta},0}(\lambda)\right)^{*}\overline{b^0(\lambda)}V^{\top}(T\lambda)=\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{*},$$

$$\overline{V(T\lambda))}\left(b^0(\lambda)\right)^{\top}r^{\vec{\theta},0}(\lambda)\left(r^{\vec{\theta},0}(\lambda)\right)^{*}\overline{b^0(\lambda)}V^{\top}(T\lambda)=\vec{\beta}\vec{\beta}^{*},$$

де $\vec{\alpha}=(\alpha_0,\dots,\alpha_{T-1})^{\top}$, $\vec{\beta}=(\beta_0,\dots,\beta_{T-1})^{\top}$ — невизначені множники Лагранжа. Останні співвідношення виконуються, якщо

$$r^{\vec{\zeta},0}(e^{i\lambda})=\left(V(T\lambda)d^0(\lambda)\right)^{\top}\vec{\alpha},$$

$$r^{\vec{\theta},0}(e^{i\lambda})=\left(V(T\lambda)d^0(\lambda)\right)^{\top}\vec{\beta}.$$

Тоді найменш сприятливі щільності задовольняють співвідношення

$$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)+f^{\vec{\theta},0}(\lambda)=\vec{\gamma}\left(r^{\vec{\zeta},0}(e^{i\lambda/T})\right)^{\top}\overline{r^{\vec{\zeta},0}(e^{i\lambda/T})}\vec{\gamma}^{*},\tag{24}$$

$$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)+f^{\vec{\theta},0}(\lambda)=\vec{\delta}\left(r^{\vec{\theta},0}(e^{i\lambda/T})\right)^{\top}\overline{r^{\vec{\theta},0}(e^{i\lambda/T})}\vec{\delta}^{*},\tag{25}$$

де $\vec{\gamma}=(\alpha_0,\dots,\gamma_{T-1})^{\top}$, $\vec{\delta}=(\delta_0,\dots,\delta_{T-1})^{\top}$ та $\vec{\gamma}\vec{\alpha}^{\top}=I_T$, $\vec{\delta}\vec{\beta}^{\top}=I_T$.

Невідомі множники Лагранжа $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$, матричні коефіцієнти $\{b^0(k),k\geq 0\}$ визначаються з рівнянь канонічної факторизації (7)–(9) матриць спектральних щільностей

$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)+f^{\vec{\theta},0}(\lambda)$, $f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)$, $f^{\vec{\theta},0}(\lambda)$ та обмежень, що накладаються на щільності з класу $D_{F,G}$.

Якщо одна із спектральних щільностей відома, то для обчислення найменш сприятливих спектральних щільностей заданого класу $D_{F,G}$ використовують одне із співвідношень (24) або (25). Якщо матриця спектральної щільності $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ — відома, то найменш сприятлива спектральна щільність $f^{\vec{\theta},0}(\lambda) \in D_G$ дорівнює

$$f^{\vec{\theta},0}(\lambda) = \left[\vec{\gamma}\left(r^{\vec{\zeta}}\left(e^{i\lambda/T}\right)\right)^{\top}\overline{r^{\vec{\zeta}}\left(e^{i\lambda/T}\right)}\vec{\gamma}^{*} - f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right]_{+}. \tag{26}$$

Якщо матриця спектральної щільності $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ — відома, то найменш сприятлива спектральна щільність $f^{\vec{\zeta},0}(\lambda) \in D_F$ дорівнює

$$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda) = \left[\vec{\delta}\left(r^{\vec{\theta}}\left(e^{i\lambda/T}\right)\right)^{\top}\overline{r^{\vec{\theta}}\left(e^{i\lambda/T}\right)}\vec{\delta}^{*} - f^{\vec{\theta}}(\lambda)\right]_{+}. \tag{27}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 5.1. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)$, $f^{\vec{\theta},0}(\lambda)$ *в класі* $D_{F,G}$ *для оптимальної фільтрації функціонала* $A\zeta$ *визначаються з рівнянь* (24), (25), *факторизацій* (7)–(9), *співвідношень* (18), (19) *та з обмежень класу* $D_{F,G}$. *Мінімаксна спектральна характеристика* $h\big(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta},0}\big)$ *оцінки* $\hat{A}\zeta$ *обчислюється за формулою* (12) *або* (15). *Величина середньоквадратичної похибки* $\Delta\big(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta},0}\big)$ *обчислюється за формулою* (13) *або* (16).

Наслідок 5.1. *Якщо матриця спектральної щільності* $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ *(*$f^{\vec{\theta}}(\lambda)$*) відома та допускає канонічну факторизацію* (8) *(*(9)*), тоді найменш сприятлива спектральна щільність* $f^{\vec{\theta},0}(\lambda)$ *(*$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)$*) визначається співвідношеннями* (26), (20), (7)–(9) *(*(27), (21), (7)–(9)*) та обмеженнями класу* $D_{F,G}$. *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta},0})$ *оцінки* $\hat{A}\zeta$ *обчислюється за формулою* (12) *або* (15). *Величина середньоквадратичної похибки* $\Delta(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta},0})$ *обчислюється за формулою* (13) *або* (16).

Приклад 5.1. Нехай $T=1$, $f^{\vec{\theta}}(\lambda) = \left|1-\sqrt{2}e^{-i\lambda}\right|^2$ та $F=5$. Оцінимо функціонал $A\zeta = \kappa\zeta(0)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Для обчислення найменш сприятливої спектральної щільності застосуємо формулу (27). Необхідні коефіцієнти $\{b(0), b(1)\}$ є розв'язками задачі (21) на умовний екстремум

$$\begin{cases} (3b(0)-\sqrt{2}b(1))^2 + 2b^2(0) \to \min, \\ b^2(0) - b^2(1) = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Тоді найменш сприятлива спектральна щільність з класу D_F має вигляд

$$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda) = \left[\frac{16}{3}\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\lambda}\right|^2 - \left|1-\sqrt{2}e^{-i\lambda}\right|^2\right]_{+}.$$

Зауважимо, що $f^{\vec{\zeta},0}(\lambda)$ не залежить від значення коефіцієнта κ.

Мінімаксна спектральна характеристика, обчислена за формулою (15), дорівнює

$$h(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta}}) = \frac{\kappa}{2}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2i\lambda}\right).$$

Згідно формули (10) шукана оцінка функціонала $A\zeta$ дорівнює

$$\hat{A}\zeta = \frac{\kappa}{2}(\zeta(0)+\theta(0)) + \frac{\kappa}{4}(\zeta(-2)+\theta(-2)).$$

Середньоквадратична похибка $\hat{A}\zeta$ приймає найбільше значення $\Delta\big(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta}}\big) = \frac{5}{2}\kappa^2$.

Приклад 5.2. Нехай $T = 2$, $f^{\vec{\theta}}(\lambda) = I_2$ та $F = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$. Оцінимо функціонал $A\zeta = \frac{7}{2}\zeta(1) - \sqrt{\frac{23}{2}}\zeta(0)$.

Для обчислення найменш сприятливої спектральної щільності застосуємо формулу (27). У випадку найменшого рангу $m = 1$ необхідні матричні коефіцієнти $\{b(0), b(1)\}$ є розв'язками екстремальної задачі (21)

$$\begin{cases} \big(b(0)(\sqrt{23/2}, \sqrt{23/2})^\top - b(1)(7/2, -7/2)^\top\big)\big(b^*(0)(\sqrt{23/2}, \sqrt{23/2}) \\ \qquad -b^*(1)(7/2, -7/2)\big) + \big(b(0)(7/2, -7/2)^\top\big)\big(b^*(0)(7/2, -7/2)\big) \to \min, \\ I_2 + b(1)(I_2 + F)b^*(1) - b(0)(I_2 + F)b^*(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Тоді найменш сприятлива спектральна щільність з класу D_F має вигляд

$$f^{\vec{\zeta},0}(\lambda) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} - \frac{178\sqrt{23}}{10569}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\left(e^{-i\lambda/2} + e^{i\lambda/2}\right).\right]_+.$$

Мінімаксна спектральна характеристика з округленими до сотих числовими коефіцієнтами, обчислена за формулою (15), дорівнює

$$h\left(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta}}\right) \approx \begin{pmatrix} 7.14e^{-i\lambda} - 3.23 \\ -6.74e^{-i\lambda} - 3.61 \end{pmatrix}.$$

Згідно формули (10) шукана оцінка функціонала $A\zeta$ дорівнює

$$\begin{aligned} \hat{A}\zeta \approx{} & -3.23(\xi_0(0) + \eta_0(0)) - 3.61(\xi_1(0) + \eta_1(0)) + 7.14(\xi_0(-1) + \eta_0(-1)) \\ & - 6.74(\xi_1(-1) + \eta_1(-1)). \end{aligned}$$

Середньоквадратична похибка $\hat{A}\zeta$ приймає найбільше значення $\Delta(f^{\vec{\zeta},0}, f^{\vec{\theta}}) \approx 23.37$.

Література

1. Е. Г. Гладышев, *О периодически коррелированных последовательностях*, Доклады Академии наук СССР **137** (1961), № 5, 1026–1029.
2. H. L. Hurd and A. Miamee, *Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 2007.
3. A. Makagon, *Theoretical prediction of periodically correlated sequences*, Probability and Mathematical Statistics **19** (1999), 287–322.
4. A. Makagon, *Stationary sequences associated with a periodically correlated sequence*, Probability and Mathematical Statistics **31** (2011), 263–283.
5. А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Сборник статей, "Наука", Москва, 1986.
6. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. With Engineering Applications*, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966.
7. A. M. Yaglom, *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. Vol. 1: Basic Results*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
8. A. M. Yaglom, *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. Vol. 2: Suplementary Notes and References*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
9. Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, 2-е изд. доп., "Наука", Москва, 1990.
10. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
11. J. Franke, *On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise*, J. Time Series Analysis **5** (1984), 227–244.
12. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **68** (1985), 337–364.

13. J. Franke and H. V. Poor, *Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors*, Robust and Nonlinear Time Series Analysis, Lecture Notes in Statistics, vol. 26, Springer-Verlag, 1984.
14. M. P. Moklyachuk, *Estimates of stochastic processes from observations with noise*, Theory Stoch. Process. **3**(**19**) (1997), no. 3–4, 330–338.
15. M. P. Moklyachuk, *Robust procedures in time series analysis*, Theory Stoch. Process. **6**(**22**) (2000), no. 3–4, 127–147.
16. M. P. Moklyachuk, *Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems*, Theory Stoch. Process. **7**(**23**) (2001), no. 1–2, 253–264.
17. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", Київ, 2008.
18. M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka, *On the problem of filtration for vector stationary sequences*, Theor. Probability and Math. Statist. **75** (2007), 109–119.
19. W. R. Bennett, *Statistics of regenerative digital transmission*, Bell Syst. Tech. **37** (1958), 1501–1542.
20. Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, "Наука", Москва, 1982.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4-Е, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: idubovetska@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4-Е, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Надійшла 21/11/2011