Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 87, 2012, стор. 1–11

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 87, 2012, pp. 1–11

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ПЗВЧ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ ВІДНОВЛЕННЯ

УДК 519.21

В. В. БУЛДИГІН, О. І. КЛЕСОВ І Й. Г. ШТАЙНЕБАХ

Анотація. У статті вивчаються ПЗВЧ для процесів відновлення, побудованих за складними лічильними процесами. Зокрема, встановлено ПЗВЧ для процесів відновлення, побудованих за складним пуассонівським процесом з абсолютно неперервною функцією інтенсивності.

1. Вступ

При вивченні асимптотичної поведінки процесів відновлення, побудованих за випадковими процесами з неперервним або дискретним часом, важливу роль грає взаємозв'язок між асимптотичною поведінкою майже напевно (м.н.) нормованого вихідного процесу та асимптотичною поведінкою майже напевно нормованого відповідним чином процесу відновлення. Характер цього взаємозв'язку залежить від характеру прямування до нескінченності нормувальної функції, [18, 3]. Відповідно до цього для нормувальних функцій розглядаються класи PRV-, SQI- та POV-функцій, [18], [2]–[5]. Ці та подібні до них класи означаються умовами на верхні та нижні граничні функції, перевірка яких може викликати труднощі. У роботі [4] для неперервно диференційовних функцій були знайдені порівняно прості умови, за яких функції належать певному класу.

Разом з цим у теорії відновлення виникають нормувальні функції, які не є неперервно диференційовними, але є абсолютно неперервними. Природно виникає питання про умови, за яких абсолютно неперервні функції належать тому чи іншому класу. Відповідь на це питання розглядається у першій частині роботи для загального класу додатних абсолютно неперервних функцій і, як приклад, для певного класу додатних кусково-лінійних функцій. Встановлені умови мають такий самий вигляд як і для додатних неперервно диференційовних функцій із відповідною заміною похідної на щільність (за Лебегом). Доведення цих фактів не мають принципових труднощів. Разом з цим вони дають можливість отримати нові підсилені закони великих чисел (ПЗВЧ) для процесу відновлення, побудованого за складним лічильним процесом, що зроблено в другій частині роботи.

Статтю побудовано наступним чином. Необхідні означення та властивості деяких классів функцій містить розділ 2. У розділі 3 встановлюються умови, за яких додатні абсолютно неперервні функції належать відповідному класу. Для певного класу додатних кусково-лінійних функцій ці умови конкретизуються в розділі 4. У розділі 5 встановлюється посилений закон великих чисел (ПЗВЧ) для процесу відновлення, побудованого за складним лічильним процесом, а в заключному розділі 6 встановлюється ПЗВЧ для процесу відновлення, побудованого за складним пуассонівським процесом, функція інтенсивності якого є локально інтегровною функцією.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A12; Secondary 26A48.

Робота частково підтримана грантами DFG.

2. Класи функцій

Нехай $\mathbf{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbf{R}_+$ — множина невід'ємних чисел, $\mathbb{F}$ — множина дійсних функцій $f = (f(t), t \geq 0)$;

$$\mathbb{F}_+ = \bigcup_{A>0} \{f \in \mathbb{F} : f(t) > 0, t \in [A, \infty)\};$$

$\mathbb{F}^\infty$ — простір функцій $f \in \mathbb{F}_+$ таких, що $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$; Будемо також розглядти простір $\mathbb{C}^\infty_{\rm inc}$ всіх неперервних зростаючих функцій з простору $\mathbb{F}^\infty$.

У статті "вимірність" розуміємо за Лебегом.

Для $f \in \mathbb{F}_+$ будемо розглядати *верхню* та *нижню граничні функції*:

$$f^*(c) = \limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} \quad \text{та} \quad f_*(c) = \liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)}, \qquad c > 0,$$

значення яких належать множині $[0, \infty]$.

2.1. RV-функції.

У статтях [24, 25] Й. Карамата розглянув функції з *правильною* (*регулярною*) *зміною* і довів для них низку фундаментальних тверджень. Ці результати разом із теорією RV-функцій та їх узагальнень плідно застосовуються в різних напрямах математики, [8, 17].

Про вимірну функцію $f \in \mathbb{F}_+$ кажуть, що вона *правильно змінюється* (RV), якщо $f_*(c) = f^*(c) = \varkappa(c) \in \mathbf{R}_+$ для будь-якого $c > 0$. Для кожної RV-функції f існує число $\rho \in \mathbf{R}$ (*індекс функції* f) таке, що $\varkappa(c) = c^\rho$, $c > 0$. Якщо $\rho = 0$, то кажуть, що функція f *повільно змінюється*.

2.2. ORV-функції.

Про вимірну функцію $f \in \mathbb{F}_+$ кажуть, що вона *O-правильно змінюється* (ORV), якщо

$$f^*(c) < \infty \quad \text{для всіх} \quad c > 0. \tag{1}$$

ORV-функції були впроваджені В. Авакумовичем у роботі [13] і вивчались далі багатьма математиками (див; наприклад, [26, 1, 22, 11, 12]. Монотонні ORV-функції відомі в літературі як функції з *мажорованою зміною*. Зауважимо, що монотонна функція $f \in \mathbb{F}_+$ є ORV тоді і тільки тоді, коли (1) виконується для деякого $c > 1$, [22].

2.3. PRV-функції.

Про вимірну функцію $f \in \mathbb{F}_+$ кажуть, що вона є функцією з *псевдорегулярною зміною* (PRV), якщо

$$\limsup_{c\to 1} f^*(c) = 1. \tag{2}$$

Під різними назвами PRV-функції та їх застосування вивчалися в роботах [7, 6, 28, 29, 31, 32, 14, 15, 10, 19, 20, 21, 27, 18], [2]–[5]. Важливою властивістю PRV-функцій є те, що вони і тільки вони зберігають асимптотичну еквівалентність функцій (див; наприклад, [18]).

2.4. SQI-функції.

Про вимірну функцію $f \in \mathbb{F}_+$ кажуть, що вона є функцією з *достатньо швидким зростанням* (SQI), якщо

$$f_*(c) > 1 \quad \text{для всіх } c > 1. \tag{3}$$

Під різними назвами SQI-функції та їх застосування вивчалися в роботах [9, 21, 18], [2]–[5]. Відзначимо, що будь-яка функція, що повільно змінюється, не є SQI.

2.5. **POV-функції.** Про вимірну функцію $f \in \mathbb{F}_+$ кажуть, що вона є функцією з *позитивним порядком зміни* (POV), якщо f є і PRV, і SQI-функцією, тобто якщо виконуються умови (2) і (3). POV функції та їх застосування вивчались у роботах [18], [2]–[5].

Далі множини всіх ORV- (PRV-, SQI-, POV-) функцій будуть позначатися як $\mathcal{ORV}$ ($\mathcal{PRV}$, $\mathcal{SQI}$, $\mathcal{POV}$).

2.6. **Класи абсолютно неперервних функцій.** *Неперервна додатна функція* $f = (f(t), t \geq t_0)$, $t_0 \geq 0$, належить *класу абсолютно неперервних функцій* $\mathbb{DL}$, якщо

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \theta(u)\, du, \quad t \geq t_0,$$

де інтеграл у правій частині є інтеграл Лебега, а $\theta = (\theta(t), t \geq t_0)$ — *вимірна і локально інтегровна за Лебегом дійсна функція*, тобто для будь-якого $t > t_0$

$$\int_{t_0}^{t} |\theta(u)|\, du < \infty.$$

Функцію θ називають *щільністю* (*щільністю Лебега*) функції f. *Функцію* f, *яка має щільність* θ, *будемо позначати* f_θ.

3. Інтегральні зображення та характеризація властивостей абсолютно неперервних функцій

У цьому розділі для абсолютно неперервних функцій встановлюються інтегральні зображення, з яких випливають характеризаційні умови для відповідних "регулярних властивостей" функцій з класу $\mathbb{DL}$.

Твердження 1. *Нехай* $f \in \mathbb{DL}$ *і* θ — *щільність функції* f. *Тоді:*

$$f(t) = f(t_0) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{\theta(u)}{f(u)}\, du \right\}, \quad t \geq t_0; \tag{4}$$

$$f^*(c) = \limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \exp\left\{ \limsup_{t\to\infty} \int_{t}^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\, du \right\}, \quad c > 0, \tag{5}$$

і

$$f_*(c) = \liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \exp\left\{ \liminf_{t\to\infty} \int_{t}^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\, du \right\}, \quad c > 0. \tag{6}$$

Доведення твердження 1. Співвідношення (4) виконується для неперервної щільності θ, оскільки у цьому випадку $\theta(t) = f'(t)$, $t \geq t_0$, і тому

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\theta(u)}{f(u)}\, du = \int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du = \ln\left(f(t)/f(t_0)\right).$$

Оскільки співвідношення (4) виконується для неперервних щільностей θ, то з неперервності функції f випливає, що воно виконується і для кусково-постійних щільностей θ. Для завершення доведення співвідношення (4) скористаємось тим, що за означенням класу $\mathbb{DL}$ функція θ є локально інтегровною, і тому на будь-якому фіксованому відрізку $[t_0, T]$ її можна наблизити в середньому послідовністю кусково-постійних функцій.

Далі, з (4) дістаємо, що при $c > 0$ і $t \geq \max\{t_0, t_0/c\}$ виконується рівність

$$\frac{f(ct)}{f(t)} = \exp\left\{ \int_{t}^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\, du \right\},$$

з якої, у свою чергу, випливають співвідношення (5) і (6). □

З інтегральних співвідношень (4) – (6) випливають характеризаційні умови, за яких для абсолютно неперервних функцій справджуються певні “регулярні властивості”.

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathbb{DL}$ і θ — щільність функції f. Тоді:*

1) *$f \in \mathcal{ORV}$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $c > 1$*
$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du \quad i \quad \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du < \infty;$$
2) *якщо щільність θ є невід’ємною, то $f \in \mathcal{ORV}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться $c_0 > 1$ таке, що*
$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{c_0 t} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du < \infty;$$
3) *$f \in \mathcal{PRV}$ тоді і тільки тоді, коли*
$$\limsup_{c\to 1} \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du = 0; \tag{7}$$
4) *якщо щільність θ є невід’ємною, то $f \in \mathcal{PRV}$ тоді і тільки тоді, коли*
$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du = 0;$$
5) *$f \in \mathcal{SQI}$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $c > 1$*
$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du > 0; \tag{8}$$
6) *$f \in \mathcal{POV}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (7) і (8);*
7) *f є RV-функцією з індексом ρ тоді і тільки тоді, коли для всіх $c > 1$ існує границя*
$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\theta(u)}{f(u)}\,du = \rho \in (-\infty, \infty).$$

З теореми 1 випливають прості достатні умови.

Теорема 2. *Нехай $f \in \mathbb{DL}$, θ — щільність функції f. Тоді:*

1) *якщо*
$$-\infty < \liminf_{u\to\infty} \frac{u\theta(u)}{f(u)} \quad i \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{u\theta(u)}{f(u)} < \infty$$
або, що рівносильно,
$$\limsup_{u\to\infty} \frac{u|\theta(u)|}{f(u)} < \infty, \tag{9}$$
то $f \in \mathcal{PRV}$;
2) *якщо*
$$\liminf_{u\to\infty} \frac{u\theta(u)}{f(u)} > 0,$$
то $f \in \mathcal{SQI}$;
3) *якщо*
$$0 < \frac{u\theta(u)}{f(u)} \quad i \quad \limsup_{u\to\infty} \frac{u\theta(u)}{f(u)} < \infty,$$
то $f \in \mathcal{POV}$;

4) *якщо існує границя*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u\theta(u)}{f(u)}=\rho\in(-\infty,\infty),$$

то f є RV-функцією з індексом ρ.

Доведення теореми 2. Нехай виконується умова (9). Оскільки для будь-яких $c>0$ і $t>0$

$$\Big|\int_t^{ct}\frac{\theta(u)}{f(u)}\,du\Big|=\Big|\int_t^{ct}\frac{u\theta(u)}{f(u)}\,\frac{du}{u}\Big|$$
$$\le\left(\sup_{u\ge t}\Big|\frac{u\theta(u)}{f(u)}\Big|\right)\cdot\Big|\int_t^{ct}\frac{du}{u}\Big|=\left(\sup_{u\ge t}\Big|\frac{u\theta(u)}{f(u)}\Big|\right)|\ln c|,$$

то

$$\limsup_{c\to1}\limsup_{t\to\infty}\Big|\int_t^{ct}\frac{\theta(u)}{f(u)}\,du\Big|\le\limsup_{c\to1}|\ln c|\cdot\limsup_{u\to\infty}\Big|\frac{u\theta(u)}{f(u)}\Big|=0.$$

Отже, виконується умова (7) і твердження 1) випливає з твердження 2) теореми 1. Так само доводяться твердження 2)–4). □

4. Властивості додатних кусково-лінійних функцій

Для послідовності $\{a_n\}=\{a_n\}_{n\ge0}$, де $a_0=0$, $a_n>0$, $n\ge1$, і послідовності $\{t_n\}=\{t_n\}_{n\ge0}$, де $t_0=0$, $t_{n+1}-t_n>0$, $n\ge0$, $t_n\to\infty$, розглянемо *кусково-лінійну функцію*, тобто неперервну функцію

$$\mathcal{L}(t)=a_n+\frac{\Delta a_n}{\Delta t_n}(t-t_n),\quad t\in[t_n,t_{n+1}),\quad n\ge0,\tag{10}$$

де $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$, $\Delta t_n=t_{n+1}-t_n$, $n\ge0$.

Функція $\mathcal{L}$ є додатною на $(0,\infty)$ кусково-лінійною функцією з умовою $\mathcal{L}(0)=0$. Ця функція є абсолютно неперервною і має щільність $\theta_{\mathcal{L}}=(\theta_{\mathcal{L}}(t),t\ge0)$, де

$$\theta_{\mathcal{L}}(t)=\frac{\Delta a_n}{\Delta t_n},\quad t\in[t_n,t_{n+1}),\quad n\ge0.\tag{11}$$

Тому $\mathcal{L}$ належить класу $\mathbb{DL}$, для будь-якого $t_0>0$.

Для спрощення будемо вважати, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n}=1.\tag{12}$$

Наприклад, ця умова виконується, якщо $t_n=n^\beta$, $n\ge1$, де $\beta>0$.

Враховуючи співвідношення (10) – (12), бачимо, що

$$\epsilon^*(\mathcal{L},\theta_{\mathcal{L}})=\limsup_{n\to\infty}\frac{t_n\Delta a_n}{a_n\Delta t_n}\tag{13}$$

і

$$\epsilon_*(\mathcal{L},\theta_{\mathcal{L}})=\liminf_{t\to\infty}\frac{t_n\Delta a_n}{a_n\Delta t_n}.\tag{14}$$

Із теореми 2 і співвідношень (13), (14) випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай для кусково-лінійної функцієї $\mathcal{L}$ виконується умова* (12). *Тоді:*

1) *якщо*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{t_n\Delta a_n}{a_n\Delta t_n}>-\infty\quad i\quad\limsup_{n\to\infty}\frac{t_n\Delta a_n}{a_n\Delta t_n}<\infty,$$

то $\mathcal{L}\in\mathcal{PRV}$;

2) *якщо послідовності* $\{a_n\}$ *є неспадною і*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{t_n \Delta a_n}{a_n \Delta t_n} < \infty, \tag{15}$$

то $\mathcal{L} \in \mathcal{PRV}$;

3) *якщо*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{t_n \Delta a_n}{a_n \Delta t_n} > 0, \tag{16}$$

то $L \in \mathcal{SQI}$;

4) *якщо виконуються умови* (15) *і* (16) *то* $\mathcal{L} \in \mathcal{POV}$;

5) *якщо існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n \Delta a_n}{a_n \Delta t_n} = \rho \in (-\infty, \infty),$$

то $\mathcal{L}$ *є RV-функцією з індексом* ρ.

5. Узагальнені процеси відновлення для складних лічильних процесів

Нехай $(\nu(t), t \geq 0)$ — випадковий "лічильний" процес, значення якого належать множині невід'ємних цілих чисел і траєкторії якого є майже напевно неперервними справа східчастими неспадними функціями. Припустимо що

$$\nu(0) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \nu(t) = \infty \qquad \text{м.н.}$$

і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{f(t)} = 1 \qquad \text{м.н.}, \tag{17}$$

де $f \in \mathbb{F}^\infty$. Крім того, нехай $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ — послідовність випадкових величин, яка незалежна з процессом $\nu(\cdot)$ і така, що для деякої випадкової величини $\eta \in (0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} = \eta \qquad \text{м.н.}, \tag{18}$$

Наприклад, якщо

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad n \geq 1,$$

де $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичним сподіванням $\mu \in (0, \infty)$, то з ПЗВЧ Колмогорова випливає (18) при $\eta = \mu$.

За допомогою процесу $\nu(\cdot)$ і послідовності $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ побудуємо *складний лічильний процес*

$$X(t) = Z_{\nu(t)}, \quad t \geq 0. \tag{19}$$

Вважаємо що $X(t) = 0$, якщо $\nu(t) = 0$.

З співвідношень (17) і (18) випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{\nu(t)} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{f(t)} = \eta \qquad \text{м.н.} \tag{20}$$

Оскільки майже напевно траєкторії процесу X є неперервними справа східчастими функціями, то процес X є вимірним сепарабельним дійснозначним випадковим процесом. Крім того, $X \in \mathbb{F}^\infty$ м.н.

Для процесу X коректно означені наступні три *узагальнені процеси відновлення*:

$$M_X^+(s) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq s\}, \quad s \geq 0,$$
$$L_X(s) = \sup\{t \geq 0 : X(t) \leq s\}, \quad s \geq 0,$$
$$T_X(s) = \int_0^\infty \mathbb{I}\{X(t) \leq s\}\, dt, \quad s \geq 0.$$

які для скорочення будемо також називати *процесами відновлення*.

Розглянуті вище процеси відновлення є неспадними і

$$M_X^+(s) \le T_X(s) \le L_X(s) \tag{21}$$

при $s \ge 0$.

Існують також інші версії узагальнених процесів відновлення, але ми зосередимо увагу лише на трьох означених вище процесах, використовуючи іноді загальне позначення R_X.

Процеси відновлення M_X^+, L_X і T_X мають природний "фізичний"зміст. При $s > 0$ випадкову величину $M_X^+(s)$ можна трактувати як "*момент першого досягнення*"процесом X множини $[s, \infty)$ або як "*момент першого виходу*"з множини $(-\infty, s)$. У свою чергу, випадкові величини $L_X(s)$ і $T_X(s)$ можна розуміти як "*момент останнього виходу*"процесу X з множини $(-\infty, s]$ і як "*загальний час перебування*"цього процесу в множині $(-\infty, s]$, відповідно.

За умови $f \in \mathcal{PRV}$ для процесів відновлення складного лічильного процесу справджується настуна версія ПЗВЧ.

Теорема 3. *Нехай X — складний лічильний процес, означений у* (19), *$f \in \mathcal{PRV}$ і виконуються співвідношення* (17), (18). *Тоді:*

1) *виконується наступний ПЗВЧ:*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(M_X^+)}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(L_X(s))}{s} = \frac{1}{\eta} \qquad \text{м.н.};$$

2) *якщо f або сама є неспадною функцією, або є асимптотично еквівалентною до неспадної функції, то*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(M_X^+(s))}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(L_X(s))}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(T_X(s))}{s} = \frac{1}{\eta} \qquad \text{м.н.}$$

Доведення теореми 3. Оскільки $f \in \mathcal{PRV}$, то враховуючи ПЗВЧ (20) бачимо, що майже напевно $X \in \mathcal{PRV}$. Звідси та з (леми 6.1, [2]) випливає, що процеси відновлення M_X^+ і L_X є майже напевно квазіоберненими до процесу X, тобто

$$\lim_{s\to\infty} \frac{X(M_X^+(s))}{s} = 1 \qquad \text{м.н.} \quad \text{і} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{X(L_X(s))}{s} = 1 \qquad \text{м.н.}$$

Знову враховуючи (20) дістаємо, що

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(M_X^+(s))}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(M_X^+(s))}{X(M_X^+(s))} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{X(s)} = \frac{1}{\eta} \qquad \text{м.н.}$$

і так само

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(L_X(s))}{s} = \frac{1}{\eta} \qquad \text{м.н.}$$

що доводить твердження 1). Із твердження 1) та співвідношення (21) випливає твердження 2). $\square$

Якщо функція f є POV-функцією, то за (теоремою 9.2, [3]) ПЗВЧ (20) рівносильно з наступним ПЗВЧ для процесів відновлення:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_X^+(s)}{f^{\sim}(s/\eta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{L_X(s)}{f^{\sim}(s/\eta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{T_X(s)}{f^{\sim}(s/\eta)} = 1 \qquad \text{м.н.} \tag{22}$$

де $f^{\sim}$ — асимптотично квазіобернена до f функція. Нагадаємо (див. [2]), що функцію $f^{\sim}$ називають *асимптотично квазіоберненою* до функції $f \in \mathbb{F}^{(\infty)}$, якщо

$$f^{\sim} \in \mathbb{F}^{\infty} \quad \text{і} \quad f(f^{\sim}(s))/s \to \infty, \quad s \to \infty.$$

Отже, за умови $f \in \mathcal{POV}$ для процесів відновлення складного лічильного процесу справджується настуний ПЗВЧ.

Теорема 4. *Нехай X — складний лічильний процес, означений у* (19), $f \in \mathcal{POV}$ *і виконуються співвідношення* (17), (18). *Тоді:*

1) *для будь-якої асимптотично квазіоберненої до f функції $f^{\sim}$ виконується ПЗВЧ* (22);
2) *якщо f — RV-функція з додатним індексом ρ, то для будь-якої асимптотично квазіоберненої до f функції $f^{\sim}$*
$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_X^+(s)}{f^{\sim}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{L_X(s)}{f^{\sim}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{T_X(s)}{f^{\sim}(s)} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{м.н.};$$
3) *твердження 1) і 2) справджуються при*
$$f^{\sim} \in \{M_f^+,\, L_f,\, T_f\};$$
4) *якщо $f \sim f_0 \in \mathbb{C}_{inc}^{\infty}$, то твердження 1) і 2) справджуються при $f^{\sim} = f_0^{-1}$, де f_0^{-1} — обернена до f_0 функція.*

6. Узагальнені процеси відновлення для складного пуассонівського процесу

Нехай $(\nu(t), t \geq 0)$ — пуассонівський (необов'язково однорідний) процес з невід'ємною вимірною функцією інтенсивності $(\lambda(t), t \geq 0)$ такою, що
$$\int_0^t \lambda(s)\, ds < \infty \quad \text{для будь-якого } \; t > 0, \quad \text{і} \quad \int_0^\infty \lambda(s)\, ds = \infty. \tag{23}$$

Покладемо
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \qquad t > 0, \tag{24}$$
і зауважимо, що $(\nu(t), t \geq 0)$ є випадковим процесом з незалежними приростами таким, що при $0 \leq t_1 < t_2$ випадкова величина $\nu(t_2) - \nu(t_1)$ є пуассонівською з параметром $\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)$. Значеннями цього процесу є всі невід'ємні цілі числа а, його траєкторії є майже напевно неперервними справа східчастими неспадними функціями. Якщо $\lambda(s) > 0$, $s \geq 0$, то $\Lambda \in \mathbb{C}_{\mathrm{inc}}^{\infty}$.

Нехай $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ — така послідовність, що $\tau_0 = 0$ і $\Lambda(\tau_n) = n$, $n \geq 1$. Якщо $n(t) = \max\{n\colon \tau_n \leq t\}$, $t > 0$, то за ПЗВЧ Колмогорова
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(\tau_{n(t)})}{\Lambda(\tau_{n(t)})} = \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(\tau_{n(t)})}{n(t)} = 1 \qquad \text{м.н.}$$
Оскільки для будь-якого $t > 0$
$$n(t) = \Lambda(\tau_{n(t)}) \leq \Lambda(t) \leq \Lambda(\tau_{n(t)+1}) = n(t) + 1,$$
$$\frac{n(t)}{n(t)+1} \cdot \frac{\nu(\tau_{n(t)})}{n(t)} \leq \frac{\nu(t)}{\Lambda(t)} \leq \frac{n(t)+1}{n(t)} \cdot \frac{\nu(\tau_{n(t)+1})}{n(t)+1}$$
та $\lim_{t\to\infty} n(t) = \infty$, то
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{\Lambda(t)} = 1 \qquad \text{м.н.}, \tag{25}$$
тобто виконується умова (17) при $f = \Lambda$.

Складний лічильний процес $X(t) = Z_{\nu(t)}$ (див. (19)), де $(\nu(t), t \geq 0)$ є означеним вище пуассонівським процесом будемо називати *складним пуассонівським процесом.*

Застосовуючи теореми 3 – 4 та співвідношення (25), дістаємо наступний результат.

Теорема 5. *Нехай X — складний пуассонівський процес, означений у (19), де $(\nu(t), t \geq 0)$ — пуассонівський процес з невід'ємною вимірною функцією інтенсивності $(\lambda(s), s \geq 0)$, для якої виконується умова (23). Тоді:*

1) *якщо $\Lambda \in \mathcal{PRV}$, то*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Lambda(M_X^+(s))}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\Lambda(L_X(s))}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\Lambda(T_X(s))}{s} = \frac{1}{\eta} \qquad \text{м.н.};$$

2) *якщо $\Lambda \in \mathcal{POV}$, то*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_X^+(s)}{\Lambda^{\sim}(s/\eta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{L_X(s)}{\Lambda^{\sim}(s/\eta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{T_X(s)}{\Lambda^{\sim}(s/\eta)} = 1 \qquad \text{м.н.},$$

де $\Lambda^{\sim}$ — будь-яка асимптотично квазіобернена до Λ функція;

3) *якщо $\lambda(s) > 0$, $s \geq 0$, і $\Lambda \in \mathcal{POV}$, то*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_X^+(s)}{\Lambda^{-1}(s/\eta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{L_X(s)}{\Lambda^{-1}(s/\eta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{T_X(s)}{\Lambda^{-1}(s/\eta)} = 1 \qquad \text{м.н.},$$

де Λ^{-1} — обернена до Λ функція;

4) *якщо Λ — RV-функція з додатним індексом ρ, то*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_X^+(s)}{\Lambda^{\sim}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{L_X(s)}{\Lambda^{\sim}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{T_X(s)}{\Lambda^{\sim}(s)} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{м.н.},$$

де $\Lambda^{\sim}$ — будь-яка асимптотично квазіобернена до Λ функція;

5) *якщо $\lambda(s) > 0$, $s \geq 0$, і Λ — RV-функція з додатним індексом ρ, то*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_X^+(s)}{\Lambda^{-1}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{L_X(s)}{\Lambda^{-1}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{T_X(s)}{\Lambda^{-1}(s)} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{м.н.}$$

де Λ^{-1} — обернена до Λ функція;

6) *твердження 2) і 4) справджуються при $\Lambda^{\sim} \in \{M_\Lambda^+, L_\Lambda, T_\Lambda\}$.*

Зауваження 1. Функція Λ є абсолютно неперервною функцією з щільністю λ. Необхідні та достатні умови, за яких абсолютно неперервні функції належать певним класам функцій, зокрема класу POV функцій, розглядались у теоремі 1. Наприклад, якщо виконується умова (23), то $\Lambda \in \mathcal{POV}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\limsup_{c\to 1} \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\lambda(u)}{\Lambda(u)} du = 0$$

і

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{\lambda(u)}{\Lambda(u)} du > 0$$

для всіх $c > 1$.

Нижче приведені деякі прості достатні умови, за яких $\Lambda \in \mathcal{POV}$.

Твердження 2. *Нехай для невід'ємної вимірної функції інтенсивності λ разом з умовою (23) виконується принаймні одна з наступних умов:*

1)

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{t\lambda(t)}{\Lambda(t)} \quad i \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{t\lambda(t)}{\Lambda(t)} < \infty;$$

2) *знайдеться $\alpha > -1$ таке, що*

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} \quad i \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} < \infty;$$

3) $\liminf_{c\downarrow 1} \lambda^*(c) \leq 1$ *і* $c\lambda_*(c) > 1$ *для будь-якого* $c > 1$;

4) λ *є RV-функцією з індексом* $\rho \in (-1, \infty)$.

Тоді $\Lambda \in \mathcal{POV}$ і разом з цим справджуються твердження 2), 3), 6) з теореми 5.

6.1. **Процеси відновлення для складного пуассонівського процесу з кусково-сталими функціями інтенсивності.** Нехай пуассонівський процес $\nu(\cdot)$ має *додатну кусково-сталу функцію інтенсивності* $(\lambda(t), t \geq 0)$:

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \mathbb{1}\{t \in [t_n, t_{n+1})\}, \quad t \geq 0, \tag{26}$$

таку, що

$$\lambda_n > 0,\ n \geq 1; \quad t_0 = 0;\ \Delta t_n = t_{n+1} - t_n > 0,\ n \geq 0; \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \tag{27}$$

і

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \Delta t_n = \infty. \tag{28}$$

З (26)–(28) випливає, що функція Λ (див. (24)) є додатною зростаючою кусково-лінійною функцією:

$$\Lambda(t) = \Lambda_n + \lambda_{n+1}(t - t_n), \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad n \geq 0,$$

де

$$\Lambda_0 = 0 \quad \text{i} \quad \Lambda_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k+1} \Delta t_k, \quad n \geq 0,$$

для якої справджується умова (23).

З властивостей кусково-лінійних функцій, які вивчалися у розділі 4, випливають умови на послідовності $\{\lambda_n\}$ і $\{t_n\}$, за яких $\Lambda \in \mathcal{POV}$.

Приклад 1. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$$

і

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{t_n \lambda_{n+1}}{\Lambda_n}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{t_n \lambda_{n+1}}{\Lambda_n} < \infty,$$

то з наслідку 1 випливає, що $\Lambda \in \mathcal{POV}$ і справджується твердження 3) у теоремі 5.

Література

1. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшее приближение и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. матем. об-ва **5** (1956), 483–522.
2. В. В. Булдигін, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах, *Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **70** (2004), 9–25.
3. В. В. Булдигін, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах, Теорія ймовір.та матем. статист. *Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. II*, **71** (2004), 34–48.
4. В. В. Булдигін, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах, *PRV ластивість фунуцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь*, Теорія ймовір.та матем. статист. **72** (2005), 10–23.
5. В. В. Булдигін, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах, *Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій*, Теорія ймовір.та матем. статист. **77** (2007), 13–27.
6. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, “Наукова думка”, Киев, 1968 .
7. Б. И. Коренблюм, *Об асимптотическом поведении интегралов Лапласа вблизи границы области сходимости*, Докл. Акад. Наук. СССР (Н.С.) **109** (1956), 173–176.
8. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, “Наука”, Москва, 1985.
9. А. Л. Якымив, *Асимптотические свойства моментов изменения состояний в случайном процессе рекордов*, Теор. вероятн. и ее примен. **31** (1986), 577–581.
10. А. Л. Якымив, *Асимптотики вероятностей невырождающихся критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса*, Тр. Матем. ин-та Стеклова **4** (1988), 189–217.

11. S. Aljančić and D. Arandelović, *O-regularly varying functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **22 (36)** (1977), 5–22.
12. D. Arandelović, *O-regular variation and uniform convergence*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **48 (62)** (1990), 25–40.
13. V. G. Avakumović, *Über einen O-Inversionssatz*, Bull. Int. Acad. Youg. Sci. **29–30** (1936), 107–117.
14. S. M. Berman, *Sojourns and extremes of a diffusion process on a fixed interval*, Adv. Appl. Prob. **14** (1982), 811–832.
15. S. M. Berman, *The tail of the convolution of densities and its application to a model of HIV-latency time*, Ann. Appl. Prob. **2** (1992), 481–502.
16. N. H. Bingham and C. M. Goldie, *Extensions of regular variation, I, II*, Proc. London. Math. Soc. **44** (1982), 473–534.
17. N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
18. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, *Properties of a subclass of Avakumović functions and their generalized inverses*, Ukrain. Mat. Zh. **54** (2002), 149–169.
19. D. B. H. Cline, *Intermediate regular and* Π*-variation*, Proc. London Math. Soc. **68** (1994), 594–616.
20. D. Djurčić, *O-regularly varying functions and strong asymptotic equivalence*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 451–461.
21. D. Djurčić and A. Torgašev, *Strong asymptotic equivalence and inversion of functions in the class* K_c, J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), 383–390.
22. W. Feller, *One-sided analogues of Karamata's regular variation*, L'Enseignement Math. **15** (1969), 107–121.
23. L. de Haan and U. Stadtmüller, *Dominated variation and related concepts and Tauberian theorems for Laplace transformations*, J. Math. Anal. Appl. **108** (1985), 344–365.
24. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj) **4** (1930), 38–53.
25. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière. Théoremès fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France **61** (1933), 55–62.
26. J. Karamata, *Bemerkung über die vorstehende Arbeit des Herrn Avakumović, mit näherer Betrachtung einer Klasse von Funktionen, welche bei den Inversionssätzen vorkommen*, Bull. Int. Acad. Youg. Sci. **29–30** (1936), 117–123.
27. O. Klesov, Z. Rychlik, and J. Steinebach, *Strong limit theorems for general renewal processes*, Probab. Math. Statist. **21** (2001), 329–349.
28. W. Matuszewska, *On a generalization of regularly increasing functions functions*, Studia Math. **24** (1964), 271–279.
29. W. Matuszewska and W. Orlicz, *On some classes of functions with regard to their orders of growth*, Studia Math. **26** (1965), 11–24.
30. S. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer-Verlag, New York, 1987.
31. U. Stadtmüller and R. Trautner, *Tauberian theorems for Laplace transforms*, J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 283–290.
32. U. Stadtmüller and R. Trautner, *Tauberian theorems for Laplace transforms in dimension* $D > 1$, J. Reine Angew. Math. **323** (1981), 127–138.

Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, National Technical University of Ukraine (KPI), pr. Peremogy, 37, 03056 Kyiv, Ukraine

Адреса електронної пошти: matanntu-kpi.kiev.ua

Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, National Technical University of Ukraine (KPI), pr. Peremogy, 37, 03056 Kyiv, Ukraine

Адреса електронної пошти: klesovmath.uni-paderborn.de

Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, D–50931 Köln, Germany

Адреса електронної пошти: jostmath.uni-koeln.de

Надійшла 03/02/2012