Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 87, 2012, стор. 12–27
Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 87, 2012, pp. 12–27

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМ СО СЛАБО ЭРГОДИЧЕСКИМИ МАРКОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ I

УДК 519.21

А. Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ И А. М. КУЛИК

Аннотация. Получены результаты о диффузионной аппроксимации для системы, возмущенной процессом Маркова, для которого сходимость вероятностей перехода к инвариантному распределению не равномерна по начальному значению и, вообще говоря, имеет место в более слабом смысле, чем сходимость по вариации.

Анотація. Отримано результати про дифузійну апроксимацію для системи, збуреної процесом Маркова, для якого збіжність ймовірностей переходу до інваріантного розподілу не рівномірна за початковим значенням та, взагалі кажучи, має місце у сенсі більш слабкому, ніж збіжність за варіацією.

Abstract. Diffusion approximation type results are obtained for a system perturbed by a Markov process such that its transition probabilities converge to the invariant distribution non-uniformly w.r.t. starting point and, in general, in a way weaker than the total variation convergence.

1. Введение

Мы исследуем предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ семейства Y^ε, $\varepsilon > 0$, решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), коэффициенты которых зависят от "быстрой" случайной компоненты

$$X^\varepsilon(t) = X(t\varepsilon^{-1}), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где X — некоторый однородный процесс Маркова. В силу широкого распространения моделей, как теоретического так и прикладного характера, в которые естественным образом входят "быстрые" и "медленные" компоненты движения, исследование асимптотических задач такого типа представляют значительный интерес. Подробный обзор таких результатов може быть найден, например, в разделах 1 и 2 работы [1]. Цель данной статьи — получить результат типа "диффузионной аппроксимации" для процессов Y^ε (этот термин используют для обозначения определенной функциональной версии ЦПТ) при, по возможности, наименее ограничительных предположениях об эргодических свойствах процесса X.

Классические результаты о диффузионной аппроксимации ([2]–[6]) предполагают либо наличие оценок *равномерного коэффициента перемешивания* (ϕ-перемешивания), либо *равномерную эргодичность* процесса X. В нашем подходе мы накладываем существенно менее ограничительное условие о сходимости переходных вероятностей процесса X к его инвариантному распределению, см. (2.4), которое допускает неравномерную (по начальному значению) сходимость в метрике, вообще говоря, более слабой, чем расстояние по вариации. Это позволяет значительно расширить класс возможных моделей. В частности, наш подход хорошо применим к процессам X, заданным СДУ (возможно, бесконечномерными) с шумом Леви — отметим,

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 60J10.

Ключевые слова и фразы. Диффузионная аппроксимация, корректор, расширенный потенциал.

что попытки применения других подходов, существующих в литературе, к таким процессам встречают практически непреодолимые трудности.

Наш подход в общих чертах следует схеме рассуждений, развитой в работе [7], для модели, в которой "быстрая" случайная компонента X является диффузионным процессом. Эта схема связана с решением *уравнения Пуассона* для соответствующего диффузионного генератора и последующим анализом, основанным на — стандартном для данной тематики — приеме, связанном с введением *корректора*. Такой прием требует информации о свойствах семимартингальных составляющих корректора. В работах [7] и [8] такие свойства получались с помощью подходящего варианта формулы Ито, для чего существенно использовались результаты о локальных свойствах слабых решений параболических и эллиптических уравнений в частных производных второго порядка. Без предположения о диффузионном характере процесса X такие результаты недоступны; в связи с этим мы существенно модифицируем схему рассуждения. В статье [9] нами получен результат, который может быть интерпретирован как расширенная версия формулы Дынкина, и который может быть использован для описания предсказуемой компоненты в семимартингальном разложении корректора. Этого описания оказывается достаточно как для доказательства слабой компактности семейства $\{Y^\varepsilon\}$, так и для описания его предельных точек. При этом, в силу отсутствия информации о мартингальной составляющей в семимартингальном разложении корректора, нам приходится существенным образом модифицировать всю схему рассуждений, см. обсуждение в начале раздела 4.

В связи с редакционными ограничениями, мы разбили изложение на две статьи. В данной статье мы вводим основные объекты, формулируем и доказываем основной результат. При этом, в целях полноты изложения и имея в виду возможные дальнейшие приложения, мы рассматриваем две версии этого результата. В первой из них, мы устанавливаем предельную теорему в терминах сходимости конечномерных распределений, во второй — при чуть более ограничительных предположениях на процесс X ($\mathbf{S}(\psi_i, Q_i)$, $i = 1, 2$ вместо $\mathbf{W}(\psi_i, Q_i)$, $i = 1, 2$) устанавливается более сильная функциональная версия этой предельной теоремы. В сопутствующей статье [10] мы формулируем следствия основного результата статьи в отдельных случаях, представляющих самостоятельный интерес, и приводим пример применения этого результата. Там же мы приводим доказательства вспомогательных результатов данной статьи (леммы 4.2 — 4.4), опущенные здесь в связи с недостатком объема.

2. Предварительные сведения

2.1. **Основные объекты и обозначения.** Пусть на данном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ задан однородный феллеровский процесс Маркова

$$X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\},$$

принимающий значения в полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Мы предполагаем, что переходная вероятность $P_t(x, dy)$ процесса X такова, что при любом распределении начального значения $X(0)$ процесс X имеет cádlág модификацию, и в дальнейшем считаем, что X имеет cádlág траектории. Пусть P_x — распределение в $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ cádlág модификации процесса X с $X(0) = x$, а E_x — соответствующее математическое ожидание. Положим $X^\varepsilon(t) = X(t\varepsilon^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Отметим, что приведенные предположения в некоторых ситуациях можно ослаблять, например, требовать вместо наличия метрической структуры на пространстве состояний $\mathbb{X}$ лишь стуктуры измеримого пространства, см. замечание 3.3 [10].

На исходном вероятностном пространстве мы считаем заданным винеровский процесс W со значениями в $\mathbb{R}^l$, независимый с X. Натуральная фильтрация процесса

X обозначается $\mathbb{F}^X$, фильтрация, порожденная парой процессов X^ε, W обозначается $\mathbb{F}^\varepsilon = \{\mathcal{F}_t^\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+\}$.

Рассмотрим семейство СДУ в $\mathbb{R}^m$ вида

$$\begin{aligned} Y^\varepsilon(t) = y_0 &+ \int_0^t \left[a(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s)) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s)) \right] ds \\ &+ \int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\, dW_s, \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Мы предполагаем, что существует функция $L\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, ограниченная на каждом компакте в $\mathbb{X}$, такая, что

$$|a(x,y)| + |A(x,y)| + |\sigma(x,y)| \leq L(x)(1+|y|), \qquad x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{R}^m, \tag{2.2}$$

и для произвольного $R > 0$ существует функция $L_R\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, ограниченная на каждом компакте в $\mathbb{X}$, такая, что

$$\begin{aligned} &|a(x,y_1) - a(x,y_2)| + |A(x,y_1) - A(x,y_2)| + |\sigma(x,y_1) - \sigma(x,y_2)| \\ &\quad \leq L_R(x)|y_1 - y_2|, \qquad x \in \mathbb{X},\ y_1, y_2 \in \{y\colon |y| \leq R\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

(здесь и далее мы используем обозначение $|\cdot|$ для модуля числа, нормы вектора или нормы матрицы). Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ уравнение (2.1) имеет единственное сильное решение Y^ε (подробности см. напр. в [9], Утверждение 2.1).

В дальнейшем, $b = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^m$ обозначает матрицу диффузионных коэффициентов для (2.1): $b_{ij} = \sum_{k=1}^l \sigma_{ik}\sigma_{jk}$.

2.2. **Условия, накладываемые на процесс X.** Далее мы считаем заданной *предметрику* d, то есть неотрицательную симметричную полунепрерывную снизу функцию на $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, обращающуюся в 0 на "диагонали" $\{(x,x), x \in \mathbb{X}\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и принимающую положительные значения вне ее. Для произвольных вероятностных мер μ, ν на σ-алгебре борелевских подмножеств в $\mathbb{X}$ обозначаем

$$d(\mu,\nu) = \inf_{(\xi,\eta) \in C(\mu,\nu)} \mathsf{E}\, d(\xi,\eta),$$

где $C(\mu,\nu)$ — семейство пар (ξ,η) случайных элементов со значениями в $\mathbb{X}$ таких, что $\xi \sim \mu$, $\eta \sim \nu$. Приведенное определение является подходящей версией определения *минимального* (или *каплингового*) расстояния между вероятностными распределениями, см. например [11] или [12], раздел 11.8.

Следующее условие является нашим основным предположением об эргодических свойствах процесса X, то есть предельном (при $t \to +\infty$) поведении его переходных вероятностей.

$\mathbf{E}(d,r,\psi)$. Процесс X имеет единственную инвариантную вероятность π, и справедлива оценка

$$d\left(P_t(x,\cdot), \pi\right) \leq r(t)\psi(x), \qquad x \in \mathbb{X},\ t \geq 0, \tag{2.4}$$

где d — предметрика, функция ψ принимает значения в $[1,+\infty)$ и измерима, функция $r\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ограничена, измерима, и такова, что $r(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Введем еще одно моментное условие на переходные вероятности.

$\mathbf{M}_p(\phi,\psi)$. Для функций $\phi, \psi\colon \mathbb{X} \to [1,\infty)$ и числа $p \in [1,\infty]$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^p(y)\, P_t(x,dy) \leq \psi(x), \quad x \in \mathbb{X}, \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

причем функция ψ лежит в $L_1(\pi)$ (мы считаем, что $1^\infty = 1$ и $a^\infty = \infty$ для $a > 1$).

Функция ψ в условиях (2.4) и (2.5) имеет смысл “штрафа”, зависящего от стартового положения процесса X. Следующие предположения, в разных формах, контролируют величину этого “штрафа”. В разделе 5 сопутствующей статьи [10] приведен пример, показывающий, что эти предположения эффективно проверяемы.

$\mathbf{P}(\psi)$. Для произвольного $x \in \mathbb{X}$

$$\mathsf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi(X(t))\, dt < \infty \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

$\mathbf{W}(\psi, Q)$. Для данной неубывающей функции $Q\colon [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, для произвольного $T \in \mathbb{R}^+$

$$\varepsilon Q\left(\varepsilon^{-1}\right) \sup_{t \in [0,T]} \mathsf{E}\, \psi(X^\varepsilon(t)) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.6}$$

Обозначим $\mathcal{S}^\varepsilon(T)$ семейство дискретных $\mathbb{F}^\varepsilon$-моментов остановки, ограниченных T; здесь $T > 0$ произвольно.

$\mathbf{S}(\psi, Q)$. Для данной неубывающей функции $Q\colon [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, для произвольного $T \in \mathbb{R}^+$

$$\varepsilon Q\left(\varepsilon^{-1}\right) \sup_{\tau \in \mathcal{S}^\varepsilon(T)} \mathsf{E}\, \psi(X^\varepsilon(\tau)) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.7}$$

2.3. **Функциональные классы и полунормы.** Для $p \in [1, \infty)$ и функции $\phi\colon \mathbb{X} \to [1, +\infty)$ обозначим $H_{\phi,d,p}$ класс функций $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{\phi,d,p} := \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d^{1/p}(x_1, x_2)(\phi(x_1) + \phi(x_2))} < +\infty. \tag{2.8}$$

Класс $H_{\phi,d,p}$ естественно понимать как “весовое пространство Гельдера” относительно предметрики d с показателем $1/p$ и весом ϕ.

Мы обозначаем $\|\cdot\|_\pi$ норму в $L_1(\pi)$,

$$\|f\|_\pi = \int_{\mathbb{X}} |f|\, d\pi,$$

здесь и далее π — единственная инвариантная мера процесса X. Функцию $f \in L_1(\pi)$ называем центрированной, если $\int_{\mathbb{X}} f\, d\pi = 0$. Обозначим $H_{\phi,p}(d, \pi)$ класс измеримых функций $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{\phi,d,p,\pi} := \|f\|_{\phi,d,p} + \|f\|_\pi < +\infty.$$

Для $\kappa \in \mathbb{R}$ и измеримой функции $f\colon \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, непрерывной по второй переменной, положим

$$\|f\|_{\phi,d,p,\kappa} = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \frac{\|f(\cdot, y)\|_{\phi,d,p}}{(1 + |y|)^\kappa}, \qquad \|f\|_{\pi,\kappa} = \int_{\mathbb{X}} \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \frac{|f(x, y)|}{(1 + |y|)^\kappa}\, \pi(dx). \tag{2.9}$$

Обозначим $\mathbf{H}_{\phi,p,\kappa}(d, \pi)$ класс функций $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{\phi,d,p,\pi,\kappa} := \|f\|_{\phi,d,p,\kappa} + \|f\|_{\pi,\kappa} < +\infty. \tag{2.10}$$

Введем также одно уточнение класса $\mathbf{H}_{\phi,p,\kappa}(d, \pi)$, фактически, содержащее условие равномерной интегрируемости. Рассмотрим функции

$$\Xi_N\colon \mathbb{R} \ni z \mapsto |z| - |z| \wedge N, \qquad N \geq 1,$$

и обозначим $\hat{\mathbf{H}}_{\phi,p,\kappa}(d, \pi)$ множество таких $f \in \mathbf{H}_{\phi,p,\kappa}(d, \pi)$, что

$$\int_{\mathbb{X}} \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \Xi_N\left(\frac{f(x, y)}{(1 + |y|)^\kappa}\right) \pi(dx) \to 0, \qquad N \to \infty. \tag{2.11}$$

Будем говорить, что измеримая функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ лежит в области определения *расширенного потенциала* $\mathcal{R}$ процесса X, если

$$\int_0^\infty |\mathsf{E}_x f(X(t))|\, dt < +\infty, \qquad x \in \mathbb{X}$$

(см. [9], Определение 2.2). При этом расширенный потенциал на функции f определен равенством

$$\mathcal{R}f(x) = \int_0^\infty \mathsf{E}_x f(X(t))\, dt, \qquad x \in \mathbb{X}. \tag{2.12}$$

Для функции двух переменных $f\colon \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ при определении расширенного потенциала $\mathcal{R}f(x,y)$ переменная $y \in \mathbb{R}^m$ “замораживается”, то есть полагается

$$\mathcal{R}f(x,y) = \int_0^\infty \mathsf{E}_x f(X(t), y)\, dt, \qquad x \in \mathbb{X}. \tag{2.13}$$

Отметим, что комбинация условий на процесс X, введенных в предыдущем разделе, и условий принадлежности функции f одному из классов, введенных выше ($H_{\phi,p}(d,\pi)$, $\mathbf{H}_{\phi,p,0}(d,\pi)$, и т.п.), позволяет доказывать существование соответствующего обобщенного потенциала и устанавливать его свойства, см. теорему 3.1 в [9].

3. Основные результаты

В данном разделе формулируются основные результаты работы. Доказательства приводятся в разделе 4.

Теорема 3.1. *Предположим, что для некоторых предметрик d_1, d_2, функций r_1, r_2, ϕ_1, ϕ_2, ψ_1,ψ_2, и некоторых $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $q_1, q_2 \in (1, +\infty]$ таких, что $1/p_i + 1/q_i = 1$, $i = 1, 2$, выполнены следующие условия.*

(1) *Процесс X удовлетворяет $\mathbf{E}(d_i, r_i, \psi_i)$ и $\mathbf{M}_{q_i}(\phi_i, \psi_i)$, $i = 1, 2$, а также $\mathbf{P}(\psi_1)$.*

(2) *Процесс X удовлетворяет $\mathbf{W}(\psi_i, Q_i)$, $i = 1, 2$ с*

$$Q_1(t) = \sqrt{t}, \qquad Q_2(t) = \int_0^t r_2^{1/p_2}(s)\, ds, \qquad t \geq 1. \tag{3.1}$$

(3) *Функция r_1 такова, что*

$$\int_0^\infty r_1^{1/p_1}(t)\, dt < +\infty. \tag{3.2}$$

(4) *Коэффициент $A\colon \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, как функция переменной $y \in \mathbb{R}^m$ при фиксированном $x \in \mathbb{R}^m$, лежит в классе C^2. Кроме того, выполнено следующее:*

$$\text{функция } A_i(\cdot, y) \text{ центрирована}, \quad y \in \mathbb{R}^m,\ i = 1, \dots, m; \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} A_i \in \mathbf{H}_{\phi_1,p_1,1}(d_1,\pi), \qquad \partial_{y_i} A_j \in \mathbf{H}_{\phi_1,p_1,1}(d_1,\pi), \qquad \partial^2_{y_i y_j} A_k \in \mathbf{H}_{\phi_1,p_1,1}(d_1,\pi), \\ i,j,k = 1, \dots, m. \end{gathered} \tag{3.4}$$

(5) *Выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{gathered} a_i \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2,p_2,1}(d_2,\pi), \qquad A_i \partial_{y_i} \mathcal{R} A_j \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2,p_2,1}(d_2,\pi), \\ a_i \partial_{y_i} \mathcal{R} A_j \in \mathbf{H}_{\phi_2,p_2,1}(d_2,\pi), \qquad b_{ij} \partial^2_{y_i y_j} \mathcal{R} A_k \in \mathbf{H}_{\phi_2,p_2,1}(d_2,\pi), \\ i,j,k = 1, \dots, m; \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} b_{ij} \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2,p_2,2}(d_2,\pi), \qquad A_i \mathcal{R} A_j \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2,p_2,2}(d_2,\pi), \qquad a_i \mathcal{R} A_j \in \mathbf{H}_{\phi_2,p_2,2}(d_2,\pi), \\ b_{ij} \partial_{y_j} \mathcal{R} A_k \in \mathbf{H}_{\phi_2,p_2,2}(d_2,\pi), \qquad i,j,k = 1, \dots, m; \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$b_{ij} \mathcal{R} A_k \in \mathbf{H}_{\phi_2,p_2,3}(d_2,\pi), \quad i,j,k = 1, \dots, m. \tag{3.7}$$

(6) *Существует функция* $\varrho\colon \mathbb{X}\to\mathbb{R}$ *такая, что*

$$|a(x,y)|+|A(x,y)+|b(x,y)|\le \rho(x), \qquad x\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{R}^m$$

и

$$\mathsf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi_1(X(t))\varrho(X(t))\,dt<\infty, \qquad \lambda>0. \tag{3.8}$$

Тогда имеет место следующее.

I. *Семейство* $\{Y^\varepsilon,\varepsilon\in(0,1]\}$ *решений уравнений* (2.1) *слабо относительно компактно в смысле сходимости конечномерных распределений, то есть, для произвольной последовательности* $\{\varepsilon_n\}$ *существует подпоследовательность* $\{\varepsilon_{n_k}\}$ *такая, что для произвольных* $M\in\mathbb{N}$, $t_1,\dots,t_M\ge 0$, *соответствующая подпоследовательность случайных векторов*

$$(Y^{\varepsilon_{n_k}}(t_1),\dots,Y^{\varepsilon_{n_k}}(t_M))$$

слабо сходится в $(\mathbb{R}^m)^M$.

II. *Любая предельная точка* Y *для* Y^ε, $\varepsilon\to 0$, *стохастически непрерывна, и следовательно имеет измеримую модификацию. Эта модификация является решением мартингальной проблемы, ассоциированной с оператором*

$$\mathcal{L}f(y)=\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}f(y)+\frac12\sum_{i,j=1}^m \mathbf{B}_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}f(y), \qquad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m), \tag{3.9}$$

где

$$\mathbf{A}_i(y)=\int_{\mathbb{X}}\left(a_i(x,y)+\sum_{k=1}^m A_k(x,y)\partial_{y_k}\mathcal{R}A_i(x,y)\right)\pi(dx),$$

$$\mathbf{B}_{ij}(y)=\int_{\mathbb{X}}(b_{ij}(x,y)+A_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y)+A_j(x,y)\mathcal{R}A_i(x,y))\,\pi(dx).$$

III. *Если мартингальная проблема, ассоциированная с* (3.9), *хорошо поставлена (см.* [5], *глава 4, §3), то* Y^ε *слабо сходится при* $\varepsilon\to 0$ *в смысле сходимости конечномерных распределенний к единственному (по распределению) диффузионному процессу* Y *с генератором* (3.9).

Замечание 3.1. В силу теоремы 3.1 [9], условия (1), (3) и (4) обеспечивают существование расширенных потенциалов $\mathcal{R}A_i$, $i=1,\dots,m$, которые возникают в условии (5). Более того, в силу теоремы 3.2 [9] эти потенциалы дважды непрерывно дифференцируемы по y; см. более подробное обсуждение в разделе 4.1.

Замечание 3.2. Дополнительное предположение о том, что мартингальная проблема, ассоциированная с (3.9), хорошо поставлена, не является ограничительным, и может быть при соответствующих условиях эффективным образом проверено, например, с использованием Теоремы 4.4.1 [5].

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения* (1)–(5) *теоремы 3.1, причем в* (2) *условия* $\mathbf{W}(\psi_i,Q_i)$, $i=1,2$ *заменены их более сильными версиями* $\mathbf{S}(\psi_i,Q_i)$, $i=1,2$. *Пусть также либо выполнено предположение* (6) *теоремы 3.1, либо для всякого* $T\in\mathbb{R}^+$ *семейство случайных величин* $\psi(X(\tau))$, $\tau\in\mathcal{S}(T)$ *равномерно интегрируемо.*

Тогда семейство $\{Y^\varepsilon,\varepsilon\in(0,1]\}$ *слабо относительно компактно в* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$, *и каждая предельная точка* Y *для* Y^ε, $\varepsilon\to 0$, *является решением мартингальной проблемы, ассоциированной с оператором* (3.9). *Если при этом мартингальная проблема, ассоциированная с* (3.9), *хорошо поставлена, то* Y^ε, $\varepsilon\to 0$ *слабо сходится в* $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ *к единственному (по распределению) диффузионному процессу* Y *с генератором* (3.9).

4. Доказательство

Опишем коротко основные этапы доказательства. Сначала для подходящей "тестовой" функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ мы вводим корректор u_f, имея целью представление вида (4.4) ниже. Для построения корректора мы используем результаты статьи [9] о существовании и свойствах решения *расширенного уравнения Пуассона.* При этом представление вида (4.4) следует из доказанной в [9] (теорема 3.2 и теорема 3.3) расширенной версии формулы Дынкина.

Представление (4.4) является "слабым" в том смысле, что в нем отсутствует описание мартингальной составляющей M_f^ε. Тем не менее, этого представления оказывается достаточно для доказательства слабой компактности либо в смысле сходимости конечномерных распределений (в условиях теоремы 3.1), либо в пространстве $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ (в условиях теоремы 3.2). Отметим, что прямое доказательство слабой компактности в пространстве $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ здесь весьма затруднительно именно в силу отсутствия описания мартингальной составляющей M_f^ε. Здесь возникает существенное различие с подходом статьи [7], в котором аналог представления (4.4) получается с помощью формулы Ито–Крылова, что позволяет описать M_f^ε.

Последний этап доказательства — описание предельных точек — также использует представление (4.4). Поскольку речь идет о сходимости, более слабой чем сходимость в $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, здесь оказывается практически невозможным применения стандартных приемов, таких, например, как "замораживание медленной компоненты", см. [7]. Поэтому мы предлагаем новый прием "задержки медленной компоненты", см. замечание 4.2 ниже.

Заметим, что наш подход сохраняет общую структуру "мартингального подхода", предложенного в [13], но при этом не опирается на априорные равномерные оценки и условия гладкости для решений уравнения Пуассона.

4.1. **Корректор: построение и оценки.** Рассмотрим функцию $f \in C^3(\mathbb{R}^m)$ такую, что

$$|\nabla^r f(y)| \le C(1+|y|)^{-r}, \qquad r = 1, 2, 3. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда формула (2.13) корректно определяет расширенные потенциалы*

$$\mathcal{R}\left(A_i \partial_{y_i} f\right)(x, y), \qquad i = 1, \dots, m, \tag{4.2}$$

являющиеся дважды непрерывно дифференцируемыми по y функциями. При этом, положив

$$u_f(x, y) = \sum_{i=1}^m \mathcal{R}\left(A_i \partial_{y_i} f\right)(x, y), \tag{4.3}$$

мы получаем представление

$$f(Y^\varepsilon(t)) + \varepsilon^{1/2} u_f(X^\varepsilon(t), Y^\varepsilon(t)) = \int_0^t K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\, ds + M_f^\varepsilon(t), \tag{4.4}$$

где M_f^ε — мартингал относительно $\mathbb{F}$,

$$K_f^\varepsilon = H_f + \varepsilon^{1/2} J_f, \tag{4.5}$$

$$H_f \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2, p_2, 0}(d_2, \pi), \qquad J_f \in \mathbf{H}_{\phi_2, p_2, 0}(d_2, \pi). \tag{4.6}$$

Те же утверждения имеют место, если выполнены все условия теоремы 3.2.

Замечание 4.1. Ясно, что для данного i и любого заданного открытого шара можно подобрать "тестовую" функцию $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ так, чтобы $\partial_{y_i} f \equiv 1$ на этом шаре. Понятно, что такая функция f удовлетворяет (4.1), так что, применив лемму, получим, что формула (2.13) корректно определяет расширенный потенциал $\mathcal{R}A_i(x, y)$, и этот потенциал дважды непрерывно дифференцируем по y. Кроме того, в силу формулы (2.13) имеем

$$u_f(x,y) = \sum_i \mathcal{R}A_i(x,y)\partial_{y_i} f(y) \tag{4.7}$$

для произвольной функции $f \in C^3(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющей (4.1).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Покажем, что можно применить теорему 3.2 [9] с $d = d_1$, $\phi = \phi_1$, $\psi = \psi_1$, $r = r_1$, $p = p_1$, $q = q_1$ к функции $\tilde{f}(x,y) = A_i(x,y)\partial_{y_i} f(y)$. Действительно, условия этой теоремы на процесс X и коэффициенты уравнения обеспечиваются, в нашей ситуации, условиями (1), (3) теоремы 3.1 и предположениями (2.2), (2.3). То, что функция $\tilde{f}(\cdot,y)$ центрирована для каждого y, следует из (3.3). Выполнение условий (3.7) и (3.8) теоремы 3.2 [9] следует из явного вида функции $\tilde{f}$, предположения (4.1) и условия (3.4). Таким образом, применив первое утверждение теоремы 3.2 [9], получаем существование дважды непрерывно дифференцируемых по y потенциалов (4.2).

Условие $\mathbf{W}(\psi_1, Q_1)$ с Q_1, заданным в (3.1), обеспечивает выполнение (3.9) в теореме 3.2 [9] и (3.15) в теореме 3.3 [9]. Применив условие (6) теоремы 3.1, мы завершаем проверку предположений теоремы 3.3 [9]. По этой теореме, мы получаем

$$\begin{aligned}
&u_f(X^\varepsilon(t), Y^\varepsilon(t)) \\
&\quad = -\varepsilon^{-1}\int_0^t \sum_i A_i(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\partial_{y_i} f(X^\varepsilon(s))\,ds \\
&\qquad + \int_0^t \sum_i a_i(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\partial_{y_i} u_f(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\,ds \\
&\qquad + \varepsilon^{-1/2}\int_0^t \sum_i A_i(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\partial_{y_i} u_f(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\,ds \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} b_{ij}(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\partial^2_{y_i y_j} u_f(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\,ds + M_f^{1,\varepsilon}(t),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где $M_f^{1,\varepsilon}$ — мартингал. С другой стороны, применяя формулу Ито, получаем, что

$$\begin{aligned}
f(Y^\varepsilon(t)) = &\int_0^t \sum_i a_i(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\partial_{y_i} f(Y^\varepsilon(s))\,ds \\
&+ \varepsilon^{-1/2}\int_0^t \sum_i A_i(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\partial_{y_i} f(Y^\varepsilon(s))\,ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} b_{ij}\left(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s)\right)\partial^2_{y_i y_j} f\left(Y^\varepsilon(s)\right)\,ds + M_f^{2,\varepsilon}(t),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где $M_f^{2,\varepsilon}$ — локальный мартингал. Более того, учитывая (4.1) и используя ограничения на коэффициенты a, A, b, наложенные в (3.4)–(3.6), и свойства процесса X, несложно показать, что $M_f^{2,\varepsilon}$ — мартингал. Рассуждения здесь аналогичны приведенным в разделе 4.2 статьи [9], поэтому подробности мы опускаем. Складывая (4.9) с (4.8), умноженным на $\varepsilon^{1/2}$, получим (4.4). При этом явное выражение для функции K_f^ε получается в результате сложения соответствующих подынтегральных выражений в (4.8) и (4.9) и последующего почленного дифференцирования в (4.7); напомним, мы уже доказали, что каждая из функций $\mathcal{R}A_i(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y. Опуская промежуточные вычисления, запишем ответ: K_f^ε

задана равенством (4.5) с

$$H_f(x,y) = \sum_i \left[a_i(x,y) + \sum_j A_j(x,y)\partial_{y_j}\mathcal{R}A_i(x,y) \right] \partial_{y_i} f(y) \\ + \sum_{i,j} \left[\frac{1}{2} b_{ij}(x,y) + A_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y) \right] \partial^2_{y_i y_j} f(y),$$

$$J_f(x,y) = \sum_i \left[\sum_j a_j(x,y)\partial_{y_j}\mathcal{R}A_i(x,y) + \frac{1}{2}\sum_{j,k} b_{jk}(x,y)\partial^2_{y_j y_k}\mathcal{R}A_i(x,y) \right] \partial_{y_i} f(y) \\ + \sum_{i,j} \left[a_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y) + \sum_k b_{jk}(x,y)\partial_{y_k}\mathcal{R}A_i(x,y) \right] \partial^2_{y_i y_j} f(y) \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} [b_{ij}(x,y)\mathcal{R}A_k(x,y)]\, \partial^3_{y_i y_j y_k} f(y).$$

Из явных формул для H_f, J_f и условий (3.5)–(3.7), (4.1) получаем (4.6), что завершает доказательство.

Если выполнены условия теоремы 3.2, то для обоснования (4.8) мы воспользуемся вместо теоремы 3.3 [9] последним утверждением теоремы 3.2 [9]. Условие (3.10) этой теоремы обеспечивается $\mathbf{S}(\psi_1, Q_1)$, так что имеет место равенство (4.8), в котором $M_f^{1,\varepsilon}$ — локальный мартингал. Запишем сокращенно это равенство в виде

$$u_f(X^\varepsilon(t), Y^\varepsilon(t)) = \int_0^t \Upsilon_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\, ds + M_f^{1,\varepsilon}(t).$$

Для доказательства того, что $M_f^{1,\varepsilon}$ — (обычный) мартингал, достаточно проверить, что

$$\mathsf{E}\int_0^t \left|\Upsilon_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\right| ds < \infty, \qquad t \geq 0, \tag{4.10}$$

см. теорему 3.2 [9]. Аналогично проведенным выше вычислениям для K_f^ε, можно получить, что $\Upsilon_f^\varepsilon \in \mathbf{H}_{\phi_2, p_2, 0}(d_2, \pi)$. Тогда, воспользовавшись (A.1), получим

$$\mathsf{E}\left|\Upsilon_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\right| \leq C_\varepsilon \left(1 + r^{1/p_2}(s)\,\mathsf{E}\,\psi(X(0))\right),$$

откуда следует требуемое соотношение (4.10). Это завершает доказательство (4.8); все остальные рассуждения в доказательстве леммы остаются без изменений. □

4.2. **Вероятность пребывания в компакте и оценки приращений для процесса Y^ε.** С использованием представления (4.4), мы получаем следующие утверждения. Доказательства приведены в сопутствующей статье [10].

Лемма 4.2. *Пусть выполнены предположения* (1)–(5) *теоремы 3.1 и для произвольной $f \in C^3(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющей* (4.1), *справедливо* (4.4).

Тогда для произвольного $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{P}\left(|Y^\varepsilon(t)| > R\right) \to 0, \qquad R \to +\infty. \tag{4.11}$$

Если, кроме того, X удовлетворяет $\mathbf{S}(\psi_1, Q_1)$, тогда

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |Y^\varepsilon(t)| > R\right) \to 0, \qquad R \to +\infty. \tag{4.12}$$

Лемма 4.3. *В предположениях леммы 4.2, для произвольных r, $R>0$ существует константа $C_{r,R}\in\mathbb{R}^+$ такая, что для произвольных*

$$u\in(0,1],\qquad \varepsilon\in(0,1],\qquad \tau\in\bigcup_{T\in\mathbb{R}^+}\mathcal{S}^\varepsilon(T)$$

неравенство

$$\mathsf{P}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u)-Y^\varepsilon(\tau)|>r\mid\mathcal{F}^\varepsilon_\tau\right]\le C_{r,R}\left(u+\varepsilon\psi_2\left(X^\varepsilon(\tau)\right)\right)\tag{4.13}$$

выполнено п.н. на множестве $\{|Y^\varepsilon(\tau)|\le R\}$.

Лемма 4.4. *В предположениях леммы 4.2, для произвольного $T\in\mathbb{R}^+$*

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\sup_{t\in[0,T]}\sup_{0\le u\le\delta}\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(t+u)-Y^\varepsilon(t)|\wedge1\right]\to0,\qquad\delta\to0.\tag{4.14}$$

Если, кроме того, X удовлетворяет $\mathbf{S}(\psi_i,Q_i)$, $i=1,2$, тогда

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\sup_{0\le u\le\delta}\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u)-Y^\varepsilon(\tau)|\wedge1\right]\to0,\qquad\delta\to0.\tag{4.15}$$

4.3. **Слабая относительная компактность.** Ясно, семейство распределений в $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$ процессов Y^ε непрерывно по параметру $\varepsilon\in(0,1]$, поэтому для доказательства слабой относительной компактности семейства $\{Y^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ достаточно проверить такую компактность для произвольной последовательности $\{Y^{\varepsilon_n}\}$, $\varepsilon_n\to0$.

Относительная компактность в смысле сходимости конечномерных распределений прямо следует из (4.12) и (4.14); рассуждения здесь стандартны и мы их опускаем, см. §1 главы 5 [14]. При этом в силу (4.14) любая предельная точка Y является непрерывным по вероятности случайным процессом.

Для доказательства относительной компактности в $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$, мы воспользуемся следующим достаточным условием, приведенным в [5], глава 3. Условие (c) теоремы 8.6 в [5], глава 3, в сочетании с замечанием 8.7 (b) там же, гласит следующее: для произвольного $T>0$ существует $\beta>0$ такое, что

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^{\varepsilon_n}(T)}\sup_{0\le u\le\delta}\mathsf{E}\Bigg[&\sup_{0\le v\le\tau\wedge\delta}\left(|Y^{\varepsilon_n}(\tau)-Y^{\varepsilon_n}(\tau-v)|^\beta\wedge1\right)\\&\times\left(|Y^{\varepsilon_n}(\tau+u)-Y^{\varepsilon_n}(\tau)|^\beta\wedge1\right)\Bigg]\to0,\quad\delta\to0.\end{aligned}\tag{4.16}$$

В дополнительном предположении о том, что справедливо условие (a) теоремы 7.2 в [5], глава 3, соотношение (4.16) эквивалентно относительной компактности в $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$ последовательности $\{Y^{\varepsilon_n}\}$. В нашей ситуации, условие (a) теоремы 7.2 в [5], глава 3, просто совпадает с (4.11). Ясно, что из (4.15) следует (4.16) с $\beta=1$, что и завершает доказательство требуемого утверждения.

4.4. **Описание предельных точек.** Пусть Y — предельная точка некоторой последовательности Y^{ε_n}, $\varepsilon_n\to0$ в смысле слабой сходимости конечномерных распределений. Как мы уже отмечали выше, в силу (4.14) процесс Y непрерывен по вероятности, так что, перейдя к модификации, его можно считать измеримым.

Для доказательства того, что Y есть решение мартингальной проблемы для $\mathcal{L}$, достаточно проверить, что для произвольных $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ и $t_2>t_1>0$

$$\mathsf{E}\left[\left(\left(f(Y(t_2))-f(Y(t_1))\right)-\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}f(Y(s))\,ds\right)\Phi_{t_1}(Y)\right]=0,\tag{4.17}$$

где $\Phi_{t_1}(Y)$ обозначена произвольная случайная величина вида

$$\Phi_{t_1}(Y)=\prod_{j=1}^m h_j(Y(s_j))$$

с $m \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_m < t_1$ и непрерывными ограниченными функциями h_j, $j = 1, \dots, m$ (см. обсуждение, связанное с формулой (3.4) в [5], глава 4). Приступим к доказательству (4.17). Для сокращения обозначений, мы пишем $X_n = X^{\varepsilon_n}$, $Y_n = Y^{\varepsilon_n}$.

Лемма 4.5. *Для произвольной функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ функция $\mathcal{L}f$ непрерывна.*

Доказательство. Имеет место представление

$$\mathcal{L}f(y) = \int_{\mathbb{X}} H_f(x, y)\, \pi(dx), \tag{4.18}$$

см. доказательство леммы 4.1, в котором приведено формула для H_f. Функция $H_f(x, \cdot)$ непрерывна для π-п.в. $x \in \mathbb{X}$: это следует из локальной липшицевости функций a, A, σ по переменной y (см. (2.3)) и непрерывной дифференцируемости функций $\mathcal{R}A_i$, $i = 1, \dots, m$, по той же переменной (см. замечание 4.1). Отсюда по теореме Лебега о мажорированной сходимости следует, что для произвольного $N > 0$ функция

$$\mathcal{L}^N f(y) := \int_{\mathbb{X}} \Big(|H_f(x, y)| \wedge N \Big) \operatorname{sign} H_f(x, y)\, \pi(dx)$$

непрерывна по y. Но, в силу леммы 4.1, $H_f \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2, p_2, 0}(d_2, \pi)$. Применив соотношение (2.11) из определения этого класса, получим, что $\mathcal{L}^N f$, $N \to \infty$ равномерно сходятся к $\mathcal{L}f$, так что функция $\mathcal{L}f$ непрерывна как равномерный предел непрерывных. $\square$

Ясно также, что для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ функция $\mathcal{L}f$ имеет компактный носитель, что в сочетании с предыдущей леммой дает ее ограниченность и равномерную непрерывность. Отсюда, с учетом (4.14), получаем следующее утверждение, доказательство которого вполне стандартно и поэтому мы его опускаем.

Лемма 4.6. *Для проверки соотношения* (4.17)*, достаточно доказать, что*

$$\mathsf{E}\left[\left(f(Y_n(t_2)) - f(Y_n(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}f(Y_n(s))\, ds \right) \Phi_{t_1}(Y_n) \right] \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4.19}$$

Положим

$$\Delta_f(x, y) = H_f(x, y) - \mathcal{L}f(y).$$

Ясно, что функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет (4.1), что позволяет для нее записать представление (4.4). Используя это представление, получаем

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left[\left(f(Y_n(t_2)) - f(Y_n(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}f(Y_n(s))\, ds \right) \Phi_{t_1}(Y_n) \right] \\ &\quad = \varepsilon_n^{1/2}\, \mathsf{E}\left[(u_f(X_n(t_1), Y_n(t_1)) - u_f(X_n(t_2), Y_n(t_2)))\, \Phi_{t_1}(Y_n) \right] \\ &\quad\quad + \varepsilon_n^{1/2}\, \mathsf{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t_2} J_f(X_n(s), Y_n(s))\, ds \right) \Phi_{t_1}(Y_n) \right] \\ &\quad\quad + \mathsf{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t_2} \Delta_f(X_n(s), Y_n(s))\, ds \right) \Phi_{t_1}(Y_n) \right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Таким образом, для доказательства искомого утверждения требуется проверить асимптотическую малость трех слагаемых в правой части (4.20).

В силу утверждения I теоремы 3.1 [9], примененной к функциям $\tilde{f}_i = A\partial_{y_i} f$ с $\phi = \phi_1$, $\psi = \psi_1$, имеет место оценка

$$|u_f(x, y)| \le C\psi_1(x).$$

Поскольку $|\Phi_{t_1}(Y_n)| \le C$ по определению, отсюда в силу условия $\mathbf{W}(\psi_1, Q_1)$ сразу получаем сходимость к нулю при $n \to \infty$ первого слагаемого в правой части (4.20).

Далее, имея в виду второе соотношение в (4.6), применим (A.1) с $\phi = \phi_2$, $\psi = \psi_2$, и получим

$$\mathsf{E}\int_{t_1}^{t_2} \left|J_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\right| ds \le C(t_2 - t_1)(1 + \mathsf{E}\,\psi_2(X(0))). \tag{4.21}$$

В силу ограниченности Φ_{t_1} и условия $\mathbf{W}(\psi_2, Q_2)$, это доказывает сходимость к нулю при $n \to \infty$ второго слагаемого в правой части (4.20).

Доказательство асимптотической малости третьего слагаемого в (4.20) представляет основную сложность, поэтому мы его выносим в отдельное утверждение.

Лемма 4.7. *В наложенных выше предположениях,*

$$\mathsf{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t_2} \Delta_f(X_n(s), Y_n(s))\, ds\right) \Phi_{t_1}(Y_n)\right] \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4.22}$$

Доказательство. Для $\gamma \in (0, t_2 - t_1)$, запишем выражение в левой части (4.22) в виде

$$\begin{aligned} I_{n,f} &= I^1_{n,f,\gamma} + I^2_{n,f,\gamma} + I^3_{n,f,\gamma} \\ &= \mathsf{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t_1+\gamma} \Delta_f(X_n(s), Y_n(s))\, ds\right) \Phi_{t_1}(Y_n)\right] \\ &\quad + \mathsf{E}\left[\left(\int_{t_1+\gamma}^{t_2} \Delta_f(X_n(s), Y_n(s-\gamma))\, ds\right) \Phi_{t_1}(Y_n)\right] \\ &\quad + \mathsf{E}\left[\left(\int_{t_1+\gamma}^{t_2} \Big(\Delta_f(X_n(s), Y_n(s)) - \Delta_f(X_n(s), Y_n(s-\gamma))\Big)\, ds\right) \Phi_{t_1}(Y_n)\right]. \end{aligned}$$

Оценим по отдельности интегралы $I^i_{n,f,\gamma}$, $i = 1, 2, 3$.

Замечание 4.2. Выделим основную идею такой оценки: заменив $Y_n(s)$ на $Y_n(s-\gamma)$, мы получили во втором слагаемом выражение, в котором аргументы процессов X_n и Y_n разнесены на γ. Это позволяет оценить полученное выражение, используя эргодические свойства процесса X, см. (4.25) ниже. Мы называем такой прием "задержкой медленной компоненты".

В силу первого соотношения в (4.6),

$$\Delta_f \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2, p_2, 0}(d_2, \pi). \tag{4.23}$$

Тогда рассуждение, аналогичное использованному в доказательстве (4.21), приводит к оценке

$$|I^1_{n,f,\gamma}| \le C\gamma. \tag{4.24}$$

Далее, по построению, функция $\Delta_f(\cdot, y)$ центрирована для произвольного $y \in \mathbb{R}^m$. Используя (4.23), марковское свойство процесса X_n и оценку (4.1) работы [9] с $\phi = \phi_2$, $\psi = \psi_2$, получим

$$\left|\mathsf{E}\left[\Delta_f(X_n(s), Y_n(s-\gamma)) \;\middle|\; \mathcal{F}^{\varepsilon_n}_{s-\gamma}\right]\right| \le C r_2^{1/p_2}(\gamma/\varepsilon_n)\psi_2(X_n(s-\gamma)).$$

Поскольку ограниченная функция $\Phi_{t_1}(Y_n)$ измерима относительно $\mathcal{F}^{\varepsilon_n}_{s-\gamma}$ для произвольного $s \ge t_1 + \gamma$, отсюда получаем оценку

$$|I^2_{n,f,\gamma}| \le C r_2^{1/p_2}(\gamma/\varepsilon_n)\, \mathsf{E}\int_{t_1+\gamma}^{t_2} \psi_2(X_n(s-\gamma))\, ds. \tag{4.25}$$

Далее, в силу ограниченности Φ_{t_1}, для произвольного $N \geq 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
|I^3_{n,f,\gamma}| \leq C\,\mathsf{E}\int_{t_1+\gamma}^{t_2} \big(\big|\Delta_f(X_n(s),Y_n(s)) - \Delta_f(X_n(s),Y_n(s-\gamma))\big| \wedge N\big)\,ds \\
+ C\,\mathsf{E}\int_{t_1+\gamma}^{t_2}\big(\Xi_N\left(\Delta_f(X_n(s),Y_n(s))\right) + \Xi_N\big(\Delta_f(X_n(s),Y_n(s-\gamma))\big)\big)\,ds;
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

напомним, функция Ξ_N введена в разделе 2.3. Поскольку функция Ξ_N липшицева с константой Липшица 1, имеем

$$
\|\Xi_N \circ \Delta_f\|_{\phi_2,d_2,p_2,0} \leq \|\Delta_f\|_{\phi_2,d_2,p_2,0}.
$$

Это позволяет, применив дважды утверждение A.1 с функцией f, равной $\Xi_N \circ \Delta_f$, и случайной величиной ζ равной либо $Y_n(s)$, либо $Y_n(s-\gamma)$, получить

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(\Xi_N\left(\Delta_f(X_n(s),Y_n(s))\right) + \Xi_N\big(\Delta_f(X_n(s),Y_n(s-\gamma))\big)\right) \\
\leq \varkappa_{f,N} + Cr_2^{1/p_2}(s/\varepsilon_n)\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0)),
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

где

$$
\varkappa_{f,N} = \int_{\mathbb{X}} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \Xi_N(\Delta_f(x,y))\,\pi(dx).
$$

При этом, поскольку Δ_f удовлетворяет (4.23), имеем

$$
\varkappa_{f,N} \to 0, \qquad N \to \infty. \tag{4.28}
$$

По построению, функция $\Delta_f(x,\cdot)$ непрерывна для произвольного $x \in \mathbb{X}$, и следовательно — равномерно непрерывна на шаре $\{y\colon |y| \leq R\}$ для произвольного R. Таким образом, для произвольного $x \in \mathbb{X}$ имеем

$$
\Theta_R(x,\beta) := \sup_{|y_1|\leq R, |y_2-y_1|\leq\beta} |\Delta_f(x,y_2) - \Delta_f(x,y_1)| \to 0, \quad \beta \to 0.
$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ существует $\beta_{\delta,R} > 0$ такое, что

$$
\pi\left(\{x\colon \Theta_R(x,\beta_{\delta,R}) > \delta\}\right) < \delta. \tag{4.29}
$$

По лемме 4.2, существует $R_\delta \in \mathbb{R}^+$ такое, что

$$
\mathsf{P}(|Y_n(s)| > R_\delta) < \delta, \qquad s \in [t_1,t_2]. \tag{4.30}
$$

Положим $\beta_\delta = \beta_{\delta,R_\delta}$ и

$$
A_{s,\delta} = \left\{|Y_n(s)| \leq R_\delta, |Y_n(s) - Y_n(s-\delta)| \leq \beta_\delta\right\}.
$$

Применив утверждение A.2 с $\zeta_1 = Y_n(s)$, $\zeta_2 = Y_n(s-\gamma)$ и $A = A_{s,\delta}$, получим

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(\big|\Delta_f(X_n(s),Y_n(s)) - \Delta_f(X_n(s),Y_n(s-\gamma))\big| \wedge N\right)\mathbb{1}_{A_{s,\delta}} \\
&\quad\leq \int_{\mathbb{X}} \sup_{|y_1|\leq R_\delta, |y_1-y_2|\leq\beta_\delta} \left(|\Delta_f(x,y_1) - \Delta_f(x,y_2)| \wedge N\right)\pi(dx) \\
&\qquad + Cr_2^{1/p_2}(s/\varepsilon_n)\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0)) \\
&\quad\leq \delta + 2N\pi\left(\{x\colon \Theta_{R_\delta}(x,\beta_\delta) > \delta\}\right) + Cr_2^{1/p_2}(s/\varepsilon_n)\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0)) \\
&\quad\leq (2N+1)\delta + Cr_2^{1/p_2}(s/\varepsilon_n)\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0));
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

последнее неравенство имеет место в силу (4.29).

По лемме 4.3, существует $C_\delta \in \mathbb{R}^+$ такое, что для произвольного $s \in [t_1+\gamma, t_2]$

$$
\mathsf{P}\left[|Y_n(s) - Y_n(s-\gamma)| > \beta_\delta \;\middle|\; \mathcal{F}^{\varepsilon_n}_{s-\gamma}\right] \leq C_\delta\big(\gamma + \varepsilon_n\psi_2(X_n(s-\gamma))\big)
$$

п.н. на множестве $\{|Y_n(s-\gamma)| \le R_\delta\}$. Из этого неравенства и (4.30), (4.31) получаем

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left(\left|\Delta_f(X_n(s),Y_n(s)) - \Delta_f(X_n(s),Y_n(s-\gamma))\right| \wedge N\right) \\ &\quad \le (2N+2)\delta + Cr_2^{1/p_2}(s/\varepsilon_n)\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0)) + C_\delta\big(\gamma + \varepsilon_n\,\mathsf{E}\,\psi_2(X_n(s))\big). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Теперь, зафиксировав $\gamma_* \in (0, t_2 - t_1)$ и усреднив по $\gamma \in [0,\gamma^*]$ оценки (4.24)–(4.27) и (4.32), получим

$$\begin{aligned} |I_{n,f}| &\le C\gamma_* + C_\delta\gamma_* + (2N+2)\delta + \varkappa_{f,N} + C\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0))\sup_{s\ge t_1} r_2^{1/p_2}(s/\varepsilon_n) \\ &\quad + C_\delta\varepsilon_n\int_{t_1}^{t_2}\mathsf{E}\,\psi_2(X_n(s))\,ds + \frac{C}{\gamma_*}\left(\int_0^{\gamma^*} r_2^{1/p_2}(\gamma/\varepsilon_n)\,d\gamma\right)\left(\int_{t_1}^{t_2}\mathsf{E}\,\psi_2(X_n(s))\,ds\right) \\ &\le (C+C_\delta)\gamma_* + (2N+2)\delta + \varkappa_{f,N} + C\,\mathsf{E}\,\psi_2(X(0))\sup_{t\ge t_1/\varepsilon_n} r_2^{1/p_2}(t) \\ &\quad + \left(C_\delta + \frac{C}{\gamma_*}\int_0^\infty r_2^{1/p_2}(s)\,ds\right)\left(\varepsilon_n\int_{t_1}^{t_2}\mathsf{E}\,\psi_2(X_n(s))\,ds\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Имеем

$$\sup_{t\ge t_1/\varepsilon} r_2^{1/p_2}(t) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

поскольку $t_1 > 0$ и $r_2(t) \to 0$, $t \to \infty$. Тогда в силу (4.33) и условия $\mathbf{W}_2(\psi_2, Q_2)$, имеем

$$\limsup_{n\to\infty}|I_{n,f}| \le (C+C_\delta)\gamma_* + (2N+2)\delta + \varkappa_{f,N}.$$

Требуемое утверждение теперь получаем, переходя к пределу сначала при $\gamma_* \to 0$, затем при $\delta \to 0$, и наконец при $N \to \infty$. В этом последнем переходе мы используем (4.28). □

4.5. **Завершение доказательства.** В разделах 4.3 и 4.4 мы уже доказали утверждения I и II теоремы 3.1, откуда прямо следует утверждение III той же теоремы.

Мы также доказали в предположениях теоремы 3.2 относительную компактность семейства $\{Y^\varepsilon\}$ в $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. Отсюда следует, что если мартингальная проблема, ассоциированная с (3.9), хорошо поставлена, то Y^ε, $\varepsilon \to 0$, слабо сходится в $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. Поскольку и процессы Y^ε, $\varepsilon \in (0,1]$, и предельный диффузионный процесс Y имеют непрерывные траектории, на самом деле семейство Y^ε, $\varepsilon \to 0$, слабо сходится в $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. □

Приложение A. Вспомогательные оценки

Утверждение A.1. *Пусть $1/p + 1/q = 1$ и X удовлетворяет $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ и $\mathbf{M}_q(\phi,\psi)$. Пусть также $f \in \mathbf{H}_{\phi,p,0}(d,\pi)$.*

Тогда для произвольного случайного вектора ζ со значениями в $\mathbb{R}^m$, заданного на том же вероятностном пространстве, что и процесс X,

$$\mathsf{E}\,|f(X(t),\zeta)| \le \|f\|_{\pi,0} + 2\|f\|_{\phi,d,p,0}r^{1/p}(t)\left(\int_{\mathbb{X}}\psi\,d\pi\right)^{1/q}\mathsf{E}\,\psi(X(0)), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{A.1}$$

Доказательство. Из $\mathbf{E}(d,r,\psi)$ следует следующее неравенство для распределения μ_t значения $X(t)$:

$$d(\mu_t,\pi) \le r(t)\,\mathsf{E}\,\psi(X(0)). \tag{A.2}$$

Рассмотрим любую пару $(\xi,\eta) \in C(\mu_t,\pi)$; по определению класса $C(\mu_t,\pi)$, первый элемент в этой паре имеет то же распределение, что и первый элемент в паре $(X(t),\zeta)$. Тогда (см. [12], задача 8, раздел 11.8) на некотором вероятностном пространстве существует тройка $(\hat\xi,\hat\eta,\hat\zeta)$ такая, что пара $(\hat\xi,\hat\eta)$ одинаково распределена с (ξ,η), а пара $(\hat\xi,\hat\zeta)$ — с $(X(t),\zeta)$. Обозначим $\hat{\mathsf E}$ мат. ожидание на этом новом вероятностном пространстве. Имеем

$$\begin{aligned} \mathsf E\,|f(X(t),\zeta)| &= \hat{\mathsf E}|f(\hat\xi,\hat\zeta)| \le \hat{\mathsf E}|f(\hat\eta,\hat\zeta)| + \hat{\mathsf E}|f(\hat\xi,\hat\zeta)-f(\hat\eta,\hat\zeta)| \\ &\le \hat{\mathsf E}\sup_y|f(\hat\eta,y)| + \hat{\mathsf E}|f(\hat\xi,\hat\zeta)-f(\hat\eta,\hat\zeta)| \\ &= \|f\|_{\pi,0} + \hat{\mathsf E}|f(\hat\xi,\hat\zeta)-f(\hat\eta,\hat\zeta)|; \end{aligned} \tag{A.3}$$

здесь мы использовали то, что $\hat\eta$ имеет распределение π. Имеем

$$|f(x,y)-f(x',y)| \le \|f\|_{\phi,p,d,0}d^{1/p}(x,x')(\phi(x)+\phi(x')), \qquad x,x'\in\mathbb X,\ y\in\mathbb R^m.$$

Подставив $x=\hat\xi$, $x'=\hat\eta$, $y=\hat\zeta$ и применив (A.3), отсюда получим

$$\begin{aligned} \mathsf E\,|f(X(t),\zeta)| &\le \|f\|_{\pi,0} + \|f\|_{\phi,p,d,0}\hat{\mathsf E}d^{1/p}(\hat\xi,\hat\eta)(\phi(\hat\xi)+\phi(\hat\eta)) \\ &\le \|f\|_{\pi,0} + \|f\|_{\phi,d,p,0}\left(\mathsf E\,d(\xi,\eta)\right)^{1/p}\left(\mathsf E(\phi(\xi)+\phi(\eta))^q\right)^{1/q}; \end{aligned} \tag{A.4}$$

здесь использовано неравенство Гельдера и то, что $(\hat\xi,\hat\eta)$ имеет одинаковое распределение с (ξ,η). В силу выпуклости функции $z\mapsto z^q$ и условия $\mathbf M_q(\phi,\psi)$,

$$\begin{aligned} \mathsf E\,(\phi(\xi)+\phi(\eta))^q &\le 2^{q-1}\left(\mathsf E\,\phi^q(\xi)+\mathsf E\,\phi^q(\eta)\right) \\ &= 2^{q-1}\left(\mathsf E\int_{\mathbb X}\phi^q(y)P_t(X(0),dy) + \int_{\mathbb X}\left(\int_{\mathbb X}\phi^q(y)P_t(z,dy)\right)\pi(dz)\right) \\ &= 2^{q-1}\left(\mathsf E\,\psi(X(0)) + \int_{\mathbb X}\psi\,d\pi\right) \le 2^q\left(\int_{\mathbb X}\psi\,d\pi\right)\mathsf E\,\psi(X(0)); \end{aligned}$$

последнее неравенство справедливо, так как $\psi\ge1$. Тогда (A.4) принимает вид

$$\mathsf E\,|f(X(t),\zeta)| \le \|f\|_\pi + 2\|f\|_{\phi,p}\left(\mathsf E\,d(\xi,\eta)\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb X}\psi\,d\pi\right)^{1/q}\left(\mathsf E\,\psi(X(0))\right)^{1/q}. \tag{A.5}$$

В силу произвольности $(\xi,\eta)\in C(\mu_t,\pi)$, из (A.2) и (A.5) следует требуемое. □

Утверждение A.2. *Пусть выполнены условия Утверждения A.1. Пусть также ζ_1, ζ_2 — случайные векторы со значениями в $\mathbb R^m$, заданные на том же вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal F,P)$, что и процесс X, и множество $A\in\mathcal F$ таково, что для некоторых $\beta,R>0$ на множестве A п.н. выполнены неравенства $|\zeta_1|\le R$ и $|\zeta_1-\zeta_2|\le\beta$.*

Тогда для произвольного $N\ge1$

$$\begin{aligned} &\mathsf E(|f(X(t),\zeta_1)-f(X(t),\zeta_2)|\wedge N)\mathbb 1_A \\ &\quad\le \int_{\mathbb X}\sup_{|y_1|\le R,|y_1-y_2|\le\beta}(|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\wedge N)\,\pi(dx) \\ &\quad\quad + 4\|f\|_{\phi,d,p,0}r^{1/p}(t)\left(\int_{\mathbb X}\psi\,d\pi\right)^{1/q}\mathsf E\,\psi(X(0)), \qquad t\in\mathbb R^+. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству, рассмотрим произвольную пару $(\xi,\eta)\in C(\mu_t,\pi)$, и построим набор $(\hat\xi,\hat\eta,\hat\zeta_1,\hat\zeta_2,\hat A)$ так, чтобы пара $(\hat\xi,\hat\eta)$ была одинаково распределена с (ξ,η), а набор $(\hat\xi,\hat\zeta_1,\hat\zeta_2,\mathbb 1_{\hat A})$ — одинаково распределен с $(X(t),\zeta_1,\zeta_2,\mathbb 1_A)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathsf E\,|f(X(t),\zeta_1)-f(X(t),\zeta_2)|\mathbb 1_A &= \mathsf E\,|f(\hat\xi,\hat\zeta_1)-f(\hat\xi,\hat\zeta_2)|\mathbb 1_{\hat A} \\ &\le \mathsf E\,|f(\hat\eta,\hat\zeta_1)-f(\hat\eta,\hat\zeta_2)|\mathbb 1_{\hat A} + 2\hat{\mathsf E}|f(\hat\xi,\hat\zeta)-f(\hat\eta,\hat\zeta)|. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Так как распределение $(\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \mathbb{1}_{\hat{A}})$ совпадает с распределением $(\zeta_1, \zeta_2, \mathbb{1}_A)$, имеем $|\hat{\zeta}_1| \le R$ и $|\hat{\zeta}_1 - \hat{\zeta}_2| \le \beta$ п.н. на $\hat{A}$, и следовательно

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,|f(\hat{\eta}, \hat{\zeta}_1) - f(\hat{\eta}, \hat{\zeta}_2)|\mathbb{1}_{\hat{A}} &\le \mathsf{E} \sup_{|y_1|\le R, |y_1-y_2|\le\beta} |f(\hat{\eta}, y_1) - f(\hat{\eta}, y_2)| \\ &= \int_{\mathbb{X}} \sup_{|y_1|\le R, |y_1-y_2|\le\beta} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,\pi(dx),\end{aligned}$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\hat{\eta}$ имеет распределение π. Оценка для второго члена в (A.7) уже сделана в предыдущем доказательстве, так что имеем

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\,|f(X(t), \zeta_1) - f(X(t), \zeta_2)|\mathbb{1}_A \\ &\quad\le \int_{\mathbb{X}} \sup_{|y_1|\le R, |y_1-y_2|\le\beta} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,\pi(dx) \\ &\qquad + 4\|f\|_{\phi,p,d,0}(\mathsf{E}\,d(\xi,\eta))^{1/p}\left(\int_{\mathbb{X}} \psi\,d\pi\right)^{1/q}\big(\mathsf{E}\,\psi(X(0))\big)^{1/q}.\end{aligned} \tag{A.8}$$

В силу произвольности $(\xi, \eta) \in C(\mu_t, \pi)$, из (A.2) и (A.8) следует требуемое. □

Список литературы

1. N. Abourashchi and A. Yu. Veretennikov, *On stochastic averaging and mixing*, Theory of Stoch. Proc. **16(32)** (2010), no. 1, 111–129.
2. Р. З. Хасьминский, *Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью*, Теор. вероятн. и прим. **11** (1966) no. 3, 444–462.
3. А. Н. Бородин, *Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью*, Теор. вероятн. и прим. **22** (1977), no. 3, 498–512.
4. А. В. Скороход, В. В. Сарафян, *О динамических системах с быстрыми переключениями*, Теор. вероятн. и прим. **32** (1987) no. 4, 658–669.
5. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley, New York, 1986.
6. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific, New Jersey, 2005.
7. E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation, 1*, Ann. Prob. **29** (2001), 1061–1085.
8. E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation, 2*, Ann. Prob. **31** (2003), 1166–1192.
9. А. Ю. Веретенников, А. М. Кулик, *Расширенное уравнение Пуассона для слабо эргодических процессов Маркова*, Теор. Ймов. та Мат. Стат. **85** (2011), 22–38.
10. А. Ю. Веретенников, А. М. Кулик, *Диффузионная аппроксимация систем со слабо эргодическими марковскими возмущениями, II*, Теор. Ймов. та Мат. Стат. (подана в печать)
11. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, “Наука”, Москва, 1986.
12. R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge Univ. Press., 2002.
13. G. C. Papanicolaou, D. W. Stroock, and R. S. Varadhan, *Martingale approach to some limit theorems* (M. Reed, ed.), Conference on Statistical Mechanics, Dynamical Systems and Turbulence, Duke Univ. Press, 1977.
14. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, “Наукова думка”, Киев, 1982.

School of Mathemaics, University of Leeds, United Kingdom; Институт проблем передачи информации, Москва, Россия

Адрес электронной почты: A.Veretennikov@leeds.ac.uk

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Адрес электронной почты: kulik@imath.kiev.ua

Поступила 15/05/2012