Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 87, 2012, стор. 46–57
Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 87, 2012, pp. 46–57

ПЕРІОД ЗАЙНЯТОСТІ ТА СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ДЛЯ СИСТЕМИ $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\infty$ З ПОРОГОВИМ ПЕРЕМИКАННЯМ РЕЖИМІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ

УДК 519.21

К. Ю. ЖЕРНОВИЙ

Анотація. Вивчено систему $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\infty$ з двошвидкісним обслуговуванням. Перемикання режимів обслуговування здійснюється в момент початку обслуговування чергового замовлення, якщо кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. Знайдено середню тривалість періоду зайнятості, отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі.

Abstract. We consider the $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\infty$ queue with two service modes. The server switches from regular speed mode to high speed mode when the number of customers present at a service completion epoch is larger than h. Average duration of the busy time, and formulas for the stationary distribution of number of customers in the system are obtained.

Аннотация. Изучена система $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\infty$ с двухскоростным обслуживанием. Переключение режимов обслуживания осуществляется в момент начала обслуживания очередной заявки, если число заявок в системе превышает заданный пороговый уровень h. Определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе.

1. Опис моделі

У статті [1] розглянуто систему $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з двошвидкісним обслуговуванням. Перемикання режимів обслуговування здійснюється в момент початку обслуговування чергового замовлення, якщо кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. У цій праці ми використаємо результати, отримані в [1], для дослідження аналогічної системи без обмежень на довжину черги, тобто у випадку, коли $m = \infty$.

Нехай задані послідовності незалежних і однаково розподілених випадкових величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$, $n \ge 1$, де α_n — час між надходженням $(n-1)$-ої та n-ої групи замовлень, θ_n — кількість замовлень в n-ій групі, а β_n — час обслуговування n–го замовлення, причому $\mathsf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $\mathsf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$, $i \ge 1$. Якщо $\mathsf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то замовлення в систему надходять по одному.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, і обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговувати замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільно.

Позначимо через $\xi_\infty(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t. Випадковому процесу $(\xi_\infty(t), t \ge 0)$ відповідає множина станів $X_\infty = \{0, 1, \dots\}$. Введемо для $\xi_\infty(t)$ пороговий рівень h, $h \ge 1$. Якщо t — момент початку обслуговування n–го

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25; Secondary 60K20.

Ключові слова і фрази. Система $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\infty$ з двошвидкісним обслуговуванням, період зайнятості, стаціонарний розподіл кількості замовлень.

замовлення і $\xi_\infty(t) \le h$, то $\mathsf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$, $x \ge 0$, $F(0) = 0$. Якщо ж $\xi_\infty(t) > h$, то $\mathsf{P}\{\beta_n < x\} = \widetilde{F}(x)$, $x \ge 0$, $\widetilde{F}(0) = 0$. Позначимо описану систему обслуговування через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\infty$. Випадковий процес, який протікає у цій системі, належить до класу процесів перемикання [2].

Випадковий процес $(\xi_m(t), t \ge 0)$ з множиною станів $X_m = \{0, 1, \ldots, m+1\}$ використовуватимемо для позначення кількості замовлень в момент часу t у системі $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$, вивченій в [1].

2. Основні позначення і допоміжні твердження

Введемо такі позначення: P_n — умовна ймовірність за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \ge 0$ замовлень; E (P) — умовне математичне сподівання (умовна ймовірність) за умови, що система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень; a_i^{k*} — k-кратна згортка послідовності a_i; $\eta(x)$ — кількість замовлень, які надійшли в систему на проміжку часу $[0; x)$;

$$\rho_k(m) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_m(t) = k\}; \qquad \rho_k(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_\infty(t) = k\};$$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x), \qquad m_1 = \int_0^\infty x\,dF(x) < \infty, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x);$$

$$\begin{gathered} b_1 = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty, \qquad \overline{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k, \qquad \rho = \lambda m_1 b_1; \\ p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\,dF(x), \qquad i \ge -1; \\ q_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \overline{F}(x)\,dx, \qquad i \ge 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Відомо [1], що

$$q_0 = \frac{1 - f(\lambda)}{\lambda}, \qquad q_k = \sum_{i=1}^k a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda}, \qquad k \ge 1. \tag{2}$$

За допомогою рекурентних співвідношень введемо послідовність $\{R_n\}$:

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}, \qquad R_{n+1} = \frac{R_n - \sum_{i=0}^{n-1} p_i R_{n-i}}{p_{-1}}, \qquad n \ge 1. \tag{3}$$

Аналогічно до (1)–(3) визначимо функції та сталі, які відповідають функції розподілу $\widetilde{F}(x)$ часу обслуговування післяпорогового режиму. Їх позначатимемо символом "хвилька":

$$\begin{gathered} \widetilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,d\widetilde{F}(x), \qquad \widetilde{m}_1 = \int_0^\infty x\,d\widetilde{F}(x) < \infty, \qquad \overline{\widetilde{F}}(x) = 1 - \widetilde{F}(x); \\ \widetilde{\rho} = \lambda \widetilde{m}_1 b_1; \qquad \widetilde{p}_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\,d\widetilde{F}(x), \qquad i \ge -1; \\ \widetilde{q}_0 = \frac{1 - \widetilde{f}(\lambda)}{\lambda}, \qquad \widetilde{q}_k = \sum_{i=1}^k a_i \widetilde{q}_{k-i} - \frac{\widetilde{p}_{k-1}}{\lambda}, \qquad k \ge 1; \\ \widetilde{R}_1 = \frac{1}{\widetilde{p}_{-1}}, \qquad \widetilde{R}_{n+1} = \frac{\widetilde{R}_n - \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{p}_i \widetilde{R}_{n-i}}{\widetilde{p}_{-1}}, \qquad n \ge 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Використовувавтимемо також послідовності $\{p_n(s)\}$, $\{q_n(s)\}$, $\{R_n(s)\}$, $\{\widetilde{p}_n(s)\}$, $\{\widetilde{q}_n(s)\}$ і $\{\widetilde{R}_n(s)\}$, визначені в [1].

Для послідовності $\{\widetilde{R}_n\}$ безпосередньо з теореми 1.5 [3, с.38] випливає таке твердження.

Лема 2.1. *Якщо* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{R}_n = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}. \tag{5}$$

Якщо ж $\widetilde{\rho} \geq 1$, *то* $\lim_{n\to\infty} \widetilde{R}_n = \infty$.

Лема 2.2. *Послідовність* $\{R_n\}$ *зростає.*

Доведення. Користуючись співвідношеннями (3), одержимо:

$$R_2 = R_1^2(1-p_0);$$
$$R_2 - R_1 = R_1\big(R_1(1-p_0)-1\big) = R_1^2(1-p_0-p_{-1}) = R_1^2\overline{p}_1 > 0.$$

Припустимо, що $R_k - R_{k-1} > 0$ для всіх $k = 1, \ldots, n$. Доведемо, що $R_{n+1} - R_n > 0$. Справді,

$$R_{n+1} = R_1\big(R_n(1-p_0) - p_1 R_{n-1} - p_2 R_{n-2} - \cdots - p_{n-1}R_1\big);$$
$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= R_1\big(R_n(1-p_0-p_{-1}) - p_1 R_{n-1} - p_2 R_{n-2} - \cdots - p_{n-1}R_1\big) \\ &> R_1\big(R_n\overline{p}_1 - (p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})R_{n-1}\big) > R_1\overline{p}_1(R_n - R_{n-1}) > 0. \end{aligned}$$

Лему доведено. □

Лема 2.3. *Для послідовностей* $\{p_n\}$ *і* $\{a_n\}$ *виконуються граничні співвідношення:*

$$\lim_{m\to\infty} m\overline{p}_m = \lim_{m\to\infty} m\overline{a}_m = 0. \tag{6}$$

Доведення. Відомо, що $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k = \rho$, $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k = b_1$. Оскільки

$$m\overline{p}_m = \sum_{k=m}^{\infty} mp_k \leq \sum_{k=m}^{\infty} kp_k,$$

то $\lim_{m\to\infty} m\overline{p}_m = 0$, бо

$$\lim_{m\to\infty} m\overline{p}_m \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} kp_k = 0.$$

Аналогічно доводимо, що $\lim_{m\to\infty} m\overline{a}_m = 0$. Лему доведено. □

Лема 2.4. *Для послідовності*

$$r_k(h) = \sum_{i=1}^{h} R_i p_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i p_{k-n-i} \tag{7}$$

виконується рівність

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} r_k(h) = p_{-1}R(h) - \overline{a}_h, \tag{8}$$

де

$$R(h) = R_{h+1} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n R_{h+1-n}.$$

Доведення. Використовуючи рівності [4]

$$\sum_{k=1}^{n} R_k\overline{p}_{n-k} = R_n - 1, \qquad n \ge 1, \tag{9}$$

і співвідношення

$$\sum_{k=1}^{h} R_k p_{h-k} = R_h - p_{-1}R_{h+1}, \tag{10}$$

яке випливає з (3), для послідовності (7) одержимо

$$\begin{aligned}\sum_{k=h+1}^{\infty} r_k(h) &= \sum_{i=1}^{h} R_i\overline{p}_{h-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i\overline{p}_{h-n-i} - r_h(h)\\ &= R_h - 1 - \sum_{n=1}^{h-1} a_n(R_{h-n} - 1) - R_h + p_{-1}R_{h+1}\\ &\quad + \sum_{n=1}^{h-1} a_n(R_{h-n} - p_{-1}R_{h+1-n})\\ &= \sum_{n=1}^{h-1} a_n - 1 + p_{-1}R_{h+1} - p_{-1}\sum_{n=1}^{h-1} a_n R_{h+1-n} = p_{-1}R(h) - \overline{a}_h.\end{aligned}$$

Лему доведено. □

Лема 2.5. *Для послідовності* $r_k(h)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=h+1}^{\infty} kr_k(h) &= (\rho - 1 + p_{-1})\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} + \sum_{i=1}^{h} R_i\left(i\overline{p}_{h+1-i} - \sum_{k=1}^{h-i} kp_k\right)\\ &\quad - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i\left((n+i)\overline{p}_{h+1-n-i} - \sum_{k=1}^{h-n-i} kp_k\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Якщо $a_1 = 1$, *то*

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} kr_k(h) = 1 + (\rho - 1)R_h + hp_{-1}(R_{h+1} - R_h). \tag{12}$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k = \rho,$$

матимемо

$$\begin{aligned}\sum_{k=h+1}^{\infty} kp_{k-i} &= \sum_{k=h+1}^{\infty}(k-i+1)p_{k-i} + (i-1)\sum_{k=h+1}^{\infty} p_{k-i}\\ &= \rho - \sum_{k=0}^{h-i}(k+1)p_k + (i-1)\overline{p}_{h+1-i}\\ &= \rho - 1 + p_{-1} + i\overline{p}_{h+1-i} - \sum_{k=1}^{h-i} kp_k.\end{aligned} \tag{13}$$

Оскільки

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} kr_k(h) = \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{k=h+1}^{\infty} kp_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{k=h+1}^{\infty} kp_{k-n-i},$$

то за допомогою (13) одержимо (11). Якщо $a_1 = 1$, то знову використовуючи рівності (9) і (10), з (11) отримаємо співвідношення (12). Лему доведено. □

3. Період зайнятості і стаціонарний розподіл

Позначимо через

$$\tau(\infty) = \inf\{t \geq 0 \colon \xi_\infty(t) = 0\}$$

перший період зайнятості для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\infty$, а через $\mathsf{E}\,\tau(\infty)$ його середню тривалість. Для періоду зайнятості системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$, вивченої в [1], використовуватимемо позначення $\tau(m)$.

Теорема 3.1. *Якщо $\widetilde{\rho} < 1$, то*

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\tau(m) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} \\ + \frac{\widetilde{m}_1}{1-\widetilde{\rho}} \Bigg(b_1 - \sum_{k=1}^{h-1} k a_k - h p_{-1} R(h) \\ + (\rho - 1 + p_{-1}) \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} \\ + \sum_{i=1}^{h} R_i \Bigg(i \overline{p}_{h+1-i} - \sum_{k=1}^{h-i} k p_k \Bigg) \\ - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Bigg((n+i) \overline{p}_{h+1-n-i} - \sum_{k=1}^{h-n-i} k p_k \Bigg) \Bigg).\end{aligned} \tag{14}$$

Якщо $\widetilde{\rho} < 1$ і $a_1 = 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\tau(m) = m_1 R_h + \frac{\widetilde{m}_1}{1-\widetilde{\rho}} \Big(1 - (1-\rho) R_h \Big). \tag{15}$$

Доведення. Використаємо формулу з [1] для середньої тривалості періоду зайнятості системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\tau(m) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} \\ + \widetilde{m}_1 \Bigg(p_{-1} R(h) \sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) \sum_{i=1}^{m-k} \widetilde{R}_i \\ - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i + \overline{a}_{m+1} \Bigg).\end{aligned} \tag{16}$$

Виконаємо перетворення, після яких можна буде перейти в (16) до границі при $m \to \infty$. Маємо:

$$
\begin{aligned}
S(m) &= p_{-1}R(h)\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h)\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{R}_i - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i \\
&= \sum_{k=0}^{m-h-1}\widetilde{R}_{m-h-k}\Big(p_{-1}R(h) - \sum_{i=h+1}^{h+k} r_i(h) - \sum_{n=h}^{h+k} a_n\Big) \\
&= \widetilde{R}_{m-h}\Big((m-h)p_{-1}R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1}(m-k)r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1}(m-k)a_k\Big) \\
&\quad + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_{m-h-1}\big)\big(r_{h+1}(h) + a_h + a_{h+1} - p_{-1}R(h)\big) \\
&\quad + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_{m-h-2}\big) \\
&\qquad \times \big(r_{h+1}(h) + r_{h+2}(h) + a_h + a_{h+1} + a_{h+2} - p_{-1}R(h)\big) \\
&\quad + \dots + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_2\big)\Big(\sum_{k=h+1}^{m-2} r_k(h) + \sum_{k=h}^{m-2} a_k - p_{-1}R(h)\Big) \\
&\quad + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_1\big)\Big(\sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) + \sum_{k=h}^{m-1} a_k - p_{-1}R(h)\Big).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

З рівностей (5) і (8) випливає, що всі доданки у сумі (17), крім першого, при $m \to \infty$ прямують до нуля, тобто

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} S(m) &= \lim_{m\to\infty}\widetilde{R}_{m-h}\Big((m-h)p_{-1}R(h) \\
&\qquad - \sum_{k=h+1}^{m-1}(m-k)r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1}(m-k)a_k\Big) \\
&= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Big(b_1 - \sum_{k=1}^{h-1} k a_k - h p_{-1}R(h) + \sum_{k=h+1}^{\infty} k r_k(h)\Big) \\
&\quad + \lim_{m\to\infty} m\widetilde{R}_{m-h}\Big(p_{-1}R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1} a_k\Big).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Оскільки

$$
\begin{aligned}
p_{-1}R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1} a_k &= p_{-1}R(h) - \sum_{k=h+1}^{\infty} r_k(h) - \overline{a}_h + \sum_{k=m}^{\infty} r_k(h) + \overline{a}_m \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} r_k(h) + \overline{a}_m,
\end{aligned}
$$

то використовуючи співвідношення (5)–(7), одержимо

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} m\widetilde{R}_{m-h}\Big(p_{-1}R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1} a_k\Big) &= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\lim_{m\to\infty} m\Big(\sum_{k=m}^{\infty} r_k(h) + \overline{a}_m\Big) \\
= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Big(\sum_{i=1}^{h} R_i \lim_{m\to\infty} m\overline{p}_{m-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \lim_{m\to\infty} m\overline{p}_{m-n-i}\Big) &= 0.
\end{aligned}
$$

Враховуючи (18), (11) і (12), після переходу до границі при $m \to \infty$ у рівності (16) отримаємо співвідношення (14) і (15). Теорему доведено. $\square$

Введемо позначення:

$$\varphi_n^{(m)}(t,k) = \mathsf{P}_n\{\xi_m(t) = k, \tau(m) > t\}, \qquad 1 \le n, k \le m+1;$$
$$\varphi_n^{\infty}(t,k) = \mathsf{P}_n\{\xi_\infty(t) = k, \tau(\infty) > t\}, \qquad n, k \ge 1;$$
$$\Phi_n^{(m)}(s,k) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi_n^{(m)}(t,k)\,dt, \qquad \Phi_n^{\infty}(s,k) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi_n^{\infty}(t,k)\,dt, \qquad \operatorname{Re} s > 0;$$
$$\Phi_n^{(m)}(k) = \lim_{s\to+0}\Phi_n^{(m)}(s,k), \qquad \Phi_n^{\infty}(k) = \lim_{s\to+0}\Phi_n^{\infty}(s,k);$$
$$\Phi_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m+1}\Phi_n^{(m)}(k), \qquad \Phi_n^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_n^{\infty}(k);$$
$$f_n(k) = q_{k-n} + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}, \qquad \widetilde{f}_n(k) = \widetilde{q}_{k-n} + I\{k = m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n}.$$

Лема 3.1. *Виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)}(k) = \Phi_n^{\infty}(k), \qquad n, k \ge 1, \tag{19}$$

причому

$$\begin{gathered}\Phi_n^{(\infty)}(k) = \Phi_m^{(m)}(k) - D_n(k), \qquad 1 \le n \le h-1;\\ \Phi_n^{(\infty)}(k) = \Phi_m^{(m)}(k) - \sum_{i=1}^{k-n}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-n-i}, \qquad n \ge h,\end{gathered} \tag{20}$$

де

$$\begin{gathered}\Phi_m^{(m)}(k) = \sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i}, \qquad 1 \le k \le h;\\ \Phi_m^{(m)}(k) = \sum_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} + p_{-1}R_{h+1}\sum_{i=1}^{k-h}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h-i} - \sum_{u=1}^{h}R_u\sum_{j=h+1}^{k-1}p_{j-u}\sum_{i=1}^{k-j}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-j-i},\\ h+1 \le k \le m;\end{gathered} \tag{21}$$

$$D_n(k) = \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-i}, \qquad 1 \le k \le h;$$
$$D_n(k) = \sum_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-i} + p_{-1}R_{h+1-n}\sum_{i=1}^{k-n}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h-i} - \sum_{u=1}^{h-n}R_u\sum_{j=h+1}^{k-1}p_{j-n-u}\sum_{i=1}^{k-j}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-j-i},$$
$$k \ge h+1.$$

Доведення. За допомогою формули повної ймовірності запишемо рівності

$$\begin{gathered}\varphi_n^{\infty}(t,k) = \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^t \mathsf{P}\{\eta(x) = j\}\varphi_{n+j-1}^{\infty}(t-x,k)\,dF(x) + \mathsf{P}\{\eta(t) = k-n\}\overline{F}(t),\\ 1 \le n \le h;\\ \varphi_n^{\infty}(t,k) = \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^t \mathsf{P}\{\eta(x) = j\}\varphi_{n+j-1}^{\infty}(t-x,k)\,d\widetilde{F}(x) + \mathsf{P}\{\eta(t) = k-n\}\overline{\widetilde{F}}(t),\\ n \ge h+1.\end{gathered} \tag{22}$$

Після переходу в рівностях (22) до перетворень Лапласа одержимо систему рівнянь для визначення функцій $\Phi_n^\infty(s,k)$

$$\begin{aligned}
\Phi_n^\infty(s,k) &= f(s)\sum_{j=0}^{\infty} p_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}^\infty(s,k) + q_{k-n}(s), \qquad 1 \le n \le h,\\
\Phi_n^\infty(s,k) &= \widetilde{f}(s)\sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}^\infty(s,k) + \widetilde{q}_{k-n}(s), \qquad n \ge h+1,
\end{aligned} \tag{23}$$

з граничною умовою $\Phi_0^\infty(s,k)=0$, яка випливає з очевидної рівності $\varphi_0^\infty(t,k)=0$. Після переходу до границі при $s\to+0$ рівняння (23) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\Phi_n^\infty(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{j-1}\Phi_{n+j-1}^\infty(k) + q_{k-n}, \qquad 1 \le n \le h,\\
\Phi_n^\infty(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1}\Phi_{n+j-1}^\infty(k) + \widetilde{q}_{k-n}, \qquad n \ge h+1.
\end{aligned} \tag{24}$$

Користуючись рівняннями для функцій $\Phi_n^{(m)}(s,k)$, наведених в [1], одержимо

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{m-n} p_{j-1}\Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{p}_{m-n}\Phi_m^{(m)}(k) + f_n(k), \qquad 1 \le n \le h,\\
\Phi_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{m-n} \widetilde{p}_{j-1}\Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{\overline{p}}_{m-n}\Phi_m^{(m)}(k) + \widetilde{f}_n(k), \qquad h+1 \le n \le m.
\end{aligned} \tag{25}$$

З [1] знаходимо $\Phi_m^{(m)}(k)$ у вигляді (21). Спрямовуючи s до $+0$, а потім m до ∞ у виразах для функцій $\Phi_n^{(m)}(s,k)$, наведених в [1], одержимо значення $\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)}(k)$ у вигляді правих частин рівностей (20). Враховуючи обмеженість функцій $\Phi_m^{(m)}(k)$, яка випливає з (21), можемо стверджувати, що границі $\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)}(k)$ обмежені. Отже, в рівняннях (25) маємо право перейти до границі при $m\to\infty$ і одержимо

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{j-1}\lim_{m\to\infty}\Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + q_{k-n}, \qquad 1 \le n \le h,\\
\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1}\lim_{m\to\infty}\Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \widetilde{q}_{k-n}, \qquad n \ge h+1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Порівнюючи (24) і (26), робимо висновок, що виконуються граничні співвідношення (19). Лему доведено. □

Введемо позначення:

$$r_{kn}(h) = \widetilde{r}_k(h) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i p_{k-n-i}, \qquad \widetilde{r}_k(h) = \sum_{i=1}^{h} R_i p_{k-i}, \qquad n,k \ge 1.$$

Лема 3.2. *Якщо* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)} = \Phi_n^\infty, \qquad n \ge 1, \tag{27}$$

де

$$\Phi_n^\infty = m_1 \sum_{i=h+1-n}^{h} R_i + \frac{\widetilde{m}_1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg(\sum_{k=h+1}^{\infty} k r_{kn}(h) - h p_{-1}(R_{h+1} - R_{h+1-n})\Bigg),$$
$$1 \le n \le h-1; \tag{28}$$
$$\Phi_n^\infty = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i + \frac{\widetilde{m}_1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg(n - h p_{-1} R_{h+1} + \sum_{k=h+1}^{\infty} k\widetilde{r}_k(h)\Bigg), \qquad n \ge h;$$

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} k r_{kn}(h) = \sum_{k=h+1}^{\infty} k\widetilde{r}_k(h) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i\Bigg(\rho - 1 + p_{-1} + (n+i)\overline{p}_{h+1-n-i} - \sum_{k=1}^{h-n-i} k p_k\Bigg),$$
$$n \ge 1; \tag{29}$$
$$\sum_{k=h+1}^{\infty} k\widetilde{r}_k(h) = \sum_{i=1}^{h} R_i\Bigg(\rho - 1 + p_{-1} + i\overline{p}_{h+1-i} - \sum_{k=1}^{h-i} k p_k\Bigg).$$

Доведення. Спрямувавши s до $+0$, а потім обчисливши суму по k від 1 до $m+1$ у виразах для функцій $\Phi_n^{(m)}(s,k)$, наведених в [1], одержимо

$$\Phi_n^{(m)} = m_1 \sum_{i=h+1-n}^{h} R_i + \widetilde{m}_1\Bigg(p_{-1}(R_{h+1} - R_{h+1-n}) \sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_{kn}(h) \sum_{i=1}^{m-k} \widetilde{R}_i\Bigg),$$
$$1 \le n \le h-1; \tag{30}$$

$$\Phi_n^{(m)} = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i + \widetilde{m}_1\Bigg(p_{-1} R_{h+1} \sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i - \sum_{k=h+1}^{m-1} \widetilde{r}_k(h) \sum_{i=1}^{m-k} \widetilde{R}_i - \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i\Bigg),$$
$$h \le n \le m. \tag{31}$$

У припущенні, що $\widetilde{\rho} < 1$, обчислення границь при $m \to \infty$ у правих частинах рівностей (30), (31) здійснюється аналогічно як границі $\lim_{m\to\infty} S(m)$ у доведенні теореми 3.1. У результаті отримаємо значення $\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}$ у вигляді правих частин рівностей (28). Доведення співвідношень (29) аналогічне до доведення леми 2.5. Використовуючи означення $\Phi_n^{(m)}$, Φ_n^∞, обмеженість границь $\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ і $\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}$ та граничні співвідношення (19), одержимо

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m+1} \Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n^\infty(k) = \Phi_n^\infty.$$

Лему доведено. □

Теорема 3.2. *Якщо $\widetilde{\rho} < 1$, то середня тривалість періоду зайнятості системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\infty$ *обмежена і виконується граничне співвідношення*

$$\mathsf{E}\,\tau(\infty) = \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\tau(m),$$

тобто $\mathsf{E}\,\tau(\infty)$ *визначається у вигляді* (14).

Доведення. У статті [1] доведено рівність

$$\mathsf{E}\,\tau(m) = \sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n^{(m)} + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}^{(m)}, \tag{32}$$

де $\Phi_{m+1}^{(m)} = \Phi_m^{(m)}$. За допомогою аналогічних міркувань для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\infty$ можна довести, що

$$\mathsf{E}\,\tau(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n^{\infty}.$$

Якщо $\widetilde{\rho} < 1$, то згідно з теоремою 3.1 границя $\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\tau(m)$ обмежена, тому враховуючи граничні співвідношення (27), з (32) одержимо

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\tau(m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n^{\infty} = \mathsf{E}\,\tau(\infty).$$

Теорему доведено. □

Теорема 3.3. *Якщо* $\widetilde{\rho} < 1$, *то стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\infty$ *визначається за формулами*

$$\rho_0(\infty) = \frac{1}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau(\infty)};$$

$$\rho_k(\infty) = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\right), \qquad k = 1,\dots,h;$$

$$\begin{aligned}\rho_k(\infty) = {} & \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau(\infty)} \\ & \times \Biggl(\sum_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i} + p_{-1} R(h) \sum_{i=1}^{k-h} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-h-i} \\ & \qquad - \sum_{j=h+1}^{k-1} r_j(h) \sum_{i=1}^{k-j} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-j-i} - \sum_{n=h}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i}\Biggr), \\ & \qquad k \ge h+1.\end{aligned} \tag{33}$$

Доведення. Згідно з [1]

$$\begin{aligned}\rho_0(m) &= \frac{1}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau(m)}; \\ \rho_k(m) &= \lambda\rho_0(m)\left(\sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n^{(m)}(k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}^{(m)}(k)\right), \qquad 1 \le k \le m+1,\end{aligned} \tag{34}$$

де $\Phi_{m+1}^{(m)}(k) = \Phi_m^{(m)}(k)$. За допомогою аналогічних міркувань можна довести, що для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\infty$

$$\rho_0(\infty) = \frac{1}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau(\infty)}; \qquad \rho_k(\infty) = \lambda\rho_0(\infty)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n^{\infty}(k), \qquad k \ge 1.$$

Якщо $\widetilde{\rho} < 1$, то границі $\lim_{m\to\infty} \rho_k(m)$ обмежені. Це випливає з рівностей (34) та обмеженості границь $\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ і $\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\tau(m)$ (теорема 3.1). Отже, враховуючи граничні співвідношення (19) і твердження теореми 3.2, з (34) одержимо

$$\lim_{m\to\infty} \rho_0(m) = \frac{1}{1 + \lambda\,\mathsf{E}\,\tau(\infty)} = \rho_0(\infty);$$

$$\lim_{m\to\infty} \rho_k(m) = \lambda\rho_0(\infty) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k) = \lambda\rho_0(\infty) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n^{\infty}(k) = \rho_k(\infty),$$

$$k \geq 1.$$

В результаті граничного переходу при $m \to \infty$ у формулах для стаціонарних імовірностей $\rho_k(m)$ системи $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ [1] одержимо рівності (33). Теорему доведено. □

4. Приклад обчислення стаціонарного розподілу

Припустимо, що замовлення можуть надходити лише по одному або по двоє ($a_1 + a_2 = 1$), час обслуговування основного режиму розподілений рівномірно на проміжку $[a, b]$, а час обслуговування післяпорогового режиму розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром $\widetilde{\mu}$. Середні значення часу обслуговування становлять $m_1 = (a + b)/2$ та $\widetilde{m}_1 = 2/\widetilde{\mu}$ відповідно. Ввівши позначення

$$S_n(a, b) = \frac{1}{\lambda(b - a)} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(a\lambda)^k}{k!} e^{-a\lambda} - \frac{(b\lambda)^k}{k!} e^{-b\lambda} \right), \qquad n \geq 0,$$

за формулами (1) і (4) отримуємо

$$p_{-1} = S_0(a, b), \qquad p_0 = a_1 S_1(a, b), \qquad p_1 = a_1^2 S_2(a, b) + a_2 S_1(a, b);$$

$$p_2 = a_1^3 S_3(a, b) + 2a_1 a_2 S_2(a, b), \qquad p_3 = a_1^4 S_4(a, b) + 3a_1^2 a_2 S_3(a, b) + a_2^2 S_2(a, b);$$

$$p_4 = a_1^5 S_5(a, b) + 4a_1^3 a_2 S_4(a, b) + 3a_1 a_2^2 S_3(a, b);$$

$$p_5 = a_1^6 S_6(a, b) + 5a_1^4 a_2 S_5(a, b) + 6a_1^2 a_2^2 S_4(a, b) + a_2^3 S_3(a, b);$$

$$p_6 = a_1^7 S_7(a, b) + 6a_1^5 a_2 S_6(a, b) + 10a_1^3 a_2^2 S_5(a, b) + 4a_1 a_2^3 S_4(a, b);$$

$$p_7 = a_1^8 S_8(a, b) + 7a_1^6 a_2 S_7(a, b) + 15a_1^4 a_2^2 S_6(a, b) + 10a_1^2 a_2^3 S_5(a, b) + a_2^4 S_4(a, b);$$

$$\widetilde{p}_{-1} = \frac{\widetilde{\mu}^2}{(\lambda + \widetilde{\mu})^2}; \qquad \widetilde{p}_0 = \frac{2a_1 \widetilde{\mu}^2 \lambda}{(\lambda + \widetilde{\mu})^3}; \qquad \widetilde{p}_1 = \frac{3a_1^2 \widetilde{\mu}^2 \lambda^2}{(\lambda + \widetilde{\mu})^4} + \frac{2a_2 \widetilde{\mu}^2 \lambda}{(\lambda + \widetilde{\mu})^3};$$

$$\widetilde{p}_2 = \frac{4a_1^3 \widetilde{\mu}^2 \lambda^3}{(\lambda + \widetilde{\mu})^5} + \frac{6a_1 a_2 \widetilde{\mu}^2 \lambda^2}{(\lambda + \widetilde{\mu})^4}; \qquad \widetilde{p}_3 = \frac{5a_1^4 \widetilde{\mu}^2 \lambda^4}{(\lambda + \widetilde{\mu})^6} + \frac{12a_1^2 a_2 \widetilde{\mu}^2 \lambda^3}{(\lambda + \widetilde{\mu})^5} + \frac{3a_2^2 \widetilde{\mu}^2 \lambda^2}{(\lambda + \widetilde{\mu})^4};$$

$$\widetilde{p}_4 = \frac{6a_1^5 \widetilde{\mu}^2 \lambda^5}{(\lambda + \widetilde{\mu})^7} + \frac{20a_1^3 a_2 \widetilde{\mu}^2 \lambda^4}{(\lambda + \widetilde{\mu})^6} + \frac{12a_1 a_2^2 \widetilde{\mu}^2 \lambda^3}{(\lambda + \widetilde{\mu})^5}.$$

Розглянемо приклад з такими числовими даними: $a_1 = 0.75$; $a_2 = 0.25$; $h = 5$; $\lambda = 1$; $a = 1/3$; $b = 1$; $\widetilde{\mu} = 6$. Тоді $m_1 = 2/3$; $\widetilde{m}_1 = 1/3$; $b_1 = 1.25$; $\rho = 5/6$; $\widetilde{\rho} = 5/12$, і середня тривалість періоду зайнятості $\mathsf{E}\,\tau(\infty)$, знайдена за формулою (14), становить 3.79439.

У стрічці "$\rho_k(\infty)$" табл. 1 записані ймовірності $\rho_k(\infty)$, обчислені за формулами (33). У цій же таблиці для порівняння наведені значення відповідних імовірностей, отримані за допомогою системи комп'ютерного моделювання GPSS World [5, 6] для значення часу $t = 100\,000$.

Таблиця 1. Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі $M^\theta/G, \widetilde{G}/1/\infty$ ($h = 5$)

Кількість замовлень (k)	0	1	2	3	4
$\rho_k(\infty)$	0.2086	0.1902	0.1754	0.1411	0.1128
$\rho_k(\infty)$ (GPSS World. $t = 10^5$)	0.2093	0.1900	0.1756	0.1413	0.1126
Кількість замовлень (k)	5	6	7	8	...
$\rho_k(\infty)$	0.0891	0.0437	0.0218	0.0097	...
$\rho_k(\infty)$ (GPSS World. $t = 10^5$)	0.0898	0.0429	0.0218	0.0093	...

5. Висновки

Спираючись на результати дослідження системи $M^\theta/G, \widetilde{G}/1/m$, завдяки вивченню властивостей послідовностей $\{R_n\}$ і $\{\widetilde{R}_n\}$, які зв'язані з резольвентами двох неперервних знизу випадкових блукань, що відповідають основному та післяпороговому режимам обслуговування, у даній статті вдалося знайти середню тривалість періоду зайнятості та стаціонарний розподіл кількості замовлень для системи M^θ/G, $\widetilde{G}/1/\infty$. Результати аналітичного моделювання перевірені за допомогою імітаційної моделі.

Література

1. К. Ю. Жерновий, *Дослідження системи* $M^\theta/G/1/m$ *з пороговим перемиканням режимів обслуговування*, Теорія ймовірн. та математ. статист. **86** (2012), 56–68.
2. V. Anisimov, *Switching Processes in Queueing Models*, John Wiley and Sons", ISTE, London, 2008.
3. А. М. Братійчук, *Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою*, Кандидатська дисертація, Київ, 2008.
4. К. Ю. Жерновый, *Исследование системы* $M^\theta/G/1/m$ *с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок*, Информационные процессы **10** (2010), №2, 159–180.
5. В. Д. Боев, *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World*, "БХВ-Петербург", Санкт-Петербург, 2004.
6. Ю. В. Жерновий, *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування*, Видавн. центр ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, 2007.

Кафедра вищої математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів 79000, Україна

Адреса електронної пошти: k_zhernovyi@yahoo.com

Надійшла 12/10/2011