Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 87, 2012, стор. 58–70

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 87, 2012, pp. 58–70

МАКСИМАЛЬНЕ СКЛЕЮВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ДИСКРЕТНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА, II

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ І В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Ми розглядаємо два дискретні ланцюги Маркова, перехідні ймовірності яких за один крок мало відрізняються у рівномірній нормі повної варіації, чи у V-нормі. Досліджується задача стійкості перехідних імовірностей за довільне число кроків. Для цього припускається виконання умови рівномірного перемішування або V-перемішування. Зокрема, доведено, що рівномірна відстань між розподілами ланцюгів у довільний час не перевищує $\varepsilon/(1-\rho)$, де ε — рівномірна відстань між перехідними матрицями, а ρ — рівномірний коефіцієнт перемішування. Наведено ряд прикладів загального характеру. Доведення грунтуються на методі максимального склеювання, що максимізує ймовірності склеювання при переходах за один крок.

Abstract. We consider two discrete Markov chains with close one-step transition probabilities - in the uniform total variation norm or in the V-norm. The problem of the stability of the transition probabilities for arbitrary number of steps is investigated. The main assumption is the uniform mixing or the V-mixing. For example, we prove that the difference between distributions of chains after any number of steps not exceeds the value $\varepsilon/(1-\rho)$, where ε is the uniform distance between transition matrixes, and ρ is the uniform mixing coefficient. The number of examples are considered. Proofs are based on the maximal coupling procedure that maximize the one-step coupling probabilities.

Аннотация. Мы рассматриваем две дискретные цепи Маркова, переходные вероятности которых за один шаг мало отличаются в равномерной норме полной вариации, или в V-норме. Исследуется задача устойчивости переходных вероятностей за произвольное число шагов. Для этого используется условие равномерного перемешивания или V-перемешивания. В частности, доказано, что равномерное расстояние между распределениями цепей в произвольное время не превышает $\varepsilon/(1-\rho)$, где ε — равномерное расстояние между переходными матрицами, а ρ — равномерный коэффициент перемешивания. Приведен ряд примеров общего характера. Доказательства основываются на методе максимального склеивания, который максимизует вероятности склеивания при переходах за один шаг.

Друга частина роботи містить всі доведення результатів [30]. Нумерація формул продовжує нумерацію першої частини.

4. Доведення

Нагадаємо, що для матриці $Q = (Q_{ij})$, функції $f = (f_j)$ та міри $\mu = (\mu_i)$ запис Qf означає функцію з координатами $Qf_i = \sum_j Q_{ij} f_j$, запис μQ — міру з координатами $\mu Q_j = \sum_i \mu_i Q_{ij}$. Добуток матриць PQ та ступінь матриці $Q^{(n)}$ визначаються аналогічно. Позначення $Q_{i\cdot} = (Q_{ij}, j \in E)$ означає i-й рядок матриці Q. Для функцій f записи $f_i = f(i)$ еквівалентні. Матриця I є одиничною, функція 1 тотожно дорівнює одиниці, а відповідна множина індексів визначається корозмірністю матриці, на яку множиться функція. Підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину відповідних індексів поширюється на простір E. Позначення $x^{\pm}$ є додатною та від'ємною частиною числа x, $\delta_{ij} = 1_{i=j}$ — символи Кронекера.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Coupling theory, coupling method, maximal coupling, discrete Markov chains, stability of distributions, дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів, метод склеювання, теорія склеювання.

Лема 1. *У позначеннях розділу про максимальне склеювання виконуються співвідношення*

$$R1_i = R'1_i = h1_i = 1 - q_i, r(P, P') = \sup_i(1 - q_i), \tag{45}$$

$$S1_{ik} = S'1_{ik} = T1_{ik} = 1 - g1_{ik} = 1 - q_{ik}, \rho(P, P') = \sup_{i\neq k}(1 - q_{ik}). \tag{46}$$

Зокрема, за умов (1), (2)

$$\begin{gathered} R1_i = R'1_i = h1_i \leq r(P, P') \leq \varepsilon, \\ S1_{ik} = S'1_{ik} = T1_{ik} = 1 - g1_{ik} \leq \rho(P, P') \leq \rho, \\ T^{(s)}1_{ik} \leq \rho^s \to 0, \qquad s \to \infty. \end{gathered} \tag{47}$$

Доведення. З (29) виводимо:

$$\begin{gathered} R1_i = (P - Q)1_i = 1 - \sum_j Q_{ij} = 1 - q_i, R'1_i = 1 - q_i, \\ h1_i = \sum_{j,l} R_{ij}R'_{il}/(1 - q_i) = \sum_j R_{ij} \sum_l R'_{il}/(1 - q_i) = 1 - q_i, \\ r(P, P') = \sup_i \sum_j \left|P_{ij} - P'_{ij}\right|/2 = \sup_i \sum_j (R_{ij} + R'_{ij})/2 = \sup_i(1 - q_i), \end{gathered}$$

що доводить (45).

Аналогічно з (34), (35) виводимо (46)

$$\begin{gathered} S1_{ik} = (P - g)1_{ik} = 1 - g1_{ik} = 1 - q_{ik}, S'1_{ik} = 1 - q_{ik}, \\ T1_{ik} = \sum_{j,l} S_{ik,j}S'_{ik,l}/(1 - q_{ik}) = \sum_j S_{ik,j} \sum_l S'_{ik,l}/(1 - q_{ik}) = 1 - q_{ik}, \\ \rho(P, P') = \sup_{i\neq k} \sum_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right|/2 = \sup_{i\neq k} \sum_j (S_{ik,j} + S'_{ik,j})/2 = \sup_{i\neq k}(1 - q_{ik}). \end{gathered}$$

Застосуванням умов (1), (2) до рівностей (45), (46) виводимо перші дві нерівності у (47).

Нарешті, з другої нерівності (47) з урахуванням невід'ємності матриці T за індукцією виводимо

$$T^{(s)}1_{ik} = \left(T^{(s-1)}(T1)\right)_{ik} \leq \left(T^{(s-1)}(\rho 1)\right)_{ik} = \rho T^{(s-1)}1_{ik} \leq \cdots \leq \rho^s 1. \qquad \square$$

Надалі покладемо за означенням $\inf(\varnothing) = \infty$.

Означення. *Визначимо рекурентно моменти переключення для координати* d_n *склеєного процесу* $\overline{X}$:

$$\tau_0^{d_0} = 0, \qquad \tau_m^d = \inf\left(n > \tau_{m-1}^{1-d} \colon d_n = d\right), \qquad d = \mathrm{mod}(m - d_0, 2), \qquad m \geq 1. \tag{48}$$

Отже, при $d_0 = 1$ маємо послідовність марковських моментів

$$0 = \tau_0^1 < \tau_1^0 < \tau_2^1 < \tau_3^0 < \cdots \leq \infty,$$

а при $d_0 = 0$ маємо $0 = \tau_0^0 < \tau_1^1 < \tau_2^0 < \tau_3^1 < \cdots \leq \infty$.

Лема 2. *У позначеннях розділу про максимальне склеювання виконуються співвідношення*

$$\begin{gathered} \mathsf{P}_{ii1}\left(\tau_1^0 > t, \overline{X}_t = (k, k, 1)\right) = Q_{ik}^{(t)}, \qquad t \geq 1, \\ \mathsf{P}_{ii1}\left(\tau_1^0 = t, \overline{X}_t = (j, l, 0)\right) = Q^{(t-1)}h_{i,jl}, \qquad t \geq 1, \end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{gathered} \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 > t, \overline{X}_t = (j, l, 0)\right) = T_{ik,jl}^{(t)}, \qquad t \geq 1, \\ \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j, j, 1)\right) = T^{(t-1)}g_{ik,j}, \qquad t \geq 1. \end{gathered} \tag{50}$$

Доведення. Доведення випливає з марковської властивості ланцюга $\overline{X}$, оскільки ймовірність переходу за кілька кроків дорівнює добутку ймовірностей переходу за один крок, а останні згідно з (31),(32),(36),(37) при переході координати d_n з 1 у 1 задається матрицею Q, з 1 до 0 — матрицею h, з 0 в 0 — T, з 0 до 1 — матрицею g. □

Лема 3. *Нехай виконується умова* (7). *Тоді* $\mathsf{P}_{ik0}(\tau_1^1 < \infty) = 1$ *для всіх* $i \neq k$.

Доведення. З Леми 2 виводимо, що функція

$$\varphi_{ik} = \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 < \infty\right) = \sum_{t\geq 1} \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 = t\right) = \sum_{t\geq 1}\sum_{j} T^{(t-1)} g_{ik,j} = \sum_{s\geq 0} T^{(s)} g1_{ik}$$

є мінімальним розв'язком рівняння $\varphi_{ik} = g1_{ik} + T\varphi_{ik}$. За Лемою 1 функція 1 задовольняє дане рівняння, а з (7) та Леми 1 [28, 2009] випливає, що дана функція є мінімальним розв'язком. □

Означення. Визначимо число повних циклів розклеювання–склеювання за початкової умови $d_0 = 1$:

$$\nu_n = \sup\left(m \geq 0\colon \tau_{2m}^1 \leq n\right) < \infty, \qquad n \geq 1,$$

$$\{\nu_n = m\} = \left\{\tau_{2m}^1 \leq n < \tau_{2m+2}^1\right\}. \tag{51}$$

Коректність означення випливає зі співвідношень $\tau_0^1 = 0$, $\tau_m^d \geq m$.

Зауваження 8. У загальному випадку події $\{\tau_{2m}^1 = \infty\}$ можуть мати додатні імовірності. Однак зауважимо, що при $d_0 = 1$ з умови (7) випливає, що $\tau_{2m}^1 - \tau_{2m-1}^0 < \infty$ м.н. Отже, зі скінченності τ_{2m-1}^0 м.н. випливає скінченність τ_{2m}^1. Тому єдино можлива з додатною імовірністю нескінчена серія однакових значень d_n має вигляд $d_n = 1$ при $n \geq \tau_{2\mu}^1$ на множині $\{\mu < \infty\}$, де $\mu = \sup_{n\geq 0} \nu_n$.

Лема 4. *Для всіх* $B \subset E$, $n \geq 1$ *виконуються тотожності*

$$\mathsf{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 1) = \mathsf{P}_{ii1}(X_n' \in B, d_n = 1). \tag{52}$$

Доведення. Розглянемо випадкові події

$$C_{sk}^{nm} = \{\nu_n = m, \tau_{2m}^1 = s, \overline{X}_s = (k, k, 1)\},$$

що попарно несумісні при різних $m \geq 0$, $s \geq 0$, $k \in E$. Оскільки

$$\{d_n = 1\} = \bigcup_{m\geq 0} \left\{\nu_n = m, \tau_{2m}^1 < \infty, d_n = 1\right\},$$

то

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 1) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{s\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}(C_{sk}^{nm}, X_n \in B, d_n = 1) \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{s\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}\left(C_{sk}^{sm}, X_n \in B, \tau_{2m}^1 \leq n < \tau_{2m+1}^0\right),
\end{aligned}$$

де враховано, що $\{\nu_n = m\} = \{\nu_s = m\}$ на події $\{d_n = 1, \tau_{2m}^1 = s\}$ при $s \leq n$, а також рівність

$$C_{sk}^{nm} \cap \{d_n = 1\} = C_{sk}^{nm} \cap \left\{\tau_{2m}^1 \leq n < \tau_{2m+1}^0\right\}.$$

Отже, з урахуванням строго марковської властивості ланцюга $\overline{X}$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 1) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{s\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}(C_{sk}^{sm})\,\mathsf{P}\left(X_n \in B, s \leq n < \tau_{2m+1}^0 \mid C_{sk}^{sm}\right)\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{s\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}(C_{sk}^{sm})\,\mathsf{P}_{kk1}\left(X_{n-s} \in B, n-s < \tau_1^0\right)\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{s\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}(C_{sk}^{sm})\,\mathsf{P}_{kk1}\left(X'_{n-s} \in B, n-s < \tau_1^0\right)\\ &= \mathsf{P}_{ii1}(X'_n \in B, d_n = 1),\end{aligned}$$

де передостання рівність випливає з тотожності $X_n = X'_n$ на множині $\{n < \tau_1^0\}$ за умови $d_0 = 1$, а остання рівність отримується аналогічними до попередніх викладками заміною X_n на X'_n. □

Лема 5. *Для подій* $A_n = \{X_n \in B\} \cap \{X'_n \in B'\}$, $B, B' \subset E$, *має місце тотожність*

$$\mathsf{P}_{ii1}(A_n, d_n = 0) = \sum_{1\leq t\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1))\, r_k^{(n-t)}, \tag{53}$$

де функція

$$\begin{aligned} r_k^{(s)} &\equiv \mathsf{P}_{kk1}\left(d_1 = 0, s+1 < \tau_2^1, A_{s+1}\right) = \left(hT^{(s)} 1_{B\times B'}\right)_k, \\ &s \geq 0, \qquad k \in E, \qquad (1_{B\times B'})_{jl} \equiv 1_{j\in B, l\in B'}. \end{aligned} \tag{54}$$

Доведення. Оскільки $\{\nu_n = m, d_n = 0\} \subset \{\tau_{2m+1}^0 \leq n\}$, то за формулою повної імовірності

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{ii1}(A_n, d_n = 0) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n} \mathsf{P}_{ii1}\left(\nu_n = m, \tau_{2m}^1 = s, \tau_{2m+1}^0 = t, d_t = 0, d_n = 0, A_n\right)\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}\big(\nu_{t-1} = m, \tau_{2m}^1 = s, \overline{X}_{t-1} = (k,k,1),\\ &\qquad\qquad d_t = 0, n < \tau_{2m+1}^1, A_n\big).\end{aligned}$$

Справедливість останньої рівності випливає з того, що на множині

$$\left\{\nu_n = m, \tau_{2m}^0 = s < t \leq n, d_n = 0\right\}$$

виконуються тотожності $\{\nu_s = \nu_{t-1} = \nu_n = m\}$ та

$$\left\{\tau_{2m+1}^0 = t\right\} = \bigcup_k \left\{d_t = 0, \overline{X}_{t-1} = (k,k,1)\right\}.$$

Якщо визначити попарно несумісні події

$$D_{sk}^{tm} \equiv \{\nu_{t-1} = m, \tau_{2m}^1 = s, \overline{X}_{t-1} = (k,k,1)\},$$

то зі вказаної рівності внаслідок марковської властивості ланцюга $\overline{X}$ у момент $t-1$ виводимо, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{ii1}(A_n, d_n = 0) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}\left(D_{sk}^{tm}, d_t = 0, n < \tau_{2m+1}^1, A_n\right)\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}\left(D_{sk}^{tm}\right)\mathsf{P}\left(\nu_{t-1} = m, d_t = 0, n < \tau_{2m+1}^1, A_n \mid D_{sk}^{tm}\right)\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}\left(D_{sk}^{tm}\right)\mathsf{P}_{kk1}\left(d_1 = 0, n-t+1 < \tau_2^1, A_{n-t+1}\right)\\ &= \sum_{t\leq n}\sum_{k} \mathsf{P}_{ii1}\left(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1)\right) r_k^{(n-t)},\end{aligned}$$

де враховане означення (54) та попарна несумісність подій $\{\nu_{t-1} = m, \tau_{2m}^1 = s\}$ по m та s.

Для доведення рівності у (54) скористаємося Лемами 1 і 2 та марковською властивістю ланцюга $\overline{X}$ у момент 1:

$$\begin{aligned} r_k^{(s)} &= \sum_{j\neq l} \mathsf{P}_{kk1}\left(\overline{X}_1 = (j,l,0)\right) \mathsf{P}_{jl0}\left(s < \tau_1^1, (X_s, X_s') \in B \times B', d_s = 0\right) \\ &= \sum_{j\neq l} h_{k,jl}\left(T^{(s)} 1_{B\times B'}\right)_{jl} = \left(hT^{(s)} 1_{B\times B'}\right)_k . \end{aligned}$$ □

Доведення зауваження 1. Нерівність для приросту відстані ρ випливає з нерівності трикутника для норми $\|\cdot\|$. Нерівність стискання еквівалентна цій же нерівності для різниці точкових мір $\mu_j = \delta_{ij} - \delta_{kj}$, оскільки останні породжують простір мір з $\mu(E) = 0$ при замиканні лінійної оболонки. □

Доведення теореми 1. Застосуємо вигляд маргінальних розподілів (43) ланцюга $\overline{X}$ та Лему 4:

$$\begin{aligned} \left|\mathsf{P}_i(X_n \in B) - \mathsf{P}_i'(X_n' \in B)\right| &= |\mathsf{P}_{ii1}(X_n \in B) - \mathsf{P}_{ii1}(X_n' \in B)| \\ &= |\mathsf{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 0) - \mathsf{P}_{ii1}(X_n' \in B, d_n = 0)| \\ &\leq \mathsf{P}_{ii1}(\{X_n \in B\}\Delta\{X_n' \in B\}, d_n = 0) \\ &\leq \mathsf{P}_{ii1}(d_n = 0). \end{aligned} \tag{55}$$

Для виводу оцінки (4) оберемо у Лемі 5 $B = B' = E$, $A_n = \Omega$:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{ii1}(d_n = 0) &= \sum_{1\leq t\leq n} \sum_k \mathsf{P}_{ii1}\left(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1)\right) r_k^{(n-t)} \\ &\leq \sum_{1\leq t\leq n} \sup_k r_k^{(n-t)} \sum_k \mathsf{P}_{ii1}\left(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1)\right) \\ &\leq \sum_{1\leq t\leq n} \sup_k r_k^{(n-t)} \\ &\leq \sum_{1\leq t\leq n} \varepsilon\rho^{n-t} = \varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho), \end{aligned} \tag{56}$$

де враховані на підставі Лем 3, 5 співвідношення

$$r_k^{(s)} = \sum_{j\neq l} h_{k,jl}(T^{(s)}1)_{jl} \leq \left(\sum_{j\neq l} h_{k,jl}\right) \sup_{j\neq l}(T^{(s)}1)_{jl} \leq (1-q_k)\rho^s \leq \varepsilon\rho^s.$$

Підстановка (56) у (55) призводить до лівої нерівності у (4). Права нерівність очевидна. □

Доведення наслідку 1. Обчислимо за строго марковською властивістю ланцюга $\overline{X}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{ik0}(X_n \in B) &= \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 > n, X_n \in B\right) + \sum_{1\leq t\leq n} \sum_j \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j,j,1), X_n \in B\right) \\ &= \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 > n, X_n \in B\right) + \sum_{1\leq t\leq n} \sum_j \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j,j,1)\right) \mathsf{P}_{jj1}(X_{n-t} \in B). \end{aligned}$$

Шляхом віднімання аналогічної рівності для X'_n та підстановкою (43) і (4) звідси отримуємо при $i \neq k$

$$\begin{aligned}
&\left|\mathsf{P}_i(X_n \in B) - \mathsf{P}'_k(X'_n \in B)\right| = |\mathsf{P}_{ik0}(X_n \in B) - \mathsf{P}_{ik0}(X'_n \in B)| \\
&\quad \le \mathsf{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n, \{X_n \in B\}\Delta\{X'_n \in B\}) \\
&\quad\quad + \sum_{t \le n}\sum_j \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j,j,1)\right)\left|\mathsf{P}_{jj1}(X_{n-t} \in B) - \mathsf{P}_{jj1}(X'_{n-t} \in B)\right| \\
&\quad \le \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 > n\right) + \sum_{t \le n} \mathsf{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t)\varepsilon/(1-\rho) \\
&\quad = \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 > n\right) + \mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 \le n\right)\varepsilon/(1-\rho) \\
&\quad = \varepsilon/(1-\rho) + (1-\varepsilon/(1-\rho))\,\mathsf{P}_{ik0}\left(\tau_1^1 > n\right) = \varepsilon/(1-\rho) + (1-\varepsilon/(1-\rho))T^{(n)}1_{ik} \\
&\quad \le \varepsilon/(1-\rho) + (1-\varepsilon/(1-\rho))\rho^n,
\end{aligned}$$

де враховані Леми 1 та 2. Оцінка (5) при $i = k$ є у (4). □

Доведення наслідку 2. Нехай μ — ймовірнісна міра на E. Розглянемо міру

$$\pi = \mu - \sum_{n \ge 0} \mu(I-P)P^{(n)}. \tag{57}$$

Оскільки $\mu(I-P) \in l_1^0(E)$, то внаслідок (3) ряд у (57) збігається у нормі повної варіації, оскільки $\left\|\mu(I-P)P^{(n)}\right\| \le \rho^n \left\|\mu(I-P)\right\|$. Зокрема, має місце збіжність частинних сум:

$$\mu - \sum_{t<n} \mu(I-P)P^{(t)} = \mu P^{(n)} \to \pi, \qquad n \to \infty.$$

Звідси виводимо інваріантність $\pi = \pi P$, а з теореми про стискаюче відображення та з (3) отримуємо єдиність міри π. Далі, враховуючи умову $\varepsilon + \rho < 1$ та Зауваження 1, аналогічно виводимо ергодичність ланцюга X'.

Нарешті, нерівність (6) доводимо шляхом граничного переходу $n \to \infty$ у оцінці (4) Теореми 1. □

Доведення теореми 2. Застосуємо нерівність (55), тотожності Леми 5 при $A_n = \Omega$ та включення $\{\overline{X}_s = (k,k,0)\} \subset \{X_s = k\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathsf{P}'_\pi(X'_n \in B) - \pi(B)\right| &= \left|\sum_i \pi_i(\mathsf{P}'_i(X'_n \in B) - \mathsf{P}_i(X_n \in B))\right| \\
&\le \sum_i \pi_i \left|\mathsf{P}'_i(X'_n \in B) - \mathsf{P}_i(X_n \in B)\right| \le \sum_i \pi_i\,\mathsf{P}_{ii1}(d_n = 0) \\
&= \sum_i \pi_i \sum_{1 \le t \le n}\sum_k \mathsf{P}_{ii1}\left(\overline{X}_{t-1} = (k,k,0)\right) r_k^{(n-t)} \\
&\le \sum_i \pi_i \sum_{1 \le t \le n}\sum_k \mathsf{P}_i(X_{t-1} = k) r_k^{(n-t)} = \sum_{1 \le t \le n}\sum_k \pi_k r_k^{(n-t)} \\
&= \sum_{0 \le s < n}\sum_k \pi_k \left(hT^{(s)}\right)_k \le \sum_{0 \le s} \pi h T^{(s)} 1 = \varepsilon_T.
\end{aligned}$$

Перша нерівність у (10) виводиться з урахуванням ергодичності граничним переходом $n \to \infty$ у (8). Друга нерівність випливає з (56). □

Доведення Зауваження 3. Розглянемо для фіксованого n функції

$$f_i = \mathsf{P}_i(X_n \in B) = \left(P^{(n)}1_B\right)_i, \qquad f'_i = \mathsf{P}'_i(X'_n \in B) = \left(P'^{(n)}1_B\right)_i.$$

За означенням $\mathsf{P}_i(X_{n+t} \in B) = P^{(t)} f_i$, $\mathsf{P}'_i(X'_{n+t} \in B) = P'^{(t)} f'_i$. Оскільки

$$|Pg_i - P'g_i| \le \varepsilon \sup g$$

для невід'ємних обмежених функцій g за умовою (1), то з тотожності

$$P^{(t)} f - P'^{(t)} f' = P^{(t)}(f - f') + \sum_{0 \le s < t} P^{(t-1-s)}(P - P')P'^{(s)} f'$$

з урахуванням стохастичності матриць P, P' виводимо при $t < m$, $t + n = 0 \bmod m$, що

$$\left| P^{(t)} f - P'^{(t)} f' \right| \le \sup_i |f_i - f'_i| + \sum_{0 \le s < t} \varepsilon \le \sup_i |f_i - f'_i| + (m-1)\varepsilon.$$

Оскільки нерівності (4), (6) виконуються при $t + n = 0 \bmod m$, звідси отримуємо шукане.

Нерівність $r(P^{(m)}, P'^{(m)}) \le m\ r(P, P')$ виводиться з наведеної вище тотожності після підстановки $f = f' = 1_B$ та $t = m$. □

Доведення Прикладу 2. Обчислимо показник (2)

$$\begin{aligned}\rho(P, P') &= \sup_{i \ne k} \sum_j \left| P_{ij} - P'_{kj} \right| /2 = \sup_{i \ne k} \left(1 - \sum_j \min(P_{ij}, P'_{kj}) \right) \\ &\le 1 - \inf_{i \ne k} \min(P_{io}, P'_{ko}) \le 1 - d = \rho < 1.\end{aligned}$$

Решта випливає з (4),(5) та Зауваження 3. □

Надалі запис $\mathsf{E}(\xi, A)$ означає $\mathsf{E}(\xi 1_A)$.

Доведення Теореми 3. Позначимо $W(j, l) \equiv V_j + V_l$, $j, l \in E$. Нехай $|f_i| \le V_i$, $i \in E$.

Підсумуємо функцію $f = (f_i)$ за мірами від множин $B \subset E$ у рівності (52) Леми 4, отримаємо:

$$\mathsf{E}_{ii1}(f(X_n), d_n = 1) = \mathsf{E}_{ii1}(f(X'_n), d_n = 1). \tag{58}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\left| \mathsf{E}_i\, f(X_n) - \mathsf{E}'_i\, f(X'_n) \right| &= \left| \mathsf{E}_{ii1}\, f(X_n) - \mathsf{E}_{ii1}\, f(X'_n) \right| \\ &= \left| \mathsf{E}_{ii1}(f(X_n), d_n = 0) - \mathsf{E}_{ii1}(f(X'_n), d_n = 0) \right| \\ &\le \mathsf{E}_{ii1}(W(X_n, X'_n), d_n = 0).\end{aligned} \tag{59}$$

Скінченність правої частини доведена нижче, звідки випливає скінченність лівої.

Підсумуємо функцію $W(j, l)$ за мірами від множин $B \times B' \subset E \times E$ у рівності (53) Леми 5, матимемо з урахуванням означення (54)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{ii1}(W(X_n, X'_n), d_n = 0) &= \sum_{1 \le t \le n} \sum_k \mathsf{P}_{ii1}\left(\overline{X}_{t-1} = (k, k, 1) \right) \left(hT^{(n-t)} W \right)_k \\ &\le \sum_{1 \le t \le n} \sum_k \mathsf{P}_{ii1}(X_{t-1} = k) \left(hT^{(n-t)} W \right)_k \\ &\le \sum_{1 \le t \le n} \sum_k \mathsf{P}_i(X_{t-1} = k) V_k C^{(n-t)} \\ &= \sum_{1 \le t \le n} \mathsf{E}_i\, V(X_{t-1}) C^{(n-t)} \le K_i^{(n)} \sum_{s < n} C^{(s)},\end{aligned} \tag{60}$$

де стала

$$\begin{aligned} C^{(s)} &\equiv \sup_k V_k^{-1} \left(hT^{(s)}W \right)_k \\ &= \sup_k V_k^{-1} \sum_{j\neq l} h_{k,jl} \left(T^{(s)}W \right)_{jl} = \sup_k V_k^{-1} \sum_{j\neq l} h_{k,jl} W_{jl} W_{jl}^{-1} \left(T^{(s)}W \right)_{jl} \\ &\le \sup_k V_k^{-1}(hW)_k \sup_{j\neq l} W_{jl}^{-1} \left(T^{(s)}W \right)_{jl} . \end{aligned} \tag{61}$$

У правій частині (61) внаслідок означення (30) та Леми 1

$$\begin{aligned} V_k^{-1}(hW)_k &= V_k^{-1} \sum_{j\neq l} h_{k,jl}(V_j + V_l) = V_k^{-1} \sum_{j\neq l} R_{kj} R'_{kl} (V_j + V_l)/(1 - q_k) \\ &= V_k^{-1} \left(\sum_j R_{kj} V_j + \sum_l R'_{kl} V_l \right) = V_k^{-1} \sum_j \left| P_{kj} - P'_{kj} \right| V_j \le \varepsilon_V \end{aligned} \tag{62}$$

за умовою (12).

Далі, за Лемою 1 та означеннями (34), (35)

$$\begin{aligned} TW_{ik} &= \sum_{j\neq l} T_{ik,jl}(V_j + V_l) = \sum_j \sum_l T_{ik,jl} V_j + \sum_l \sum_j T_{ik,jl} V_l \\ &= \sum_j (P_{ij} - g_{ik,j}) V_j + \sum_l (P'_{kl} - g_{ik,l}) V_l \\ &= \sum_j (P_{ij} - P'_{kj})^+ V_j + \sum_j (P'_{kj} - P_{ij})^+ V_j = \sum_j \left| P_{ij} - P'_{kj} \right| V_j \\ &\le \rho_V (V_i + V_k) = \rho_V W_{ik} \end{aligned} \tag{63}$$

за умови (13). Звідси за індукцією виводимо, що

$$T^{(s)} W_{ik} \le \rho_V^s W_{ik}, \qquad s \ge 1,\ i \neq k \in E. \tag{64}$$

Шляхом підстановки цієї нерівності і (62) у (60) та (61), отримуємо

$$\mathsf{E}_{ii1}(W(X_n, X'_n), d_n = 0) \le K_i^{(n)} \sum_{0 \le s < n} \varepsilon_V \rho_V^s ,$$

що і доводить (14). □

Доведення Прикладу 3. Порушення умови рівномірного перемішування спричиняється сингулярністю першого та останнього рядків матриці P. Система (13) має вигляд

$$\begin{aligned} \alpha + 1 - \beta + \gamma v &< 1 + 1, \\ 1 + 1 &< 1 + v, \\ 1 - \alpha + \beta + \gamma v &< 1 + v \end{aligned}$$

та має розв'язок $v \in (1, 1 + 2\beta/\gamma)$. □

Доведення Наслідку 3. Перевіримо умову сильного перемішування (13) при $\rho_V = \rho_O + \varepsilon_V$.

Нехай $i \notin O$, $k \notin O$, $i \neq k$. Тоді внаслідок (16)

$$\begin{aligned}\sum_j |P_{ij} - P_{kj}| V_j &\le \sum_{j\in O} |P_{ij} - P_{kj}| V_j + \sum_{j\notin O} (P_{ij} + P_{kj}) V_j \\ &\le \sum_{j\in O} |P_{ij} - P_{kj}| V_j + \rho_O V_i - \sum_{j\in O} P_{ij} V_j + \rho_O V_k - \sum_{j\in O} P_{kj} V_j \qquad (65) \\ &\le \rho_O (V_i + V_k).\end{aligned}$$

Припустимо, що $i \neq k$, $k \in O$. Тоді нерівність (65) еквівалентна умові (17). Випадок $i \neq k$, $i \in O$ симетричний.

Отже, внаслідок доведених нерівностей вигляду (65) та (12) маємо при всіх $i \neq k$

$$\begin{aligned}\sum_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right| V_j &\le \sum_j |P_{ij} - P_{kj}| V_j + \varepsilon_V V_k \\ &\le \rho_O (V_i + V_k) + \varepsilon_V V_k < (\rho_O + \varepsilon_V)(V_i + V_k).\end{aligned}$$

Тому (18) випливає з (14).

Для виводу (19) з (15) позначимо $k_i^{(n)} \equiv \mathsf{E}_i\, V(X_n)$, $K_O \equiv \sup_{i\in O} PV_i$ та зауважимо, що $\mathsf{E}_i\, V(X_1) \le \rho_O V_i$ при $i \notin O$ внаслідок (16).

За марковською властивістю ланцюга X

$$\begin{aligned}k_i^{(n)} &= \mathsf{E}_i \left(1_{\{X_{n-1}\in O\}}\, \mathsf{E}_{X_{n-1}}\, V(X_1) + 1_{\{X_{n-1}\notin O\}}\, \mathsf{E}_{X_{n-1}}\, V(X_1)\right) \\ &\le \mathsf{E}_i (K_O + \rho_O V(X_{n-1})) = K_O + \rho_O k_i^{(n-1)}, \qquad n \ge 1.\end{aligned}$$

Звідси за індукцією

$$k_i^{(n)} \le K_O \left(1 - \rho_O^n\right) / (1 - \rho_O) + \rho_O^n V_i, \qquad n \ge 0.$$

та внаслідок монотонності правої частини за n

$$K_i^{(n)} \le \sup_{m\ge 0} k_i^{(m)} \le \max\left(k_i^{(0)}, k_i^{(\infty)}\right) = \max(V_i, K_O/(1 - \rho_O)),$$

що і доводить (19). □

Доведення Прикладу 4. Еквівалентність (21) та умови на середній приріст (22) при обмеженні показникового моменту стрибка доведена у [4, 1977], де для цього був застосований метод знаходження пробних функцій степеневого вигляду, що використаний нижче для перевірки (16).

Для виводу умови (16) Наслідку 3 зауважимо, що функція у (21) є опуклою донизу від $\ln \beta_0$ та дорівнює 1 при $\beta_0 = 1$. Тому нерівність

$$\sum_j P_{ij} v^{j-i} \le \rho < 1, \qquad i \neq 0,$$

виконується для кожного $v \in (1, \beta_0]$ при деяких $\rho < 1$. Отже,

$$\rho v^i \ge \sum_j P_{ij} v^j = P_{i0} + \sum_{j\neq 0} P_{ij} v^j,$$

що доводить (16). Значення $V_0 = 1$ обрано за означенням.

Доведемо, що для всіх достатньо малих $v - 1 > 0$ та для деяких $\rho_V < 1$ мають місце оцінки (24).

Позначимо при $i \in E$, $v \in (1, \beta_0]$ функції

$$\begin{aligned}R_i(v) &\equiv \left(\left(1 + v^i\right)^{-1} \sum (P_{ij} + P_{0j}) v^j - 1\right) / (v - 1), \\ S_i(v) &\equiv \sum_j P_{ij} \left(v^{j-i} - 1\right) / (v - 1). \qquad (66)\end{aligned}$$

Зауважимо насамперед, що в умовах мажорування (20) за означенням Δ_i у (22)

$$S_i(v) - \Delta_i = o(1), \qquad v \downarrow 1, \tag{67}$$

рівномірно за i.

Далі, за означеннями (66)

$$\begin{aligned}\left(1+v^i\right) R_i(v) - \left(v^i\Delta_i + \Delta_0\right) &= \sum_j \left(P_{ij}\left(v^j - v^i\right) + P_{0j}\left(v^j - 1\right)\right) - \left(v^i\Delta_i + \Delta_0\right)\\ &= v^i(S_i - \Delta_i) + S_0 - \Delta_0,\end{aligned}$$

звідки внаслідок (67) рівномірно за $i \neq 0$

$$R_i(v) - (\Delta_i + \Delta_0)/2 = o(1), \qquad v \downarrow 1. \tag{68}$$

Позначимо через $-2d < 0$ ліву частину (23).

(а) Нехай $i \neq 0$ такий стан, що мінімум у (23) досягається на першому показнику: $\Delta_i + \Delta_0 \leq -2d$. Тоді згідно з (66)

$$\begin{aligned}\rho_i(v) &\leq (1+v^i)^{-1}\sum_j (P_{ij} + P_{0j})v^j = 1 + (v-1)R_i(v)\\ &= 1 + (v-1)((\Delta_i + \Delta_0)/2 + o(1))\\ &\leq 1 - (v-1)d + o(v-1) \leq 1 - (v-1)d/2 = \rho_v < 1\end{aligned}$$

починаючи з деякого $v - 1 > 0$ для всіх $i \neq 0$, оскільки $o(1)$ у (68) рівномірне за i.

(б) Нехай для $i \neq 0$ нерівність в умові (23) виконується за рахунок другого показника під знаком мінімуму: $\sum_j |P_{ij} - P_{0j}| - 2 \leq -2d$. Остання умова еквівалентна нерівності $\sum_j \min(P_{ij}, P_{0j}) \geq d$. Якщо обрати сталу N так, щоб $\sum_{j>N} P_{0j} < d/2$, то $\sum_{j\leq N} P_{ij} \geq \sum_{j\leq N} \min(P_{ij}, P_{0j}) \geq d/2$. Ця нерівність при фіксованому N суперечить умові (20) обмеженості сум $\sum_{j<i}(i-j)P_{ij} \geq (i-N)d/2 \to \infty$ при $i \to \infty$ по деякій послідовності станів i. Отже, має місце обмеженість $i \leq m$ для деякого фіксованого m при виконанні другої нерівності у (23).

Тому внаслідок (66), (68)

$$\begin{aligned}\rho_i(v) &= \left(1+v^i\right)^{-1}\left(\sum_j |P_{ij} - P_{0j}| + \sum_j |P_{ij} - P_{0j}|\left(v^j - 1\right)\right)\\ &\leq \left(1+v^i\right)^{-1}\left(2 - 2d + \sum_j (P_{ij} + P_{0j})\left(v^j - 1\right)\right)\\ &= \left(1+v^i\right)^{-1}\left(2 - 2d - 2 + \left(1+v^i\right)(1 + (v-1)R_i(v))\right)\\ &= 1 - 2d\left(1+v^i\right)^{-1} + (v-1)R_i(v) = 1 - d + o(1), \qquad v \downarrow 1,\end{aligned}$$

рівномірно за $i \leq m$. Отже, і в даному випадку $\rho_i(v) \leq 1 - d/2 = \rho_v$, починаючи з деякого достатньо малого $v - 1 > 0$, для всіх $i \leq m$. $\square$

Доведення Теореми 4. Розглянемо момент зупинки $\theta_1 \equiv \min(\theta, \tau_1^0)$ для ланцюга $\overline{X}$.Визначимо сталу

$$m \equiv \sup(n \geq 1\colon\ \mathsf{P}_{ii1}(\theta_1 > n) > 0) + 1 \leq \infty.$$

З урахуванням розширеної марковської властивості $\overline{X}$ та нерівності $h1_i \le \varepsilon 1_i$ Леми 1 виводимо при $n \ge 1$ тотожності

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{ii1}\left(\theta \ge \tau_1^0 = n\right) &= \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta_1 > n-1, \tau_1^0 = n\right) \\
&= \sum_j \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta_1 > n-1, \tau_1^0 = n, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)\right) \\
&= \sum_j \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)\right) \\
&\qquad\qquad \times \mathsf{P}\left(\tau_1^0 = n \mid \theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)\right) \\
&= \sum_j \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)\right) \mathsf{P}_{jj1}\left(\tau_1^0 = 1\right) \\
&\le \sum_j \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)\right) \varepsilon = \varepsilon\, \mathsf{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1).
\end{aligned} \tag{69}$$

Звідси отримуємо

$$\mathsf{P}_{ii1}\left(\theta \ge \tau_1^0\right) = \sum_{1 \le n < m} \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta \ge \tau_1^0 = n\right) \le \varepsilon \sum_{1 \le n < m} \mathsf{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1) = \varepsilon\, \mathsf{E}_{ii1}\, \theta_1. \tag{70}$$

Оскільки $\{\theta' \ge \tau_1^0\} = \{\theta \ge \tau_1^0\}$ внаслідок рівності $\theta = \theta'$ на множині

$$\left\{\theta' < \tau_1^0\right\} \cap \left\{\theta < \tau_1^0\right\},$$

то

$$\mathsf{P}_{ii1}\left(\theta' \ge \tau_1^0\right) = \mathsf{P}_{ii1}\left(\theta \ge \tau_1^0\right) \le \varepsilon\, \mathsf{E}_{ii1}\, \theta_1. \tag{71}$$

Для невід'ємної $(\mathfrak{F}_t)$-вимірної величини φ за означенням (25) наступні математичні сподівання однакові:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi 1_{\{\theta = n\}}, n < \tau_1^0\right) &= \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi_n(X_1, \dots X_n), n < \tau_1^0\right) = \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi_n(X_1', \dots X_n'), n < \tau_1^0\right) \\
&= \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi' 1_{\{\theta' = n\}}, n < \tau_1^0\right),
\end{aligned}$$

оскільки $(X_1, \dots X_n) = (X_1', \dots X_n')$ при $n < \tau_1^0$.

Тому

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi, \theta < \tau_1^0\right) &= \sum_{n \ge 1} \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi 1_{\{\theta = n\}}, n < \tau_1^0\right) = \sum_{n \ge 1} \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi' 1_{\{\theta' = n\}}, n < \tau_1^0\right) \\
&= \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi', \theta' < \tau_1^0\right).
\end{aligned} \tag{72}$$

Звідси за нерівністю Гельдера

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_i\, \varphi - \mathsf{E}_i'\, \varphi' &= \mathsf{E}_{ii1}\, \varphi - \mathsf{E}_{ii1}\, \varphi' = \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi, \theta \ge \tau_1^0\right) - \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi', \theta' \ge \tau_1^0\right) \\
&\le \mathsf{E}_{ii1}\left(\varphi 1_{\{\theta \ge \tau_1^0\}}\right) \le \left(\mathsf{E}_{ii1}\, \varphi^\alpha\right)^{1/\alpha} \left(\mathsf{E}_{ii1}\, 1^\beta_{\{\theta \ge \tau_1^0\}}\right)^{1/\beta} \\
&\le K_i^\alpha(\varphi) \left(\mathsf{P}_{ii1}\left(\theta \ge \tau_1^0\right)\right)^{1/\beta}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Аналогічно виводимо оцінку знизу

$$\mathsf{E}_i\, \varphi - \mathsf{E}_i'\, \varphi' \ge -K_i^\alpha(\varphi) \left(\mathsf{P}_{ii1}\left(\theta' \ge \tau_1^0\right)\right)^{1/\beta}. \tag{74}$$

Нарешті, застосуванням до (73) оцінки (70), а до (74)–(71), з урахуванням нерівності $\mathsf{E}_{ii1}\, \theta_1 \le \mathsf{E}_{ii1}\, \theta = \mathsf{E}_i\, \theta$, виводимо двосторонні нерівності (26). □

Доведення Наслідку 4. Після підстановки у (26) $\varphi = 1_A$, $\varphi' = 1_{A'}$ маємо $K_i^\alpha(\varphi) \le 1$, а тому (27) виводиться з (4) спрямуванням $\beta \downarrow 1$. □

Доведення прикладу 5. Нехай $A \in \mathfrak{F}_\infty$, тобто $A = \{X_\infty \in B\}$, де

$$X_\infty = (X_n, n \geq 1) \in E^\infty$$

— траєкторія ланцюга X, а $B \subset E^\infty$.

Визначимо для послідовності $x = (x_n, n \geq 1)$ проекцію $\pi_n(x) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Розглянемо множини $B_n = \bigcup_{x \in B} \{\pi_n(x)\}$,

$$B^n = B_n \times \{(o, o, \ldots)\} = \{(x_1, \ldots x_n, o, o, \ldots), (x_1, \ldots, x_n) \in B_n\},$$

та подію $C_n = \bigcap_{t>n} \{X_t = o\}$.

Визначимо подію

$$\widetilde{A} = \bigcup_{n \geq 1} \{\theta = n\} \cap \{(X_1, \ldots, X_n) \in B_n\}.$$

За означенням $\widetilde{A} \in \mathfrak{F}_\theta$. Оскільки $\mathsf{P}_i(\theta = n, \overline{C}_n) = 0$ за властивістю поглинання м.н., то

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_i(\theta = n, A \Delta \widetilde{A}) &= \mathsf{P}_i(\theta = n, C_n, A \Delta \widetilde{A}) \\ &= \mathsf{P}_i(\theta = n, C_n, \{X_\infty \in B\} \Delta \{(X_1, \ldots X_n) \in B_n\}) \\ &= \mathsf{P}_i(\theta = n, C_n, X_\infty \in B \Delta B^n) = 0, \end{aligned}$$

оскільки

$$\mathsf{P}_i(\theta = n, C_n, X_\infty \in B) = \mathsf{P}_i(\theta = n, C_n, X_\infty \in B^n)$$

за означенням множин B_n, B^n, C_n.

Отже, зі скінченності $\theta < \infty$ м.н. виводимо, що $\mathsf{P}_i(A \Delta \widetilde{A}) = 0$.

Застосуванням до події $\widetilde{A} \in \mathfrak{F}_\theta$ Теореми 4, отримуємо твердження прикладу. □

Доведення Зауваження 7. Марковська властивість $\widetilde{X}$ випливає з (43), оскільки

$$\overline{X}_n = (X_n, X'_n, d_n)$$

— ланцюг Маркова, а $d_n = 1_{\{X_n = X'_n\}}$ м.н. Нерівність (44) виводиться з теореми Монжа [12, п.1.3, 1986], [13, 1984] внаслідок означень (28),(34) для перехідних імовірностей ланцюга $\widetilde{X}$, куди входить мінімум з двох можливих маргінальних розподілів в кожному з двох можливих випадків: $i = k$ та $i \neq k$. □

Література

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique, **2** (1938), 77–105.
2. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1966.
3. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
4. Н. В. Карташов, *Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления*, Асимптотические задачи для случайн. процессов, Препр. Ин-та матем. АНУ, №77-24, Киев, 1977, 2–43.
5. E. Nummelin, *A splitting technique for Harris recurrent chains*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw. Geb. **43** (1978), 309–318.
6. E. Nummelin and R. L. Tweedie, *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov chains*, Ann. Probab. **6** (1978), 404–420.
7. T. Lindvall, *On coupling of discrete renewal sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **48** (1979), 57–70.
8. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, *Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем*, Препринт АН УССР, №80-12, Институт кибернетики, Киев, 1980.
9. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl. **11** (1981), 11–26.
10. E. Numemelin and P. Tuominen, *Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applicatoins to renewal theory*, Stoch. Proc. Appls. **12** (1982), 187–202.

11. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
12. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
13. С. Т. Рачев, *Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике*, Теория вероятностей и ее применения **29** (1984), №4, 625–653.
14. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
15. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
16. P. Tuominen and R. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Adv. in Appl. Probab. **26** (1994), 775–798.
17. P. Tuominen and R. L. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov Chains*, Advances in Applied Probability **26** (1994), 775–798.
18. R. L. Tweedie and J. N. Corcoran, *Perfect sampling of ergodic Harris chains*, Annals of Applied Probability **11** (2001), no. 2, 438–451.
19. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.
20. S. F. Jarner and G. O. Roberts, *Polynomial convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **12** (2001), 224–247.
21. R. Douc, E. Moulines, and J. S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), 1643–1664.
22. R. Douc, E. Mouliness, and J. S. Rothenthal, *Quantitative bounds on convergence of Time-inhomogeneous Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1643–1665.
23. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1353–1377.
24. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Computable convergence rates for subgeometrically ergodic Markov Chains*, Bernoulli **13** (2007), no. 3, 831–848.
25. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 3, 897–923.
26. В. В. Голомозий, *Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова*, Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки **4** (2009), 10–15.
27. В. В. Голомозий, *Субгеометрична оцінка стійкості для однорідних ланцюгів Маркова*, Теорія ймовірностей та математична статистика **81** (2010), 31–46.
28. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теорія імовірностей та математична статистика **81** (2009), 65–75.
29. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Середній час зклеювання незалежних дискретних процесів відновлення*, Теорія ймовірностей та математична статистика **84** (2011), 78–85.
30. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, I*, Теорія ймовірностей та математична статистика. (подано до друку)

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Надійшла 07/10/2011