Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 87, 2012, стор. 71–88

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 87, 2012, pp. 71–88

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ЗАКОН ТИПУ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ КОСОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

УДК 519.21

І. Г. КРИКУН

Анотація. Отримано функціональний закон типу повторного логарифма для косого броунівського руху.

Abstract. A functional law of the iterated logarithm for skew Brownian motion is obtained.

Аннотация. Получен функциональный закон типа повторного логарифма для косого броуновского движения.

1. Вступ.

Функціональний закон повторного логарифма (ФЗПЛ в подальшому) для вінерівського процесу було доведено у відомій роботі В. Штрассена [13]. Для більш загальних, ніж корінь з повторного логарифма, нормуючих функцій, варіант цього закону було запропоновано А. Булінскім [1]. ФЗПЛ для розв'язків стохастичних рівнянь Іто з періодичними коефіцієнтами, що залежать від стрибкового процесу, встановив С. Махно [11].

В даній роботі розглядається косий броунівський рух, визначений К. Іто і Х. Маккіном [9] і побудований у зв'язку з Феллерівською класифікацією одновимірних дифузійних процесів у термінах еліптичних диференційних операторів другого порядку. В подальшому косий броунівський рух розглядався у багатьох роботах. Відзначимо роботи таких авторів, як Дж. Харрісон, Л. Шепп [8] та Дж. Ле Галл [10], у яких цей процес пов'язаний із розв'язком стохастичного рівняння з локальним часом. У роботі [10], а також у роботах [4], [7] запропоновані формули, які пов'язують розв'язки стохастичних рівнянь з локальним часом із розв'язками рівнянь Іто.

В даній роботі досліджується ФЗПЛ для косого броунівського руху. Використовуємо підхід роботи [4].

Робота організована таким чином: у наступному розділі 2 наведено позначення та сформульовано основний результат роботи; в розділі 3 доведено допоміжну Теорему 2; в розділі 4 доведено допоміжні леми та Теорему 1.

2. Основні результати.

Розглянемо косий броунівський рух як розв'язок стохастичного рівняння з локальним часом

$$\xi(t) = x + \beta L^{\xi}(t,0) + w(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{1}$$

При $|\beta| \le 1$ рівняння (1) має сильний розв'язок [8], тобто на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \Im_t, \mathsf{P})$ з потоком σ-алгебр $\Im_t$, $t \in [0,1]$, та заданим стандартним одновимірним вінерівським процесом $(w(t), \Im_t)$, існує неперервний семімартингал $(\xi(t), \Im_t)$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10; Secondary 60F17.

Ключові слова і фрази. Стохастичні рівняння, локальний час, принцип великих відхилень, функціональний закон типу повторного логарифма.

такий, що симетричний локальний час

$$L^{\xi}(t,0)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_0^t I_{(-\delta,\delta)}(\xi(s))\,ds \tag{2}$$

існує майже напевно (м.н. — в подальшому) і (1) виконується м.н.

У (2) і далі $I_A(x)$ — індикатор множини А. Нехай $\mathbf{R}$ — одновимірний простір і $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ — його борелівська σ-алгебра. Через $C[0,1]$ ми позначимо простір всіх функцій f, неперервних на $[0,1]$ і зі значеннями в $\mathbf{R}$, $\mathcal{B}(C[0,1])$ — його борелівська σ-алгебра. Нормою в $C[0,1]$ є $\|x\|=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$. Для абсолютно неперервної функції f будемо використовувати стандартне позначення $\dot f$: $f(t)=f(a)+\int_a^t \dot f(s)\,ds$. Далі, $H^2[0,1]=\left\{f\colon f(t) \text{ —абсолютно неперервна}, t\in[0,1] \text{ і } \int_0^1|\dot f(t)|^2\,dt<\infty\right\}$.

Відзначимо таку властивість абсолютно неперервних функцій (тут $LebA$ - міра Лебега множини A):

$$Leb\Big(t\in[0,1]\colon f(t)=0, \dot f(t)\neq 0\Big)=0. \tag{3}$$

Будемо позначати

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & \text{при } x<0,\\ 0, & \text{при } x=0,\\ 1, & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Нехай $(X,\mathcal{B}(X))$ — метричний простір з метрикою ρ, де $\mathcal{B}(X)$ — борелівська σ-алгебра простору X. Нехай $I(x)\colon X\to[0,\infty]$ — напівнеперервний знизу функціонал такий, що для будь-якого $a>0$ множина $\{x\colon I(x)\le a\}$ є компактною.

Сім'я ймовірнісних мір $\{\mu_\varepsilon\}, \varepsilon>0$, на X задовольняє принципу великих відхилень (ПВВ в подальшому) з нормуючим коефіцієнтом $k(\varepsilon)$ (таким, що $\lim_{\varepsilon\to0}k(\varepsilon)=+\infty$) та функціоналом дії $I(x)$, якщо виконуються наступні умови:

a) для будь-якої відкритої множини $G\in\mathcal{B}(X)$,

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{k(\varepsilon)}\ln\mu_\varepsilon(G)\ge-\inf\{I(x),x\in G\};$$

b) для будь-якої замкненої множини $F\in\mathcal{B}(X)$,

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{k(\varepsilon)}\ln\mu_\varepsilon(F)\le-\inf\{I(x),x\in F\}.$$

Тепер сформулюємо принцип стиснення [2, теорема 5.3.1]. Нехай міри $\{\mu_\varepsilon\}$ на X, що породжені випадковими елементами $\{X_\varepsilon\}$, задовольняють ПВВ з функціоналом дії $I(x)$ і нехай $F(x)$ - неперервне відображення з X в X'. Тоді міри $\{\mu'_\varepsilon\}$ на X', що породжені випадковими елементами $\{F(X_\varepsilon)\}$, задовольняють ПВВ з функціоналом дії

$$I'(x)=\inf_{y\colon F(y)=x}\{I(y)\}.$$

Визначимо Φ — клас зростаючих функцій $\phi(T)$, таких, що

$$\lim_{T\to\infty}\phi(T)=\infty, \lim_{T\to\infty}\frac{\phi(T)}{\sqrt{T}}=0.$$

Всюди в подальшому будемо використовувати позначення $\psi(T)=\phi(T)\sqrt{T}$.

Далі введемо функціонал

$$J^*(\phi,h,c)=\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{\frac{-h\phi^2(c^k)}{2}\right\},\qquad c>1.$$

Зауважимо, що якщо $J^*(\phi,h,c_0)<\infty$ для якогось $c_0>1$, то $J^*(\phi,h,c)<\infty$ для всіх $c>1$.

Для кожної $\phi \in \Phi$ визначимо

$$G^2(\phi) = \inf\{h > 0 \colon J^*(\phi, h, c) < \infty\} \tag{4}$$

($G^2(\phi) = \infty$, якщо не існує $h < \infty$ такого, що $J^*(\phi, h, c) < \infty$). Всюди в подальшому тексті G, G^2 чи $G^2(\cdot)$ визначається формулою (4).

Покладемо

$$Y(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}(t)|^2\,dt, & \text{якщо } f \in H^2[0,1],\ f(0) = 0, \\ +\infty, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{5}$$

Далі визначимо

$$\mathcal{F}_D = \left\{ h \in C[0,1] \colon h(0) = 0; Y(h) \le \frac{D^2}{2} \right\}.$$

Якщо $D^2 = \infty$, то $\mathcal{F}_\infty = \big\{h \in C[0,1] \colon h(0) = 0\big\}$.

Для довільного $T > 0$ розглянемо випадкові процеси

$$\xi_T(t) = \frac{\xi(Tt) - x}{\sqrt{T}\phi(T)} = \frac{\beta L^\xi(tT, 0) + w(tT)}{\sqrt{T}\phi(T)}. \tag{6}$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $|\beta| < 1$, $\phi \in \Phi$, G задається (4). Тоді при $T \to \infty$ послідовність $\{\xi_T(t)\}$ має в $C[0,1]$ множину граничних точок, що співпадає з $\mathcal{F}_G$ м.н.*

3. Допоміжні результати

Розв'язок рівняння (1) тісно пов'язаний із розв'язком рівняння Іто. Позначимо

$$\kappa(x) = \begin{cases} (1-\beta)x, & x \le 0, \\ (1+\beta)x, & x \ge 0, \end{cases} \tag{7}$$

і нехай

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\beta}, & x \le 0, \\ \frac{x}{1+\beta}, & x \ge 0 \end{cases}$$

— обернена функція до $\kappa(x)$.

Тоді розглянемо таке стохастичне рівняння Іто

$$\eta(t) = \varphi(x) + \int_0^t \frac{dw(s)}{1 + \beta \operatorname{sgn} \eta(s)}, \qquad t \in [0,1]. \tag{8}$$

Коефіцієнт дифузії цього рівняння є розривною функцією обмеженої варіації і з теореми роботи [12] випливає існування єдиного сильного розв'язку рівняння (8).

Відомо [4], що

$$\eta(t) = \varphi(\xi(t)) \quad \text{або ж} \quad \xi(t) = \kappa(\eta(t)). \tag{9}$$

Тепер розглянемо процеси

$$\eta_T(t) = \frac{\eta(Tt) - \varphi(x)}{\sqrt{T}\phi(T)} = \frac{1}{\sqrt{T}\phi(T)} \int_0^{Tt} \frac{dw(s)}{1 + \beta \operatorname{sgn} \eta(s)}, \qquad t \in [0,1].$$

Позначимо

$$L(f(s), \dot{f}(s)) = (1 + \beta \operatorname{sgn} f(s))^2 \dot{f}^2(s) \tag{10}$$

та визначимо функціонал

$$J(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 L(f(t), \dot{f}(t))\,dt, & \text{якщо } f \in H^2[0,1],\ f(0) = 0, \\ +\infty, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Далі, нехай
$$\mathcal{K}_D = \left\{ f \in C[0,1] \colon f(0) = 0; J(f) \le \frac{D^2}{2} \right\}.$$
Якщо $D^2 = \infty$, то $\mathcal{K}_\infty = \{f \in C[0,1] \colon f(0) = 0\}$. Маємо властивість
$$L(f(s), \dot f(s)) = \left(\frac{d\kappa(f(s))}{ds} \right)^2. \tag{11}$$

Зауваження 1. З (11) робимо висновок, що $Y(\kappa(f)) = J(f)$, а значить з того, що $f \in \mathcal{K}_D$, випливає, що $\kappa(f) \in \mathcal{F}_D$.

Лема 1. *Нехай $|\beta| < 1$. Тоді міри $\{\nu^T\}$, що породжені процесами $\{\eta_T(t)\}$, на просторі $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$ задовольняють ПВВ з нормуючим коефіцієнтом $\phi^2(T)$ та функціоналом дії $J(\phi)$*

Доведення. Твердження цієї леми випливає з [6, Теорема Б], (де $\varepsilon = 1/\phi(T)$), використовуючи (3) та те, що вказаний (в Теоремі Б) інфінум (рівний 0) досягається при $\rho = 0$ або $\rho = 1$.

Лему 1 доведено. □

Введемо послідовність функцій $z_k(t) = \eta_{c^k}(t)$. Тобто
$$z_k(t) = \frac{1}{\psi(c^k)} \int_0^{c^k t} \frac{dw(s)}{1 + \beta \operatorname{sgn} \eta(s)}.$$
Позначимо
$$u(t) = \int_0^t \frac{dw(s)}{1 + \beta \operatorname{sgn} \eta(s)},$$
тоді
$$z_k(t) = \frac{u(c^k t)}{\psi(c^k)}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Нехай $|\beta| < 1$, $\phi \in \Phi$, G задається* (4)*. Тоді при $T \to \infty$ послідовність $\{\eta_T(t)\}$ має в $C[0,1]$ множину граничних точок, що співпадає з $\mathcal{K}_G$ м.н.*

Доведення. Доведемо в три стандартні етапи.

1 етап. Доведемо, що для $G^2(\phi) < \infty$, будь-якого $c > 1$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ м.н.
$$\rho(z_k, \mathcal{K}_G) < \varepsilon.$$
Зауважимо, що множина $\{f \colon J(f) \le a\}$ є компактною в C[0,1] для будь-якого $a < \infty$. Позначимо $N_\varepsilon = \{f \colon \rho(f, \mathcal{K}_G) \ge \varepsilon\}$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що
$$\inf_{f \in N_\varepsilon} J(f) \ge \frac{G^2(\phi)}{2} + \delta.$$
За Лемою 1, для послідовності $\{\eta_T(t)\}$ має місце принцип великих відхилень. Тому, використовуючи [b) з означення ПВВ], для великих k маємо
$$\mathsf{P}\{z_k \in N_\varepsilon\} \le \exp\left\{ -\phi^2(c^k) \left(\frac{G^2(\phi)}{2} + \delta \right) \right\}.$$
Означення $G^2(\phi)$ та лема Бореля–Кантеллі дають нам доведення Етапу 1.

2 етап. Для $G^2(\phi) < \infty$ доведемо, що кожна гранична точка послідовності $\{\eta_T(t)\}$ м.н. є елементом $\mathcal{K}_G$. Якщо $\{T\} = \{c^k\}$, то це випливає з Етапу 1. Нехай тепер $T \in [c^k, c^{k+1}]$. Оскільки функція $\psi(T)$ по T не спадає, то можемо записати таку рівність:
$$\frac{1}{\psi(T)} = \frac{\alpha(T,k)}{\psi(c^k)} + \frac{\beta(T,k)}{\psi(c^{k+1})}, \tag{13}$$

де $\alpha(T,k) \geq 0$, $\beta(T,k) \geq 0$ і $\alpha(T,k) + \beta(T,k) = 1$. Позначимо

$$\widehat{\eta}_{T,k}(t) = \alpha(T,k) z_k(t) + \beta(T,k) z_{k+1}(t).$$

Твердження Етапу 2 буде доведеним, якщо ми доведемо наступну оцінку: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $c_\varepsilon > 1$ і k_0 таке, що для будь-яких $k > k_0$ і $c \in (1, c_\varepsilon)$ м.н.

$$\sup_{t\in[0,1],T\in[c^k,c^{k+1}]} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| < \varepsilon. \tag{14}$$

З означення послідовності $\{\eta_T(t)\}$ і (13) маємо:

$$\eta_T(t) = z_k\left(t\frac{T}{c^k}\right)\frac{\psi(c^k)}{\psi(T)} = \alpha(T,k) z_k\left(t\frac{T}{c^k}\right) + \beta(T,k) z_{k+1}\left(t\frac{T}{c^{k+1}}\right).$$

Зауважимо, що для великих k і для будь-яких δ функції $z_k, z_{k+1} \in \{f\colon \rho(f,\mathcal{K}_G) < \delta\}$.

Тоді

$$|\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| \leq \alpha(T,k)\left|z_k(t) - z_k\left(t\frac{T}{c^k}\right)\right| + \beta(T,k)\left|z_{k+1}(t) - z_{k+1}\left(t\frac{T}{c^{k+1}}\right)\right|,$$

і

$$\sup_{t\in[0,1],T\in[c^k,c^{k+1}]} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| \leq \sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge1]} |z_k(t) - z_k(s)| + \sup_{t\in[0,1],s\in[t/c,t]} |z_{k+1}(t) - z_{k+1}(s)|.$$

З цього маємо наступні нерівності:

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],T\in[c^k,c^{k+1}]} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| \geq \varepsilon\right\} \\ &\quad\leq \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge1]} |z_k(t) - z_k(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\quad\quad+ \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t/c,t]} |z_{k+1}(t) - z_{k+1}(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для оцінки ймовірностей в правій частині (15) скористаємось наступним результатом [1, Лема 2]: існує стала C така, що при всіх $0 \leq a < b < \infty$, $h \leq b - a$ і будь-яких $x > 0$ має місце

$$\mathsf{P}\left(\sup_{a\leq t,s\leq b;|t-s|\leq h} |w(s) - w(t)| > x\sqrt{h}\right) \leq \frac{C(b-a)}{hx}\exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}.$$

Отже, з новим вінерівським процесом $\widetilde{w}(t) = w(c^k t)/\sqrt{c^k}$ маємо:

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge1]} |z_k(t) - z_k(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\quad= \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge1]} \left|\int_t^s \frac{d\widetilde{w}(u)}{1 + \beta\,\mathrm{sgn}\,\eta(c^k u)}\right| \geq \frac{\phi(c^k)\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Зробимо тепер випадкову заміну часу. Введемо функцію

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{ds}{(1 + \beta\,\mathrm{sgn}\,\eta(c^k s))^2},$$

і нехай $\gamma(u)$ — обернена до $\tau(u)$. З означення зрозуміло, що $\gamma(u)$ і $\tau(u)$ — монотонно зростаючі функції, $\gamma(0) = \tau(0) = 0$. Далі, майже всюди існують похідні

$$\tau'(u) = \frac{1}{(1 + \beta\,\mathrm{sgn}\,\eta(c^k u))^2}, \qquad \gamma'(u) = \frac{1}{\tau'(\gamma(u))} = \big(1 + \beta\,\mathrm{sgn}\,\eta(c^k\gamma(u))\big)^2,$$

отже позначивши $P_1 = (1-|\beta|)^2$, $P_2 = (1+|\beta|)^2$, маємо оцінки: $P_1 u \le \gamma(u) \le P_2 u$, $u/P_2 \le \tau(u) \le u/P_1$.

Тоді, згідно зі зробленою заміною, отримаємо з новим вінеровським процесом $\hat{w}(t)$:

$$\int_t^s \frac{d\widetilde{w}(u)}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(c^k u)} = \hat{w}(\gamma(s)) - \hat{w}(\gamma(t)).$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge 1]} \left|\int_t^s \frac{d\widetilde{w}(u)}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(c^k u)}\right| \ge \frac{\phi(c^k)\varepsilon}{2}\right\}\\
&\quad = \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge 1]} |\hat{w}(\gamma(s)) - \hat{w}(\gamma(t))| \ge \frac{\phi(c^k)\varepsilon}{2}\right\}\\
&\quad = \mathsf{P}\left\{\sup_{\gamma(t)\in[\gamma(0),\gamma(1)],\gamma(s)\in[\gamma(t),\gamma(ct\wedge 1)]} |\hat{w}(\gamma(s)) - \hat{w}(\gamma(t))| \ge \frac{\phi(c^k)\varepsilon}{2}\right\}\\
&\quad \le \mathsf{P}\left\{\sup_{u,v\in[0,P_2],|v-u|\le P_2\frac{c-1}{c}} |\hat{w}(v) - \hat{w}(u)| \ge \frac{\phi(c^k)\varepsilon}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Таким чином, в силу згаданного вище результату з [1]

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\\
&\quad \le \mathsf{P}\left\{\sup_{u,v\in[0,P_2],|v-u|\le P_2\frac{c-1}{c}} |\hat{w}(v) - \hat{w}(u)| \ge \frac{\phi(c^k)\varepsilon\sqrt{c}\sqrt{P_2(c-1)}}{2\sqrt{P_2(c-1)}\sqrt{c}}\right\}\\
&\quad \le \frac{2CP_2\sqrt{c}}{\phi(c^k)\varepsilon\sqrt{P_2(c-1)}} \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)\varepsilon^2 c}{16P_2(c-1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Ми скористались тим, що

$$|v-u| \le \gamma(ct\wedge 1) - \gamma(t) = \int_t^{ct\wedge 1} \gamma'(x)\,dx \le (1+|\beta|)^2 \int_t^{ct\wedge 1} dx \le P_2\frac{c-1}{c},$$

оскільки за наших умов має місце нерівність $ct\wedge 1 - t \le (c-1)/c$.

Якщо тепер виберемо

$$c_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon^2}{8(1+|\beta|)^2 G^2(\phi)},$$

то для $c \in (1, c_\varepsilon)$ будемо мати, що

$$\exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)\varepsilon^2 c}{16P_2(c-1)}\right\} \le \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)}{2}G^2(\phi)\right\}.$$

Далі, для будь-якої додатної константи C_1 існує таке k_0, що для $k \ge k_0$ має місце

$$\frac{2CP_2\sqrt{c}}{\phi(c^k)\varepsilon\sqrt{P_2(c-1)}} \le C_1,$$

а значить

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t,ct\wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le C_1 \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)}{2}G^2(\phi)\right\}. \tag{16}$$

Аналогічним чином доводиться, що будь-якої додатної константи C_2 існує таке k_0, що для $k \geq k_0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1],s\in[t/c,t]}|z_{k+1}(t)-z_{k+1}(s)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leq C_2\exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)}{2}G^2(\phi)\right\}. \tag{17}$$

З (4), (15)–(17) і леми Бореля–Кантеллі отримуємо (14). Отже, доведено Етап 2.

3 етап. Для закінчення доведення Теореми 2 нам достатньо довести, що якщо $G^2(\phi) \leq \infty$, тоді кожна функція $f \in \mathcal{K}_G$ така, що $2J(f) = h^2 < G^2(\phi)$ є граничною точкою послідовності $\{z_k(t)\}$. Таким чином, достатньо довести, що для функції f : $2J(f) = h^2$ існує число $c > 1$ таке, що для будь-якого $\delta > 0$ події

$$B_k = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]}|z_k(t)-f(t)|<\delta\right\}$$

відбуваються нескінченно часто. Тобто

$$\mathsf{P}\left\{\limsup_{k\to\infty}B_k\right\}=1. \tag{18}$$

Для доведення (18) будемо використовувати Лему Бореля–Кантеллі–Леві [5]. Для цього введемо сім'ю σ-алгебр $\Im_j = \sigma\{\eta(s), s \leq c^j\}$. Позначимо

$$A_k = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1/c]}|z_k(t)-f(t)|<\delta\right\},$$

$$D_k = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[1/c,1]}|z_k(t)-f(t)|<\delta\right\}.$$

Зауважимо, що $B_k = A_k \cap D_k$ і $D_k \prec \Im_k$. Оскільки

$$z_k(t) = z_{k-1}(tc)\frac{\psi(c^{k-1})}{\psi(c^k)},$$

то для $t \in [0, 1/c]$, $z_k(t) \prec \Im_{k-1}$. Тоді $A_k \prec \Im_{k-1}$ і

$$\mathsf{P}(B_k|\Im_{k-1}) = I(A_k)\,\mathsf{P}(D_k|\Im_{k-1}). \tag{19}$$

Тобто, для доведення (18) за допомогою Леми Бореля–Кантеллі–Леві, нам потрібно довести, що

$$\sum_k I(A_k)\,\mathsf{P}(D_k|\Im_{k-1}) = \infty. \tag{20}$$

Побудуємо розбиття відрізка $[1/c, 1]$ на відрізки довжиною Δ наступним чином: нехай Δ — таке достатньо мале додатне число, що $n(\Delta) = \frac{c-1}{c\Delta}$ — натуральне число. Тоді побудуємо розбиття відрізку $[1/c, 1]$ на відрізки

$$\Delta_i = [d_i, d_{i+1}], \qquad i = 0, \dots, n(\Delta)-1,\ d_i = 1/c + i\Delta.$$

Всі розбиття відрізку $[1/c, 1]$ в подальшому тексті будемо будувати саме так.

Для введеного розбиття розглянемо множину

$$\begin{aligned}\overline{D}_k &= \left\{\sup_{t\in[1/c,1]}|z_k(t)-f(t)|\geq\delta\right\}\\ &\subset\left\{\sup_i\sup_{t\in\Delta_i}|z_k(t)-z_k(d_i)|\geq\frac{\delta}{3}\right\}\cup\left\{\sup_i|z_k(d_i)-f(d_i)|\geq\frac{\delta}{3}\right\}\\ &\cup\left\{\sup_i\sup_{t\in\Delta_i}|f(d_i)-f(t)|\geq\frac{\delta}{3}\right\}.\end{aligned}$$

З нерівності Коші–Буняковського

$$|f(t)-f(d_i)|^2 = \left|\int_{d_i}^t \dot f(s)\,ds\right|^2 \le (t-d_i)\int_s^t \left|\dot f(s)\right|^2\,ds \le \Delta h^2.$$

Вибравши тепер $\Delta < \Delta_* = \delta^2/(9h^2)$, отримуємо, що множина

$$\left\{\sup_i \sup_{t\in\Delta_i} |f(d_i)-f(t)| \ge \frac{\delta}{3}\right\}$$

є порожньою множиною. Для такого вибору Δ маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(D_k|\Im_{k-1}) \ge \mathsf{P}&\left\{\sup_i \left|u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k)\right| < \frac{\delta}{3}\psi(c^k)\middle|\Im_{k-1}\right\}\\ &- \mathsf{P}\left\{\sup_i \sup_{t\in\Delta_i} |z_k(t)-z_k(d_i)| \ge \frac{\delta}{3}\middle|\Im_{k-1}\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

Тепер скористаємось результатами, які для спрощення доведення теореми, сформулюємо пізніше. З Леми 2 (див. розділ 4) існує стала $c>1$ така, що при достатньо великих k м.н.

$$I_{A_k}(\omega) = 1. \tag{22}$$

З Леми 3 (див. розділ 4) для фіксованого $c>1$ і будь-яких $\delta>0$ і $Q>0$ існує таке розбиття відрізку $[1/c,1]$ відрізками довжиною Δ_{**}, що м.н.

$$\mathsf{P}\left\{\sup_i \sup_{t\in\Delta_i} |z_k(t)-z_k(d_i)| \ge \frac{\delta}{3}|\Im_{k-1}\right\} \le 2n(\Delta_{**})\exp\{-\phi^2(c^k)Q\}. \tag{23}$$

З Леми 8 (див. розділ 4) для сталої c з Леми 2 і довільного $q>0$, при достатньо великих k м.н.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}&\left\{\sup_i \left|u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k)\right| < \frac{\delta}{3}\psi(c^k)\middle|\Im_{k-1}\right\}\\ &\ge \frac{1}{2}\exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2}-q\right)\right\}.\end{aligned} \tag{24}$$

Тепер закінчимо доведення теореми. Виберемо число $c>1$ так, щоб мало місце (22). В (23) візьмемо

$$Q = \frac{G^2(\phi)}{2} - q + 1,$$

де q — те ж, що й в (24), і розбиття відрізку $[1/c,1]$ з $\Delta < \min(\Delta_*, \Delta_{**})$. Тоді, при достатньо великих k (таких, що має місце нерівність $8n(\Delta) \le \exp\{\phi^2(c^k)\}$), отримаємо м.н.:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\sup_i \sup_{t\in\Delta_i} |z_k(t)-z_k(d_i)| \ge \frac{\delta}{3}|\Im_{k-1}\right\} &\le 2n(\Delta)\exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2}-q+1\right)\right\}\\ &\le \frac{2n(\Delta)}{\exp\{\phi^2(c^k)\}}\exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2}-q\right)\right\}\\ &\le \frac{1}{4}\exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2}-q\right)\right\}.\end{aligned}$$

Звідси, з (24) і (21), при достатньо великих k і деякому $q>0$ маємо м.н.

$$\mathsf{P}(D_k|\Im_{k-1}) \ge \frac{1}{4}\exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2}-q\right)\right\}.$$

Враховуючи тепер (22), (19) та означення $G^2(\phi)$, отримуємо (20). Етап 3 доведено. Таким чином, теорему 2 доведено. $\square$

4. Доведення Теореми 1 та допоміжні леми

Почнемо з допоміжних результатів.

Лема 2. *Для будь-якого $\delta > 0$ і будь-якого $h < \infty$ існує константа $c > 1$ і номер k_0 такі, що для $k > k_0$ і $g \in K_h$ м.н.*

$$\sup_{t\in[0,1/c]} |z_k(t) - g(t)| < \delta. \tag{25}$$

Доведення. Згідно з першим етапом доведення Теореми 2, для будь-якого $c > 1$ і будь-якого $\delta > 0$ існує число k_0 таке, що для $k > k_0$ м.н.

$$\inf_{g\in K_h} \sup_{t\in[0,1/c]} |z_k(t) - g(t)| < \frac{\delta}{3}. \tag{26}$$

З іншого боку, для будь-якої $g \in K_h$,

$$|g(t)|^2 = \left|\int_0^t \dot g(s)\,ds\right|^2 \le 2th^2.$$

Нехай $c > \max(1, 18h^2/\delta^2)$, тоді

$$\sup_{t\in[0,1/c]} |g(t)| < \frac{\delta}{3}. \tag{27}$$

З (26) і (27) ми отримуємо м.н.

$$\sup_{t\in[0,1/c]} |z_k(t)| < \frac{2\delta}{3}.$$

Остання нерівність разом з (27) дає нам (25) і Лему 2 доведено. □

Використовуючи введені вище позначення для розбиття відрізку $[1/c, 1]$ на відрізки довжиною Δ, сформулюємо і доведемо наступну лему.

Лема 3. *Для фіксованого $c > 1$, для будь-якого $\delta > 0$ і будь-якого $Q > 0$ існує розбиття відрізку $[1/c, 1]$ відрізками довжиною Δ таке, що м.н.*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_i \sup_{t\in\Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \ge \delta | \Im_{k-1}\right\} \le 2n(\Delta)\exp\left\{-\phi^2(c^k)Q\right\}. \tag{28}$$

Доведення. Введемо σ-алгебри $\mathcal{G}_{c^k d_i} = \sigma\{\eta(s), s \le c^k d_i\}$. Майже дослівно до доведення теореми 5 [3, стор. 172], встановлюється оцінка

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \ge \delta | \mathcal{G}_{c^k d_i}\right\} \le 2\exp\left\{-\phi^2(c^k)Q\right\} \quad \text{м.н.}$$

А оскільки $\Im_{k-1} \subseteq \mathcal{G}_{c^k d_i}$ для $i = 0, 1, \dots, n(\Delta) - 1$, то м.н.

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \ge \delta | \Im_{k-1}\right\} \le 2\exp\left\{-\phi^2(c^k)Q\right\}.$$

Звідси випливає (28) і Лему 3 доведено. □

Лема 4. *Нехай $h(x)$ — додатна монотонно зростаюча функція при $x \ge 0$. Тоді для $\zeta \ge 0$ і $a > 0$*

$$\mathsf{E}\,\zeta I_{(|\xi|>a)} \le \frac{1}{h(a)}\,\mathsf{E}\,\zeta h(|\xi|).$$

Доведення. Будемо мати:

$$\mathsf{E}\,\zeta I_{(|\xi|>a)} = \int_{(\omega:\,|\xi|>a)} \zeta\,\mathsf{P}(d\omega) = \int_{(\omega:\,h(|\xi|)>h(a))} \zeta\,\mathsf{P}(d\omega) \le \int_{(\omega:\,h(|\xi|)>h(a))} \zeta\frac{h(|\xi|)}{h(a)}\,\mathsf{P}(d\omega) \le \frac{1}{h(a)}\int_\Omega \zeta h(|\xi|)\,\mathsf{P}(d\omega) \le \frac{1}{h(a)}\,\mathsf{E}\,\zeta h(|\xi|).$$

Лему 4 доведено. □

Позначимо

$$M_k(f;x) = \frac{1}{\phi^2(c^k)}\ln\left\{\mathsf{E}\left\{\exp\left[\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}dw(s)\right]\Big|\eta(c^{k-1})=x\right\}\right\}.$$

Лема 5. *Нехай $|\beta|<1$. Тоді для фіксованого $c>1$, що не залежить від x, для будь-якої $f\in C[0,1]$ має місце м.н.:*

$$M_k(f;x) \le \frac{1}{2(1-|\beta|)^2}\int_{1/c}^1 f^2(s)\,ds.$$

Доведення. З того, що

$$\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\,dw(s) = \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\,dw(s) \mp \frac{\phi^2(c^k)}{2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{f^2(\frac{s}{c^k})}{(1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s))^2}\,ds,$$

а

$$\frac{1}{\big(1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)\big)^2} \le \frac{1}{(1-|\beta|)^2},$$

то за теоремою Гірсанова будемо мати м.н.:

$$M_k(f;x) \le \frac{1}{\phi^2(c^k)}\ln\left\{\exp\left\{\frac{\phi^2(c^k)}{2(1-|\beta|)^2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k} f^2\left(\frac{s}{c^k}\right)\,ds\right\}\right\} = \frac{1}{2(1-|\beta|)^2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k} f^2\left(\frac{s}{c^k}\right)\,ds = \frac{1}{2(1-|\beta|)^2}\int_{1/c}^1 f^2(s)\,ds.$$

Лему 5 доведено. □

Позначимо:

$$C_k = \left\{\sup_i |u(c^kd_i) - f(d_i)\psi(c^k)| < \frac{\delta}{3}\psi(c^k)\right\};$$

$$C_k(i) = \left\{|u(c^kd_i) - f(d_i)\psi(c^k)| < \frac{\delta}{3}\psi(c^k)\right\}, \qquad i=0,1,\dots,n(\Delta)-1;$$

$$J_c(f) = \frac{1}{2}\int_{1/c}^1 \big(1+\beta\operatorname{sgn} f(s)\big)^2\dot f^2(s)\,ds.$$

Для $|\beta|<1$ виберемо константи l, m, p так, щоб виконувались наступні умови:

A_1. $0 < m < \frac{(1-|\beta|)^2}{(1+|\beta|)^2}$.

A_2. При $\beta\ne 0$ $\sqrt{m}\frac{1-|\beta|}{1+|\beta|} < l < \sqrt{\frac{m-m^2}{4|\beta|}}(1-|\beta|)$; при $\beta=0$ $l=m$.

A_3. $p = \frac{(1-|\beta|)^2}{l}\left(\frac{l^2-m^2+m}{(1+|\beta|)^2}+1\right)$.

Позначимо

$$K_1 = \frac{l^2-m^2+m}{(1+|\beta|)^2} - \frac{l^2}{(1-|\beta|)^2}. \tag{29}$$

Зауваження 2. Неважко переконатися, що наступні твердження мають місце:

1. З умови A_1 випливає, що $0 < m < 1$ (тобто квадратні корені в умові A_2 визначені).

2. З умови A_2 випливає, що $K_1 > 0$.

3. Обмеження умови A_2 не є порожньою множиною, оскільки нерівність A_2 рівносильна наступній:

$$\frac{1}{1+|\beta|} < \sqrt{\frac{1-m}{4|\beta|}},$$

а ця нерівність завжди виконується в силу умови A_1.

Для вибраних констант l, m, p покладемо:

$$\begin{aligned}\rho_k(l,m) = \exp\Bigg\{ & l\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \\ & - m\frac{\phi^2(c^k)}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{(1+\beta \operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k}))^2}{(1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s))^2} \dot{f}^2\left(\frac{s}{c^k}\right) ds \Bigg\}.\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}L_{k,p}(\delta) = \Bigg\{ \Bigg| & \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f\left(\frac{s}{c^k}\right)}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \\ & - p\frac{\phi(c^k)}{2\sqrt{c^k}(1-|\beta|)^2} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \left(1+\beta \operatorname{sgn} f\left(\frac{s}{c^k}\right)\right)^2 \dot{f}^2\left(\frac{s}{c^k}\right) ds \Bigg| \\ & \le \frac{\delta\psi(c^k)}{(1-|\beta|)^2} J_c(f) \Bigg\}.\end{aligned}$$

Лема 6. *Нехай* $|\beta| < 1$. *Тоді для вибраних констант* l, m *існує константа* $c > 1$ *така, що м.н.*

$$\mathsf{P}\left\{\rho_k(l,m) I_{\Omega \setminus C_k(i)}(\omega) | \Im_{k-1}\right\} \le \exp\left\{\phi^2(c^k) \frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2} J_c(f)\right\} a_k(i),$$

де $a_k(i)$ *не залежать від* θ *і* Δ *та* $\lim_{k\to\infty} a_k(i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n(\Delta) - 1$.

Доведення. Для будь-якої додатної обмеженої випадкової величини $\theta \prec \Im_{k-1}$ використаємо нерівність Леми 4 для функції

$$h(x) = \exp\left\{\frac{\phi\left(c^k\right) N}{\sqrt{c^k}} x\right\}$$

з деякою константою N, яку оберемо пізніше. Будемо мати:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m) I_{\Omega\setminus C_k(i)}(\omega) &\le \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m) \exp\left\{\frac{N\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left|u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k)\right| - \frac{\delta}{3} N\phi^2(c^k)\right\} \\ &\le \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m) \exp\left\{\frac{N\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left(u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k)\right) - \frac{\delta}{3} N\phi^2(c^k)\right\} \\ &\quad + \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m) \exp\left\{-\frac{N\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left(u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k)\right) - \frac{\delta}{3} N\phi^2(c^k)\right\} \\ &= J_k^1(i) + J_k^2(i).\end{aligned}$$

Розглянемо окремо $J_k^1(i)$. Використовуючи (30) та те, що

$$\frac{1}{(1+\beta \operatorname{sgn} \eta(sc^k))^2} \ge \frac{1}{(1+|\beta|)^2},$$

маємо:

$$
\begin{aligned}
J_k^1(i) &= \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left[Nf(d_i)+N\frac{\delta}{3}+\frac{m}{2}\int_{1/c}^1 \frac{(1+\beta\operatorname{sgn} f(s))^2}{(1+\beta\operatorname{sgn}\eta(sc^k))^2}\dot f^2(s)\,ds\right]\right\}\\
&\qquad\times \mathsf{E}\,\theta\exp\left\{\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\left(Nu(c^kd_i)+\int_{c^{k-1}}^{c^k} l\frac{\left(1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})\right)\dot f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}dw(s)\right)\right\}\\
&\le \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left[Nf(d_i)+N\frac{\delta}{3}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right]\right\}\\
&\qquad\times \mathsf{E}\Biggl\{\theta\,\mathsf{E}\Biggl\{\exp\Biggl[\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\Biggl(Nu(c^{k-1})\\
&\qquad\qquad+\int_{c^{k-1}}^{c^k}\Biggl(\frac{l\left(1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})\right)\dot f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{NI_{[c^{k-1},c^kd_i]}(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\Biggr)dw(s)\Biggr)\Biggr]\,\Bigg|\,\Im_{k-1}\Biggr\}\Biggr\}.
\end{aligned}
$$

З марковості процесу $\eta(t)$ випливає, що:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left\{\exp\left[\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{l\left(1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})\right)\dot f(\frac{s}{c^k})+NI_{[c^{k-1},c^kd_i]}(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}dw(s)\right]\Bigg|\Im_{k-1}\right\}\\
&\qquad=\exp\left\{\phi^2(c^k)M_k\Bigl(l\bigl(1+\beta\operatorname{sgn} f\bigr)\dot f+NI_{[c^{k-1},c^kd_i]}\cdot);\eta(c^{k-1})\Bigr)\right\}.
\end{aligned}
$$

Тому, використовуючи Лему 5,

$$
\begin{aligned}
J_k^1(i) &\le \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left[N\frac{\delta}{3}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right]\right\}\\
&\qquad\times\mathsf{E}\,\theta\exp\left\{\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}N\left(u(c^{k-1})-f(d_i)\psi(c^k)\right)\right\}\\
&\qquad\times\exp\left\{\phi^2(c^k)M_k\left(l\bigl(1+\beta\operatorname{sgn} f\bigr)\dot f+NI_{[c^{k-1},c^kd_i]}(\cdot);\eta(c^{k-1})\right)\right\}\\
&\le \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left[N\frac{\delta}{3}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right]\right\}\\
&\qquad\times\mathsf{E}\,\theta\exp\left\{\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}N\left(u(c^{k-1})-f(1/c)\psi(c^k)\right)\right\}\exp\left\{\phi^2(c^k)N\left(f(1/c)-f(d_i)\right)\right\}\\
&\qquad\times\exp\left\{\frac{\phi^2(c^k)}{2(1-|\beta|)^2}\int_{1/c}^1\Bigl(l\bigl(1+\beta sgn f(s)\bigr)\dot f(s)+NI_{[1/c,d_i]}(s)\Bigr)^2ds\right\}.
\end{aligned}
$$

Далі, за Лемою 2, існує константа $c>1` така, що для великих k м.н.

$$
\exp\left\{\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}N\left(u(c^{k-1})-f(1/c)\psi(c^k)\right)\right\}\le\exp\left\{\frac{\delta}{6}N\phi^2(c^k)\right\}. \tag{31}
$$

Тепер оцінимо

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/c}^1\Bigl(l\bigl(1+\beta\operatorname{sgn} f(s)\bigr)\dot f(s)+NI_{[1/c,d_i]}(s)\Bigr)^2ds\\
&\qquad\le 2l^2J_c(f)+2Nl\int_{1/c}^{d_i}\bigl(1+\beta\operatorname{sgn} f(s)\bigr)\dot f(s)\,ds+N^2(1-1/c).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Позначимо вираз в правій частині (32) через $A_c(J_c,N,l)$. Тоді з (31), (32) отримаємо:

$$\begin{aligned}
J_k^1(i) &\le \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left[N\frac{\delta}{6}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right]\right\}\exp\left\{\frac{\phi^2(c^k)}{2(1-|\beta|)^2}A_c(J_c,N,l)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{\phi^2(c^k)N\left(f(1/c)-f(d_i)\right)\right\}\mathsf{E}\,\theta\\
&=\exp\Bigg\{-\phi^2(c^k)\Bigg[N\frac{\delta}{6}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)-\frac{l^2}{(1-|\beta|)^2}J_c(f)\\
&\qquad\qquad-\frac{N^2}{2(1-|\beta|)^2}(1-1/c)\Bigg]\Bigg\}\\
&\quad\times\exp\left\{\phi^2(c^k)N\int_{1/c}^{d_i}\left(\frac{l(1+\beta\operatorname{sgn}f(s))}{(1-|\beta|)^2}-1\right)\dot f(s)\,ds\right\}\mathsf{E}\,\theta.
\end{aligned}\tag{33}$$

Вираз в дужках під останнім інтегралом (33) не перевищує $\frac{l(1+|\beta|)}{(1-|\beta|)^2}$, а

$$\int_{1/c}^{d_i}\dot f(s)\,ds\le\left|\int_{1/c}^{d_i}\frac{1+\beta\operatorname{sgn}f}{1+\beta\operatorname{sgn}f}\dot f(s)\,ds\right|\le\frac{\sqrt{2J_c(f)}\sqrt{1-1/c}}{1-|\beta|}.$$

Тому з (33), привівши подібні, отримуємо:

$$\begin{aligned}
J_k^1(i) &\le \exp\Bigg\{-\phi^2(c^k)\Bigg[\frac{N\delta}{6}+J_c(f)\left(\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{l^2}{(1-|\beta|)^2}\right)-\frac{N^2(1-1/c)}{2(1-|\beta|)^2}\\
&\qquad\qquad-\frac{lN(1+|\beta|)}{(1-|\beta|)^3}\sqrt{2J_c(f)}\sqrt{1-1/c}\Bigg]\Bigg\}\mathsf{E}\,\theta\\
&=\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\\
&\quad\times\exp\Bigg\{-\phi^2(c^k)\Bigg[\frac{N\delta}{6}-\frac{N^2(1-1/c)}{2(1-|\beta|)^2}\\
&\qquad\qquad+J_c(f)\left(\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{l^2}{(1-|\beta|)^2}\right)\\
&\qquad\qquad-\frac{lN(1+|\beta|)}{(1-|\beta|)^3}\sqrt{2J_c(f)}\sqrt{1-1/c}\Bigg]\Bigg\}\mathsf{E}\,\theta.
\end{aligned}$$

Позначимо, використовуючи (29),

$$\begin{aligned}
\hat a_k(i)=\exp\Bigg\{-\phi^2(c^k)\Bigg[\frac{N\delta}{6}\\
-\frac{N^2(1-1/c)}{2(1-|\beta|)^2}+K_1J_c(f)-\frac{lN(1+|\beta|)}{(1-|\beta|)^3}\sqrt{2J_c(f)}\sqrt{1-1/c}\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Оскільки $K_1>0$, то вираз в квадратних дужках буде додатним при деякому $N>0$. При такому виборі N

$$\lim_{k\to\infty}\hat a_k(i)=0,$$

та

$$J_k^1(i)\le\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\hat a_k(i)\,\mathsf{E}\,\theta.\tag{34}$$

Аналогічно отримаємо:

$$J_k^2(i)\le\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\check a_k(i)\,\mathsf{E}\,\theta.\tag{35}$$

де

$$\lim_{k\to\infty}\check a_k(i)=0.$$

Твердження Леми 6 випливає з (34) та (35) з $a_k(i) = \hat{a}_k(i) + \check{a}_k(i)$.

Лему 6 доведено. □

Лема 7. *Нехай* $|\beta| < 1$. *Тоді для вибраних констант* l, m, p *і будь-якого* $\delta > 0$ *м.н.*

$$\mathsf{P}\{\rho_k(l,m) I_{\Omega \setminus L_{k,p}(\delta)}(\omega) | \Im_{k-1}\} \le \exp\left\{\phi^2(c^k) \frac{l^2 - m^2}{(1+|\beta|)^2} J_c(f)\right\} b_k(\delta),$$

де $b_k(\delta)$ *не залежить від* θ *та* $\lim_{k\to\infty} b_k(\delta) = 0$.

Доведення. Для будь-якої додатної обмеженої випадкової величини $\theta \prec \Im_{k-1}$ використаємо нерівність Леми 4 для функції $h(x) = \exp\{\frac{\phi(c^k)N}{\sqrt{c^k}} x\}$ з деякою константою $0 < N < 1$, яку оберемо пізніше. Будемо мати:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,\theta \rho_k(l,m) I_{\Omega \setminus L_{k,p}(\delta)}(\omega) \\
&\quad \le \mathsf{E}\,\theta \rho_k(l,m) \\
&\qquad \times \exp\left\{\left| \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f\left(\frac{s}{c^k}\right)}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \frac{p\phi^2(c^k)}{2(1-|\beta|)^2 c^k} N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \left(1 + \beta \operatorname{sgn} f\left(\frac{s}{c^k}\right)\right)^2 \dot{f}^2\left(\frac{s}{c^k}\right) ds \right|\right\} \\
&\qquad \times \exp\left\{-\phi^2(c^k) N \frac{\delta}{(1-|\beta|)^2} J_c(f)\right\} \\
&\quad \le \mathsf{E}\,\theta \rho_k(l,m) \exp\left\{ \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{(\delta+p)\phi^2(c^k)N}{(1-|\beta|)^2} J_c(f)\right\} \\
&\qquad + \mathsf{E}\,\theta \rho_k(l,m) \exp\left\{ -\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{(\delta-p)\phi^2(c^k)N}{(1-|\beta|)^2} J_c(f)\right\} \\
&\quad = J_k^1(\delta) + J_k^2(\delta).
\end{aligned}$$

Підставимо $\rho_k(l,m)$ і розглянемо доданок $J_k^1(\delta)$, використовуючи марковість процесу $\eta(t)$:

$$\begin{aligned}
J_k^1(\delta) &= \mathsf{E}\,\theta \exp\left\{ \frac{\phi(c^k)(N+l)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \right. \\
&\qquad \left. - \phi^2(c^k) \left(\frac{(\delta+p)N}{(1-|\beta|)^2} J_c(f) + \frac{m}{2} \int_{1/c}^{1} \frac{(1+\beta \operatorname{sgn} f(s))^2}{(1+\beta \operatorname{sgn} \eta(sc^k))^2} \dot{f}^2(s)\, ds \right)\right\} \\
&\le \exp\left\{ -\phi^2(c^k) J_c(f) \left(\frac{(\delta+p)N}{(1-|\beta|)^2} + \frac{m}{(1+|\beta|)^2}\right)\right\} \\
&\quad \times \mathsf{E}\left\{ \theta\, \mathsf{E}\left\{ \exp\left[\frac{\phi(c^k)(N+l)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{1+\beta \operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta \operatorname{sgn} \eta(s)} \dot{f}\left(\frac{s}{c^k}\right) dw(s) \right] \middle| \Im_{k-1} \right\}\right\} \\
&= \exp\left\{ -\phi^2(c^k) J_c(f) \left(\frac{(\delta+p)N}{(1-|\beta|)^2} + \frac{m}{(1+|\beta|)^2}\right)\right\} \mathsf{E}\,\theta \\
&\quad \times \exp\left\{ \phi^2(c^k) M_k\left((l+N)(1+\beta \operatorname{sgn} f)\dot{f}; \eta(c^{k-1})\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Тоді, за Лемою 5, можемо отримати м.н.:

$$M_k\Big((l+N)(1+\beta\operatorname{sgn} f)\dot f;\eta(c^{k-1})\Big)\le\frac{(l+N)^2}{2(1-|\beta|)^2}\int_{1/c}^{1}(1+\beta\operatorname{sgn} f)^2\dot f^2\,ds$$
$$=\frac{(l+N)^2}{(1-|\beta|)^2}J_c(f).$$

Отже, привівши подібні, отримуємо:

$$\begin{aligned}J_k^1(\delta)&\le\exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left[\frac{(\delta+p)N}{(1-|\beta|)^2}+\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{(l+N)^2}{(1-|\beta|)^2}\right]\right\}\mathsf{E}\,\theta\\&=\exp\Bigg\{\phi^2(c^k)J_c(f)\\&\qquad\times\left(\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}-\left[\frac{(\delta+p)N-(l+N)^2}{(1-|\beta|)^2}+\frac{m+l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}\right]\right)\Bigg\}\mathsf{E}\,\theta\\&=\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\\&\quad\times\exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left[\frac{(\delta+p-2l)N-N^2}{(1-|\beta|)^2}+K_1\right]\right\}\mathsf{E}\,\theta\\&=\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\check b_k(\delta)\,\mathsf{E}\,\theta,\end{aligned}\tag{36}$$

де $\check b_k(\delta)$ — друга експонента з лівої частини останньої рівності в (36). Оскільки $K_1>0$, то вираз в квадратних дужках $\check b_k(\delta)$ буде додатним при деякому $N>0$. При такому виборі N

$$\lim_{k\to\infty}\check b_k(\delta)=0.$$

Аналогічним чином

$$J_k^2(\delta)\le\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\hat b_k(\delta)\,\mathsf{E}\,\theta,$$

де

$$\lim_{k\to\infty}\hat b_k(\delta)=0.$$

Остаточно, твердження Леми 7 має місце з $b_k(\delta)=\check b_k(\delta)+\hat b_k(\delta)$ при деякому додатному N.

Лему 7 доведено. □

Лема 8. *Для довільної функції $f\in\mathcal{K}_G$ такої, що $2J(f)=h^2<G^2$ існують числа $c>1$ і $v>0$ такі, що для достатньо великих k м.н.*

$$\mathsf{P}\left(C_k|\Im_{k-1}\right)\ge\frac12\exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2}{2}-v\right)\right\}.$$

Доведення. Для будь-якої додатної обмеженої випадкової величини $\theta\prec\Im_{k-1}$ маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\theta I_{C_k}(\omega)&=\mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)I_{C_k}(\omega)\\&\quad\times\exp\Bigg\{-l\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\dot f\left(\frac{s}{c^k}\right)dw(s)\\&\qquad+\frac{m\phi^2(c^k)}{2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{(1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k}))^2}{(1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s))^2}\dot f^2\left(\frac{s}{c^k}\right)ds\Bigg\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \exp\left\{\phi^2(c^k)\left[\frac{mJ_c(f)}{(1+|\beta|)^2}-\frac{plJ_c(f)}{(1-|\beta|)^2}\right]\right\}\\
&\quad\times \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)I_{C_k}(\omega)\\
&\qquad\times \exp\Bigg\{-l\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\dot f\left(\frac{s}{c^k}\right)dw(s)\\
&\qquad\qquad+pl\frac{\phi^2(c^k)}{2(1-|\beta|)^2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\left(1+\beta\operatorname{sgn} f\left(\frac{s}{c^k}\right)\right)^2\dot f^2\left(\frac{s}{c^k}\right)ds\Bigg\}\\
&\geq \exp\left\{\phi^2(c^k)J_c(f)\left[\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{pl}{(1-|\beta|)^2}\right]\right\}\\
&\quad\times \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)I_{C_k}(\omega)I_{L_{k,p}}(\omega)\\
&\qquad\times \exp\Bigg\{-l\Bigg(\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\frac{1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})}{1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s)}\dot f\left(\frac{s}{c^k}\right)dw(s)\\
&\qquad\qquad-p\frac{\phi^2(c^k)}{2(1-|\beta|)^2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\left(1+\beta\operatorname{sgn} f(\frac{s}{c^k})\right)^2\dot f^2\left(\frac{s}{c^k}\right)ds\Bigg)\Bigg\}\\
&\geq \exp\left\{\phi^2(c^k)J_c(f)\left[\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{pl}{(1-|\beta|)^2}-\frac{\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right]\right\}\\
&\quad\times \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)I_{C_k}(\omega)I_{L_{k,p}}(\omega).
\end{aligned}
$$

Тут ми: домножили/поділили на $\rho_k(l,m)$ та на $\exp\{\frac{pl\phi^2(c^k)J_c(f)}{2(1-|\beta|)^2}\}$; скористались нерівністю виду $1\geq I_{L_{k,p}}(\omega)$ та нерівністю виду

$$\exp\{-a\}I_{(|a|<b)}\geq\exp\{-b\}I_{(|a|<b)}.$$

Оскільки $I_{C_k}(\omega)I_{L_{k,p(\delta)}}(\omega)\geq 1-I_{\Omega\setminus C_k}(\omega)-I_{\Omega\setminus L_{k,p(\delta)}}(\omega)$, то

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\theta I_{C_k}(\omega)\geq \exp&\left\{\phi^2(c^k)J_c(f)\left(\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{pl}{(1-|\beta|)^2}-\frac{\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\right\}\\
&\times \mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)\left(1-I_{\Omega\setminus C_k}(\omega)-I_{\Omega\setminus L_{k,p(\delta)}}(\omega)\right).
\end{aligned}
$$

Далі, маємо з (30):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)&=\mathsf{E}\left\{\theta\,\mathsf{E}\left\{\rho_k(l,m)\mid\Im_{k-1}\right\}\right\}\\
&=\mathsf{E}\left\{\theta\widetilde{\mathsf{E}}\left\{\exp\left[\frac{\phi^2(c^k)}{2c^k}\int_{c^{k-1}}^{c^k}\left(l^2-m^2\right)\frac{(1+\beta\operatorname{sgn} f)^2}{(1+\beta\operatorname{sgn}\eta)^2}\dot f^2\,ds\;\middle|\;\Im_{k-1}\right]\right\}\right\}.
\end{aligned}
$$

Зрозуміло, що

$$l^2-m^2>l^2\frac{(1+|\beta|)^2}{(1-|\beta|)^2}-m.$$

Враховуючи ліву частину A_2, маємо, що

$$l^2\frac{(1+|\beta|)^2}{(1-|\beta|)^2}-m>0,$$

а значить

$$l^2-m^2>0.$$

Тому

$$\mathsf{E}\,\theta\rho_k(l,m)\geq\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\mathsf{E}\,\theta.$$

Тепер продовжимо доведення, скориставшись цією оцінкою і оцінками Лем 6, 7:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\theta I_{C_k}(\omega) &\geq \exp\left\{\phi^2(c^k)J_c(f)\left(\frac{m}{(1+|\beta|)^2}-\frac{pl+\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\right\}\\ &\quad\times\exp\left\{\phi^2(c^k)\frac{l^2-m^2}{(1+|\beta|)^2}J_c(f)\right\}\left(1-\sum_{i=1}^{n(\Delta)}a_k(i)-b_k(\delta)\right)\mathsf{E}\,\theta\\ &\geq \exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left(\frac{m^2-l^2-m}{(1+|\beta|)^2}+\frac{pl+\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\right\}\mathsf{E}\,\theta.\end{aligned}$$

Враховуючи A_3, маємо:

$$\mathsf{E}\,\theta I_{C_k}(\omega) \geq \exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left(1+\frac{\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\right\}\mathsf{E}\,\theta. \tag{37}$$

Зрозуміло, що

$$J_c(f)\left(1+\frac{\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\leq\left(1+\frac{\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\frac{h^2}{2}.$$

Виберемо

$$\delta<\frac{G^2-h^2}{3h^2}\frac{(1-|\beta|)^2}{l}.$$

З останньої нерівності отримаємо, що

$$J_c(f)\left(1+\frac{\delta l}{(1-|\beta|)^2}\right)\leq\frac{G^2}{2}-v, \tag{38}$$

де $v=\frac{1}{3}(G^2-h^2)$. Твердження Леми 8 випливає з (37), (38).

Лему 8 доведено. □

З ліпшецевості функції κ (див. (7)) випливає наступний результат.

Лема 9. *Нехай для довільних одновимірних функцій $\{f_n\}$ і g має місце*

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)-g(t)|=0\right\}=1.$$

Тоді має місце

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|\kappa(f_n(t))-\kappa(g(t))|=0\right\}=1,$$

де функція κ задаєтьcя (7).

Доведення Теореми 1. Скористаємось Теоремою 2. Маємо: для довільної $f\in\mathcal{K}_G$ існує підпослідовність $\{T_m\}$ така, що

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{T_m\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|\eta_{T_m}(t)-f(t)|=0\right\}=1.$$

Тоді з Леми 9 та формул (7)–(9), будемо мати твердження Теореми 1. Теорему 1 доведено. □

Література

1. А. В. Булинский, *Новый вариант функционального закона повторного логарифма*, Теория вероятностей и ее применения **25**, (1980), №3, 502–512.
2. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, "Наука", Москва, 1979.
3. Й. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, "Наукова думка", Киев, 1982.
4. С. Я. Махно, *Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем*, Теория вероятностей и математическая статистика **64**, (2001), 106–109.
5. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, "Наука", Москва, 1980.
6. T. S. Chiang and S. J. Sheu, *Small perturbations of diffusions in inhomogeneous media*, Ann. Inst. Henri Poincare **38** (2002), no. 2, 285–318.
7. H. J. Engelbert and W. Schmidt, *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, III*, Math. Nachr. **151** (1991), no. 1, 149–197.
8. J. M. Harrison and L. A. Shepp, *On skew Brownian moution*, The Annals of Probability **9** (1981), no. 2, 309–313.
9. K. Ito and H. McKean, *Brownian motions on a half line*, Illinois J. Math. **7** (1963), no. 2, 181–231.
10. J. F. Le Gall, *One-dimensional stochastic equations involving the local times of the unknown process*, Lecture Notes in Mathematics **1095** (1983), 51–82.
11. S. Ya. Makhno, *Functional iterated logarithm law for stochastic equations*, Stochastics and Stochastics Reports **70** (2000), 221–239.
12. S. Nakao, *On the pathwise uniqueness of solutions of one dimensional stochastic differential equations*, Osaka J. Math. **9** (1972), no. 3, 513–518.
13. V. Strassen, *An invariance principle for the law of the iterated logarithm*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. Verw. Geb. **3** (1964), no. 3, 211–226.

Відділ теорії ймовірностей та мат.статистики, ІПММ НАН України, вул.Люксембург, 74, Донецьк, 83114. Україна

Адреса електронної пошти: ikrykun@iamm.ac.donetsk.ua

Надійшла 09/11/2010