Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 124–134

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 124–134

ЗБІЖНІСТЬ МОМЕНТІВ ВИХОДУ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ СМУГИ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА І В. В. ТОМАШИК

Анотація. Для процесів, які є розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами дифузії, що задовольняють умову Ямада, встановлено збіжність за ймовірністю моментів виходу зі смуги за умов збіжності коефіцієнтів. Як допоміжний результат доведено рівномірну збіжність за ймовірністю дограничних процесів до граничного процесу.

Abstract. The problem of convergence in probability of exit times for the processes which are the solutions of SDEs with diffusion coefficients satisfying Yamada condition is solved in the case of convergence of the coefficients. The uniform convergence in probability of pre-limit processes to limit process is established.

Аннотация. Для процессов, что являются решениями стохастических дифференциальных уравнений с коэффициентами диффузии, которые удовлетворяет условие Ямада, установлена сходимость по вероятности моментов выхода из полосы при условии сходимости коэфициентов. Как вспомогательный результат доказана равномерная сходимость по вероятности допредельных процессов к предельному процессу.

1. Вступ

Актуальність проблеми збіжності моментів виходу стохастичного процесу зі смуги зумовлена можливістю її застосування до дослідження граничної поведінки оптимальних моментів зупинки.

Класичний підхід до задачі оптимальної зупинки передбачає використання ексцесивних функцій та відшукання так званої опорної множини, що повністю визначає явний вигляд оптимального моменту зупинки як моменту першого виходу процесу за межі опорної множини [1, 2, 3]. Тому при дослідженні збіжності оптимальних моментів зупинки необхідно мати результати щодо збіжності моментів виходу процесів за межі певних множин.

В даній роботі для процесів, що є розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами дифузії, що задовольняють умову Ямада, досліджується збіжність моментів виходу зі смуги за умов збіжності коефіцієнтів. Як допоміжний результат встановлено збіжність за ймовірністю дограничних процесів до граничного процесу.

2. Рівномірна збіжність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що задовольняють умови Ямада

Розглянемо послідовність стохастичних диференціальних рівнянь:

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t b_n(s, X_n(s))\, ds + \int_0^t \sigma_n(s, X_n(s))\, dW(s), \qquad n \geq 0,\ t \geq 0, \quad (1)$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G40, 60H15, 60J60.

Ключові слова і фрази. Моменти зупинки, стохастичне диференціальне рівняння, умови Ямада.

з невипадковими початковими умовами $X_n(0)$. Коефіцієнти $b_n, \sigma_n \colon \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ є вимірними, $\{W(t), t \geq 0\}$ – вінерів процес відносно фільтрації $\{F_t, t \geq 0\}$ на ймовірнісному просторі (Ω, F, P). Припустимо, що коефіцієнти цих рівнянь задовольняють наступні умови Ямада:

($\mathrm{Y}1_n$) коефіцієнти b_n та σ_n неперервні за сукупністю змінних;

($\mathrm{Y}2_n$) лінійне зростання коефіцієнтів

$$|b_n(t,x)| + |\sigma_n(t,x)| \leq L(1+|x|), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbf{R};$$

($\mathrm{Y}3_n$) умова Ліпшиця на коефіцієнт зносу b_n

$$|b_n(t,x) - b_n(t,y)| \leq L\,|x-y|\,, \qquad t \geq 0,\ x, y \in \mathbf{R};$$

($\mathrm{Y}4_n$) Умова Ямада. Існує така строго зростаюча функція $\rho_n \colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, що

$$\int_{0^+} \rho_n^{-2}(u)\,du = \infty$$

та виконується нерівність

$$|\sigma_n(t,x) - \sigma_n(t,y)| \leq \rho_n(|x-y|), \qquad t \geq 0,\ x, y \in \mathbf{R}.$$

Означення 1. Нехай $T > 0$. Простір $L_2^T(F, \mathsf{P})$ — це простір

$$L_2^T\left(\Omega \times [0,T], F \otimes B([0,T]), \mathsf{P} \times \lambda\right),$$

елементи якого є випадковими процесами з наступною властивістю

$$\int_\Omega \int_0^T X^2(t,\omega)\,\lambda(dt)\ \mathsf{P}(d\omega) < \infty.$$

Умови ($\mathrm{Y}1_n$)–($\mathrm{Y}4_n$) гарантують існування та єдиність сильного розв'язку рівняння (1) із класу $L_2^T(F, \mathsf{P})$ для будь-якого $T > 0$ [4, 5].

Означення 2. Нехай τ_k — моменти першого виходу випадкового процесу Y з інтервалу $(-k, k)$. Позначимо через $\tau = \lim_{k\to\infty} \tau_k$ границю (скінченну або нескінченну) монотонно зростаючої послідовності моментів виходу τ_k при $k \to \infty$. Процес Y називається регулярним, якщо

$$\mathsf{P}(\tau = \infty) = 1.$$

Зауваження 1. За виконання умов ($\mathrm{Y}1_n$)–($\mathrm{Y}4_n$) процес X_n буде регулярним процесом з неперервними траєкторіями [4, 5].

Наступний результат стосується скінченності моментів дифузійного процесу X_n.

Лема 1. *Нехай коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння* (1) *задовольняють умови* ($Y1_n$)–($Y4_n$)*. Тоді існує така стала C, незалежна від n, що для всіх $t \geq 0$ та $\gamma > 0$*

$$\mathsf{E}\,|X_n(t)|^\gamma < [|X_n(0)|^\gamma + C \cdot t] \cdot \exp\,[C \cdot t].$$

Доведення. Зауважимо, що достатньо довести лему для всіх $\gamma = 2p$, $p \in N$. Введемо наступний момент зупинки $\nu_k = \inf\{t\colon |X_n(t)| \geq k\}$ та функцію $f(x) = x^{2p}$. Застосуємо формулу Іто до $f(X_n(t \wedge \nu_k))$ та отримаємо наступне

$$\begin{aligned} f(X_n(t \wedge \nu_k)) &= f(X(0)) \\ &+ \int_0^{t\wedge\nu_k} \left[f^{'}(X_n(s)) \cdot b_n(s, X_n(s)) + \frac{1}{2} f^{''}(X_n(s)) \cdot \sigma_n^2(s, X_n(s)) \right] ds \\ &+ \int_0^{t\wedge\nu_k} f^{'}(X_n(s)) \cdot \sigma_n(s, X_n(s))\,dW(s). \end{aligned}$$

В силу умови $(Y2_n)$ маємо, що

$$\left(\mathsf{E}\left|\int_0^{t\wedge\nu_k} f'(X_n(s))\cdot\sigma_n(s,X_n(s))\,dW(s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2pt^{\frac{1}{2}}k^{2p-1}L(1+k) < \infty,$$

отже $\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\nu_k} f'(X_n(s))\cdot\sigma_n(s,X_n(s))\,dW(s) = 0$ і має місце

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X_n(t\wedge\nu_k))^{2p} &= (X_n(0))^{2p}\\ &\quad+\int_0^t\big[\mathsf{E}\big[2p\cdot b_n(s\wedge\nu_k,X_n(s\wedge\nu_k))\cdot(X_n(s\wedge\nu_k))^{2p-1}\big]\\ &\quad+\mathsf{E}\left[p(2p-1)\sigma_n^2(s\wedge\nu_k,X_n(s\wedge\nu_k))(X_n(s\wedge\nu_k))^{2p-2}\right]\big]\,ds.\end{aligned} \tag{2}$$

Тепер оцінимо математичні сподівання під інтегралами в правій частині рівності (2). Для цього скористаємось умовою $(\mathrm{Y}2_n)$, а також нерівністю Ляпунова для математичних сподівань.

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left[b_n(s\wedge\nu_k,X_n(s\wedge\nu_k))\cdot|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p-1}\right]\\ &\quad\le L\cdot\mathsf{E}\left[|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p-1}+|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p}\right]\\ &\quad\le L\cdot\left[\left(\mathsf{E}\,|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p}\right)^{\frac{2p-1}{2p}}+\mathsf{E}\,|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p}\right]\\ &\quad\le L\cdot\left[1+2\cdot\mathsf{E}\,|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Аналогічно до (3) отримуємо оцінку другого математичного сподівання в правій частині (2)

$$\mathsf{E}\left[\sigma_n^2(s\wedge\nu_k,X_n(s\wedge\nu_k))\,|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p-2}\right] \le L^2\cdot\left[1+2\cdot\mathsf{E}\,|X_n(s\wedge\nu_k)|^{2p}\right].$$

Таким чином, (2) можна переписати в наступному вигляді

$$\mathsf{E}(X_n(t\wedge\nu_k))^{2p} \le (X_n(0))^{2p}+\left[\widetilde{L}(p+2p^2)\cdot t+2\int_0^t\mathsf{E}(X_n(s\wedge\nu_k))^{2p}\,ds\right],$$

де $\widetilde{L}$ — деяка стала, що залежить лише від L. Скориставшись нерівністю Гронуолла та спрямувавши $k\to\infty$, отримаємо

$$\mathsf{E}(X_n(t))^{2p} \le \left[(X_n(0))^{2p}+\left(\widetilde{L}(p+2p^2)\right)\cdot t\right]\cdot\exp\left(2\cdot\widetilde{L}\left(p+2p^2\right)\cdot t\right).$$

що завершує доведення леми. □

Припустимо, що для всіх $t\ge 0$, $x\in\mathbf{R}$, має місце збіжність коефіцієнтів

$$b_n(t,x)\to b_0(t,x),\qquad \sigma_n(t,x)\to\sigma_0(t,x),\qquad n\to\infty, \tag{4}$$

а також $X_n(0)\to X_0(0)$, $n\to\infty$.

В роботі [6] встановлено наступний результат щодо збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (1).

Теорема 1. *Нехай для послідовності стохастичних диференціальних рівнянь* (1) *виконуються умови* $(Y1_n)$–$(Y4_n)$ *та збіжність* (4). *Тоді має місце наступна збіжність*

$$\mathsf{E}[|X_n(t)-X_0(t)|]\to 0,\qquad n\to\infty,$$

що виконується рівномірно на скінченних відрізках.

Тепер встановимо результат щодо рівномірної збіжності за ймовірністю розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (1) до граничного процесу.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння* (1) *задовольняють умови* $(Y1_n)$–$(Y4_n)$ *та має місце збіжність коефіцієнтів з* (4). *Тоді для* $T > 0$, $\varepsilon > 0$ *має місце збіжність*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

Доведення. З умов теореми випливає, що рівняння (1) має єдиний сильний розв'язок. Зі збіжності початкових умов випливає, що існує $B > 0$ таке, що $|X_n(0)| < B$, $n \geq 0$.

Встановимо, що для всіх $t_1 \in [0,T]$, $t_2 \in [0,T]$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, існує таке $H > 0$, що виконується нерівність

$$\mathsf{E}(X_n(t_1) - X_n(t_2))^4 \leq H(t_1 - t_2)^2,$$

причому H залежить лише від сталої L з умови $(\mathbf{Y}2_n)$.

Запишемо рівність

$$(X_n(t_2) - X_n(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} b_n(u, X_n(u))\, ds + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_n(u, X_n(u))\, dW(u).$$

Далі використаємо нерівність $(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4$, нерівність Коші, умови на коефіцієнти рівняння (1), нерівність

$$\mathsf{E}\left(\int_a^b f(t)\, dW(t)\right)^4 \leq 36(b-a)\int_a^b \mathsf{E}\,|f(t)|^4\, dt$$

[7], яка виконується для всіх вимірних функцій $f(\omega)\colon [a,b]\times\Omega \to \mathbf{R}$. Надалі всі несуттєві сталі коефіцієнти позначимо C. Таким чином, можемо записати

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X_n(t_2) - X_n(t_1))^4 &\leq 8\,\mathsf{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} b_n(u, X_n(u))\, du\right]^4 + 8\,\mathsf{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} \sigma_n(u, X_n(u))\, dW(u)\right]^4\\ &\leq C(t_2 - t_1)^3\int_{t_1}^{t_2} \mathsf{E}[b_n(u, X_n(u))]^4\, du + C(t_2 - t_1)\int_{t_1}^{t_2} \mathsf{E}[\sigma_n(u, X_n(u))]^4\, du\\ &\leq C(t_2 - t_1)^3\int_{t_1}^{t_2} \mathsf{E}[1 + |X_n(u)|]^4\, du + C(t_2 - t_1)\int_{t_1}^{t_2} \mathsf{E}[1 + |X_n(u)|]^4\, du.\end{aligned}$$

З леми 1 випливає обмеженість всіх моментів процесів X_n і це завершує доведення потрібної нерівності.

Таким чином, має місце слабка відносна компактність ймовірнісних мір, що відповідають випадковим процесам X_n. Звідси випливає, що послідовність ймовірнісних мір, що відповідають процесам $\{Y_n = X_n - X_0\}$ також є слабко відносно компактною.

Тому довільна підпослідовність процесів Y_{n_k} містить слабко збіжну до деякого процесу підпослідовність $\{Y_{n_{k_l}}\}$: $Y_{n_{k_l}} \Rightarrow Y_\infty$, $l \to \infty$. З теореми 1 випливає, що має місце збіжність $Y_{n_{k_l}}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $l \to \infty$, для кожного $t \geq 0$. Отже, $Y_\infty(t) = 0$, $t \geq 0$, і послідовність процесів Y_n слабко збігається до 0. Оскільки слабкою границею процесів є стала, то процеси Y_n збігаються до 0 за ймовірністю в рівномірній метриці простору $C[0,T]$. Тобто

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty,$$

що завершує доведення теореми. $\square$

3. Збіжність моментів виходу дифузійного процесу зі смуги на обмежених інтервалах

Встановимо результат щодо збіжності моментів виходу допграничних дифузійних процесів зі смуги до моменту виходу граничного процесу з цієї самої смуги.

Нехай X_n — розв'язок наступного однорідного стохастичного диференціального рівняння

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t b_n(X_n(s))\,ds + \int_0^t \sigma_n(X_n(s))\,dW(s), \qquad n \geq 0 \tag{5}$$

з невипадковими початковими умовами $X_n(0)$ такими, що для деякого $B > 0$ має місце $|X_n(0)| < B$, $n \geq 0$. Припустимо, що коефіцієнти цих рівнянь задовольняють умови $(\mathrm{Y}1_n)$, $(\mathrm{Y}3_n)$ та умови

$(\mathrm{Y}5_n)$ коефіцієнти b_n та σ_n обмежені, тобто існує $K > 0$ таке, що

$$|b_n(x)| + |\sigma_n(x)| \leq K, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

$(\mathrm{Y}6_n)$ умова Ямада на коефіцієнти дифузії σ_n

$$|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leq A\sqrt{|x-y|}, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Припустимо також, що для $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$ має місце збіжність

$$X_n(0) \to X_0(0), \qquad b_n(x) \to b_0(x), \qquad \sigma_n(x) \to \sigma_0(x), \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

Дані умови гарантують існування та єдиність сильного розв'язку із класу $L_2^T(F, \mathsf{P})$ для будь-якого $T > 0$ [4]. Також за теоремою 2 маємо рівномірну збіжність за імовірністю процесів X_n до граничного процесу X_0 на кожному компакті.

Оберемо деякі $l, r \in \mathbf{R}$ такі, що $l < X_n(0) < r$ для всіх $n \geq 0$. Введемо наступні моменти виходу:

$$\tau_{n,T}^{[l,r]} = \inf\{t \geq 0 : X_n(t) \notin [l,r]\} \wedge T, \qquad n \geq 0.$$

Теорема 3. *Нехай процеси X_n визначені рівнянням* (5)*, виконуються властивості $(Y1_n)$, $(Y3_n)$, $(Y5_n)$, $(Y6_n)$, має місце збіжність* (6) *та існує $a > 0$ таке, що $|\sigma_n(x)| > a$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$. Тоді має місце наступна збіжність моментів виходу*

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[-\infty,r]} - \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

Доведення. Очевидно, що

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[-\infty,r]} - \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]} - \tau_{0,T}^{[-\infty,r]} > \varepsilon\right) \\ + \mathsf{P}\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]} - \tau_{n,T}^{[-\infty,r]} > \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Розглянемо перший доданок в правій частині (7). Подія $\{\tau_{n,T}^{[-\infty,r]} - \tau_{0,T}^{[-\infty,r]} > \varepsilon\}$ під знаком імовірності означає, що процес X_n досяг рівня r не раніше як за час ε після того, як процес X_0 досяг даного рівня. Тобто,

$$\mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]} - \tau_{0,T}^{[-\infty,r]} > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq \tau_{0,T}^{[-\infty,r]} + \varepsilon} X_n(t) < r, X_0(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}) = r\right).$$

Тепер для будь-якого $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} X_n(t) < r, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right) = r\right)\\
&\quad = \mathsf{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} |X_n(t) - X_0(t)| > \delta,\\
&\qquad\qquad\qquad \sup_{0\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} X_n(t) < r, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right) = r\Bigg)\\
&\quad\quad + \mathsf{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} |X_n(t) - X_0(t)| \le \delta,\\
&\qquad\qquad\qquad \sup_{0\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} X_n(t) < r, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right) = r\Bigg)\\
&\quad \le \mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} |X_n(t) - X_0(t)| > \delta, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right) = r\right)\\
&\quad\quad + \mathsf{P}\left(\sup_{\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} X_0(t) < r+\delta, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right) = r\right).
\end{aligned}$$

Розглянемо доданок

$$\mathsf{P}\left(\sup_{\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} X_0(t) < r+\delta, X_0(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}) = r\right).$$

Процес X_0 — строго марковський. Оскільки момент $\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}$ є моментом зупинки відносно натуральної фільтрації, породженої даним процесом, то можемо записати строго марківську властивість

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_{\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\le t\le \tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon} X_0(t) < r+\delta, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right) = r\right)\\
&\quad = \mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon} X_0(t) < r+\delta, X_0(0) = r\right).
\end{aligned}$$

За умови $X_0(0) = r$ маємо наступну оцінку

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le\varepsilon}(X_0(t) - r) &= \sup_{0\le t\le\varepsilon}\left(\int_0^t b_0(X_0(s))\,ds + \int_0^t \sigma_0(X_0(s))\,dW(s)\right)\\
&\ge \sup_{0\le t\le\varepsilon}\left(\int_0^t \sigma_0(X_0(s))\,dW(s) - K\cdot t\right).
\end{aligned}$$

Далі для $\delta_1 > 0$ отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}(X_0(t)-r)<\delta, X_0(0)=r\right)\\
&\quad\le \mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left[\int_0^t \sigma_0(X_0(s))\,dW(s)-K\cdot t\right]<\delta\right)\\
&\quad= \mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left[\sigma_0(r)\cdot W(t)+\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)-K\cdot t\right]<\delta\right)\\
&\quad= \mathsf{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left[\sigma_0(r)\cdot W(t)+\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)-K\cdot t\right]<\delta,\\
&\qquad\qquad\qquad \sup_{0\le t\le\varepsilon}\left|\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)\right|<\delta_1\Bigg) \qquad (8)\\
&\qquad+\mathsf{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left[\sigma_0(r)\cdot W(t)+\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)-K\cdot t\right]<\delta,\\
&\qquad\qquad\qquad \sup_{0\le t\le\varepsilon}\left|\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)\right|\ge\delta_1\Bigg)\\
&\quad\le \mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}[\sigma_0(r)\cdot W(t)]<\delta+\delta_1+K\cdot\varepsilon\right)\\
&\qquad+\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left|\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)\right|\ge\delta_1\right).
\end{aligned}
$$

Застосуємо нерівність Буркхольдера–Ганді до останнього доданку в правій частині (8) і отримаємо наступне

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left|\int_0^t[\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)\right|\ge\delta_1\right)\\
&\quad\le\frac{1}{\delta_1^2}\cdot\mathsf{E}\left(\left[\sup_{0\le t\le\varepsilon}\int_0^t|\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)|\,dW(s)\right]^2\right)\\
&\quad\le\frac{C_1}{\delta_1^2}\cdot\mathsf{E}\left[\int_0^\varepsilon(\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r))^2\,ds\right].
\end{aligned}
$$

Надалі всі несуттєві сталі позначатимемо через C. За умови Ямада маємо наступне

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\int_0^\varepsilon\big(\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(X_0(0))\big)^2\,ds\right]\le\mathsf{E}\left[\int_0^\varepsilon C\,|X_0(s)-X_0(0)|\,ds\right]\\
&\quad\le\mathsf{E}\left(A\int_0^\varepsilon\int_0^s|b_0(X_0(t))|\,dt\,ds+A\int_0^\varepsilon\left|\int_0^s\sigma_0(X_0(t))\,dW(t)\right|\,ds\right)\\
&\quad\le C\cdot\varepsilon^2+A\int_0^\varepsilon\left(\mathsf{E}\left[\int_0^s|\sigma_0(X_0(t))|\,dW(t)\right]^2\right)^{\frac12}ds\\
&\quad\le C\cdot\varepsilon^2+A\int_0^\varepsilon\left(\mathsf{E}\left[\int_0^s[\sigma_0(X_0(t))]^2\,dt\right]\right)^{\frac12}ds\le C\cdot\left(\varepsilon^2+\varepsilon^{3/2}\right).
\end{aligned}
$$

Таким чином, отримали оцінку

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}\left|\int_0^t [\sigma_0(X_0(s))-\sigma_0(r)]\,dW(s)\right|\ge\delta_1\right)\le\frac{C}{\delta_1^2}\cdot\left[\varepsilon^2+\varepsilon^{3/2}\right].$$

Скориставшись явним виглядом розподілу супремума вінерового процеса [7] та тим, що $\sigma_0(r)>a$, отримаємо оцінку

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}[\sigma_0(r)\cdot W(t)]<\delta+\delta_1+K\cdot\varepsilon\right)\le 1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\delta+\delta_1+K\cdot\varepsilon}{a\cdot\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty}\exp\left\{\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right\}dx.$$

Тепер виберемо сталі δ та δ_1. Покладемо $\delta_1=\varepsilon^{\frac{5}{8}}$ та $\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. Тоді

$$\frac{C}{\delta_1^2}\cdot\left[\varepsilon^2+\varepsilon^{3/2}\right]=C\cdot\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right),$$
$$\frac{\delta+\delta_1+K\cdot\varepsilon}{a\cdot\sqrt{\varepsilon}}=\frac{1}{a}\cdot\left[\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon^{\frac{1}{8}}+K\cdot\sqrt{\varepsilon}\right].$$

Таким чином, існує $h(\varepsilon)>0$ таке, що $h(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$ та виконується нерівність

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\varepsilon}X_0(t)<r+\delta, X_0(0)=r\right)<h(\varepsilon).$$

Отже

$$\mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}>\varepsilon\right)$$
$$\le\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon}|X_n(t)-X_0(t)|>\delta, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right)=r\right)+h(\varepsilon).$$

В силу теореми 2 та через те, що $\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\le T$ майже напевне, маємо

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}+\varepsilon}|X_n(t)-X_0(t)|>\delta, X_0\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right)=r\right)$$
$$\le\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le T+\varepsilon}|X_n(t)-X_0(t)|>\delta\right)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}>\varepsilon\right)\le h(\varepsilon).$$

Для заданого $\gamma>0$ оберемо $\varepsilon_0>0$ так, щоб для $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ виконувалось

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}>\varepsilon\right)\le\gamma.$$

Очевидно, для $\varepsilon>\varepsilon_0$ виконуватиметься нерівність

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}>\varepsilon\right)\le\gamma.$$

В силу довільності вибору $\gamma>0$ маємо потрібну збіжність

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}>\varepsilon\right)=0.$$

Аналогічно до попередньої збіжності можна встановити, що

$$\mathsf{P}\left(\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}>\varepsilon\right)\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.$$

Отже,

$$\mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}\right|>\varepsilon\right)\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.$$

Теорему доведено. □

Зауваження 2. Неважко переконатися, що аналогічний результат до результату теореми 3 можна отримати для моментів виходу $\tau_{n,T}^{[l,\infty]}$, $n \geq 0$.

Зауваження 3. Оскільки для $n > 0$ всі моменти виходу $\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}$, $\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}$ є обмеженими згори невипадковим моментом часу T, то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність з теореми 3 випливає збіжність моментів виходу $\tau_{n,T}^{[-\infty,r]}$ до $\tau_{0,T}^{[-\infty,r]}$ в просторі L_p, $p > 1$.

Наступна теорема є наслідком теореми 3 та зауваження 2.

Теорема 4. *Нехай процеси X_n визначені рівнянням* (5), *виконуються властивості* $(Y1_n)$, $(Y3_n)$, $(Y5_n)$, $(Y6_n)$, *має місце збіжність* (6) *та існує $a > 0$ таке, що $|\sigma_n(x)| > a$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$. Тоді має місце наступна збіжність моментів виходу зі смуги* $[l, r]$

$$\forall \varepsilon > 0\colon \quad \mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[l,r]} - \tau_{0,T}^{[l,r]}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

4. Збіжність моментів виходу дифузійного процесу зі смуги на всій числовій осі

Досі всі процеси та моменти виходу розглядались на скінченних проміжках часу $[0, T]$, $0 < T < \infty$. Поширимо результат теореми 4 на випадок нескінченного проміжку часу $[0, \infty)$.

Під моментами виходу зі смуги $[l, r]$, $l, r \in \mathbf{R}$, $l < r$, процесів $X_n(t)$ та $X_0(t)$ будемо розуміти наступні моменти виходу

$$\tau_n^{[l,r]} = \inf\{t \in [0, \infty)\colon X_n(t) \notin [l, r]\}, \qquad n \geq 0.$$

Має місце наступне твердження [8].

Лема 2. *Нехай для процесів $X_n(t)$ виконуються властивості* $(Y1_n)$–$(Y4_n)$.

(а) Якщо

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}\, dz\right) dy = \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t>0} X_n(t) = +\infty\right) = 1, \qquad n \geq 0. \tag{9}$$

(б) Якщо

$$\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}\, dz\right) dy = \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\inf_{t>0} X_n(t) = -\infty\right) = 1, \qquad n \geq 0. \tag{10}$$

Тобто, за виконання однієї з умов попередньої леми $\tau_n^{[l,r]} < \infty$ майже напевне для кожного $n \geq 0$ [9].

Наступний результат є узагальненням теореми 4 на випадок нескінченного часового проміжка.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* $(Y1_n)$, $(Y3_n)$, $(Y5_n)$, $(Y6_n)$ *для процесів X_n, $n \geq 0$. Тоді мають місце наступні твердження:*

(а) за виконання однієї з умов леми 2 для процесу X_0 має місце наступна збіжність для моментів виходу $\tau_n^{[l,r]}$, $n \geq 0$,

$$\forall \varepsilon > 0\colon \quad \mathsf{P}\left(\left|\tau_n^{[l,r]} - \tau_0^{[l,r]}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{11}$$

(б) за виконання умови (а) леми 2 для процесу X_0 має місце наступна збіжність для моментів виходу $\tau_n^{[-\infty,r]}$, $n \geq 0$,

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \mathsf{P}\left(\left|\tau_n^{[-\infty,r]} - \tau_0^{[-\infty,r]}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{12}$$

(в) за виконання умови (б) леми 2 має місце наступна збіжність для моментів виходу $\tau_n^{[l,\infty]}$, $n \geq 0$,

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \mathsf{P}\left(\left|\tau_n^{[l,\infty]} - \tau_0^{[l,\infty]}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{13}$$

Доведення. Оскільки процес доведення пунктів (а), (б) та (в) аналогічний, доведення наведемо лише для пункту (а).

Оберемо сталі $\varepsilon \in (0,1)$, $\delta > 0$. З леми 2 випливає, що $\tau_0^{[l,r]} < \infty$ P-майже напевне, отже

$$\exists T > 0: \quad \mathsf{P}\left(\tau_0^{[l,r]} > T - 1\right) < \frac{\delta}{2}.$$

Теорема 4 гарантує, що існує таке n_0, що для всіх $n \geq n_0$ має місце

$$\mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[l,r]} - \tau_{0,T}^{[l,r]}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Таким чином, має місце оцінка

$$\mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[l,r]} - \tau_{0,T}^{[l,r]}\right| < \varepsilon, \tau_0^{[l,r]} < T - 1\right) > 1 - \delta. \tag{14}$$

Оцінимо згори імовірність в правій частині нерівності (14). На проміжку $[0, T-1)$ момент виходу $\tau_{0,T}^{[l,r]}$ збігається з моментом виходу $\tau_0^{[l,r]}$ майже напевне. Тому можна записати

$$\mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[l,r]} - \tau_{0,T}^{[l,r]}\right| < \varepsilon, \tau_0^{[l,r]} < T - 1\right) = \mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[l,r]} - \tau_0^{[l,r]}\right| < \varepsilon, \tau_0^{[l,r]} < T - 1\right).$$

Також момент виходу $\tau_{n,T}^{[l,r]}$ збігається з моментом виходу $\tau_n^{[l,r]}$ майже напевне на проміжку $[0, T-1+\varepsilon)$. Отже має місце рівність

$$\mathsf{P}\left(\left|\tau_{n,T}^{[l,r]} - \tau_0^{[l,r]}\right| < \varepsilon, \tau_0^{[l,r]} < T - 1\right) = \mathsf{P}\left(\left|\tau_n^{[l,r]} - \tau_0^{[l,r]}\right| < \varepsilon, \tau_0^{[l,r]} < T - 1\right).$$

Таким чином, з (14) отримаємо оцінку для всіх $n \geq n_0$

$$1 - \delta < \mathsf{P}\left(\left|\tau_n^{[l,r]} - \tau_0^{[l,r]}\right| < \varepsilon, \tau_0^{[l,r]} < T - 1\right) \leq \mathsf{P}\left(\left|\tau_n^{[l,r]} - \tau_0^{[l,r]}\right| < \varepsilon\right),$$

що завершує доведення теореми. □

Отже, має місце збіжність за ймовірністю моментів виходу процесів зі смуги, а також збіжності за ймовірністю моментів виходу процесів за рівень на нескінченному часовому проміжку.

5. Висновок

Розглянуто задачу збіжності моментів виходу зі смуги процесів, що є розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшіцевою дифузією та невипадковими коефіцієнтами. Встановлено рівномірну збіжність за імовірністю допграничних процесів до граничного процесу. У випадку однорідних за часом процесів моменти виходу зі смуги допграничних процесів збігаються за імовірністю до моменту виходу граничного процесу зі смуги. Результати поширені на випадок нескінченного часу та збіжності моментів виходу процесів за рівень.

Література

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Управляемые случайные процессы*, "Наукова думка", Киев, 1977.
2. Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич, *Теоремы и задачи о процессах Маркова*, "Наука", Москва, 1967.
3. D. A. Darling, T. Ligget, and H. M. Taylor, *Optimal stopping for partial sums*, Ann. Math. Statist. (1972), 1363–1368.
4. С. Ватанабэ, Н. Икеда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, "Наука", Москва, 1986.
5. T. Yamada, *Sur l'approximation des solutions d'equations differentielles stochastiques*, Z. Wahr. Verw. Geb. **36** (1976), 153–164.
6. Ю. С. Мішура, С. В. Посашкова, Г. М. Шевченко, *Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неоднорідними коефіцієнтами та неліпшіцевою дифузією*, Теорія ймовір. та матем. статист. **79** (2008), 105–113.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1977.
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, "Наукова думка", Киев, 1968.
9. K. Ito and H. P. McKean, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer, 1965.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: vladdislav@gmail.com

Надійшла 01/11/2012