Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 181–192

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 181–192

ЄДИНІСТЬ ОЦІНКИ QUASI-LIKELIHOOD В ПУАССОНІВСЬКІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКОЮ В РЕГРЕСОРІ

УДК 519.21

С. В. ШКЛЯР

Анотація. Вивчається пуассонівська регресія з нормально розподіленою похибкою Берксона в регресорі. Для параметрів регресії розглянуто оцінки Simple Score та Quasi-Likelihood. У структурній моделі наведено достатні умови сильної консистентності цих оцінок та достатні умови єдиності розв'язку рівнянь для цих оцінок. При доведенні єдиності розв'язку не вимагається обмеженості параметричної множини.

Abstract. Poisson regression with Gaussian error of Berkson type in the regressor is studied. For the regression parameters, Simple Score estimator and Quasi-Likelihood estimator are considered. Sufficient conditions for strong consistency of the estimators and sufficient conditions for uniqueness of solution to estimating equations are provided. The parameter set may be unbounded.

Аннотация. Изучается пуассоновская регрессия с нормально распределенной ошибкой Берксона в регрессоре. Для параметров регрессии рассмотрены оценки Simple Score и Quasi-Likelihood. В структурной модели приведены достаточные условия сильной состоятельности этих оценок и достаточные условия единственности решений уравнений, из которых определяются эти оценки. При доказательстве единственности решения не требуется ограниченность параметрического множества.

1. Вступ

Розглядаємо логлінійну пуассонівську регресію. На одному спостереженні відгук Y приймає цілі невід'ємні значення з умовною ймовірністю $\mathsf{P}[Y=k \mid X] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, де $\lambda = e^{\beta_0+\beta_1 X}$, $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ — параметр регресії, X — істинне значення регресора. Ми розглядаємо модель Берксона для похибки в X:

$$X = X_0 + U^{\mathrm{Berk}}.$$

Вважаємо, що похибка нормально розподілена $U^{\mathrm{Berk}} \sim N(0,\tau^2)$, не залежить від X_0 та індиферентна, тобто $\mathsf{P}[Y{=}k \mid X, U^{\mathrm{Berk}}] = \mathsf{P}[Y{=}k \mid X]$.

Ми розглядаємо структурну модель. Спостережувані значення регресора X_{0i} випадкові; $\{(X_{0i}, X_i, Y_i),\ i{=}1,2,\dots\}$ — послідовність незалежних та однаково розподілених реалізацій. Будуються оцінки параметра β. Параметр τ^2 вважаємо відомим.

Модель пуассонівської регресії з класичною похибкою в регресорі розглянута в статтях [2, 5]. Метод оцінювання Quasi-Likelihood (який ще називають Quasi-Score) розглянуто в статті [8]. Для різних класичних регресійних моделей з нормально розподіленими регресором та похибкою вимірювання оцінку Quasi-Likelihood побудовано в [7]; наведені формули використовуються також у моделі Берксона.

Якщо в моделі з класичною похибкою регресор та похибка мають нормальний розподіл, то така модель зводиться до моделі Берксона [1, §2.2.3]. Теореми про консистентність оцінки Quasi-Likelihood в узагальнених лінійних моделях з такими похибками в змінних наведено в [3]. Ми відмовимося від припущення про обмеженість

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62J12; Secondary 62H10.

Ключові слова і фрази. Модель регресії з похибками в змінних, пуассонівська регресія, модель Берксона.

параметричної множини — в цьому випадку консистентність оцінки Quasi-Score та єдиність розв'язку оціночного рівняння в класичній моделі з похибкою доведено в дисертації [6]. Тут ми розглядаємо структурну модель Берксона. Умову про нормальність розподілу змінної X_0 замінено на більш загальні умови (14) та (24). Знайдено достатні умови того, що рівняння для оцінок Simple Score та Quasi-Likelihood зрештою мають рівно один розв'язок, а також достатні умови сильної консистентності цих оцінок.

2. Класична модель пуассонівської регресії

2.1. Статистична модель. Значення регресора позначатимемо через X_i, значення відгуку через Y_i. Як правило, розглядають функціональну модель, у якій значення регресора X_i — невипадкові числа, хоча це і не обов'язково. Розподіл Y_i (якщо X_i випадкове, то умовний відносно X_i) — це розподіл Пуассона

$$Y_i \mid X_i \sim \mathrm{Poi}\left(e^{\beta_0+\beta_1 X_i}\right),$$

$$\mathsf{P}[Y_i{=}k \mid X_i] = \frac{1}{k!}\exp\left\{-e^{\beta_0+\beta_1 X} + k(\beta_0+\beta_1 X_i)\right\}$$

де $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ — параметр регресії.

Спостереження вважаємо незалежними. Якщо X_i невипадкові (така модель називається функціональною), то Y_i незалежні випадкові величини, які мають пуассонівські розподіли з, взагалі кажучи, різним значенням параметра. Якщо X_i незалежні та однаково розподілені випадкові змінні (така модель називається структурною), то пари (X_i, Y_i) — незалежні та однаково розподілені випадкові вектори.

2.2. Оцінка максимальної вірогідності. За спостереженнями

$$(X_i, Y_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

оцінка параметра β означається як точка мінімуму функціоналу

$$Q_{\text{no error}}(b) = \sum_{i=1}^{N}\left(e^{b_0+b_1X_i} - (b_0+b_1X_i)Y_i\right), \tag{1}$$

або як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N e^{b_0+b_1X_i} = \sum_{i=1}^N Y_i, \\ \sum_{i=1}^N X_i e^{b_0+b_1X_i} = \sum_{i=1}^N X_iY_i. \end{cases} \tag{2}$$

Оскільки функція $Q_{\text{no error}}(b)$ опукла, то множина точок глобального мінімуму цієї функції на $\mathbb{R}^2$ співпадає з множиною розв'язків системи рівнянь (2).

Лема 2.1 (єдиність розв'язку)**.** *Необхідні та достатні умови єдиності розв'язку* (2) *полягають в наступному:*

$$\begin{cases} \exists i{\le}N\ \exists j{\le}N\colon \quad X_i < X_j,\ Y_i > 0, \\ \exists i{\le}N\ \exists j{\le}N\colon \quad X_i < X_j,\ Y_j > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Окрім того, якщо всі X_i, $i{=}1,\ldots,N$, однакові та спостерігаються ненульові Y_i, то рівняння (2) *має безліч розв'язків. У інших випадках рівняння не має розв'язку.*

Доведення. Якщо $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_N = 0$, то система рівнянь (2) не має розв'язків. Розглянемо випадок, коли для якогось спостереження $Y_i > 0$. Позначимо $\overline{X_Y} = \sum_{i=1}^N X_iY_i / \sum_{i=1}^N Y_i$. Вилучимо з системи рівнянь (2) змінну b_0:

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i e^{b_1X_i}}{\sum_{i=1}^N e^{b_1X_i}} = \overline{X_Y}.$$

Ліва частина рівняння — неспадна (або стала, або строго монотонна) функція від b_1, яка прямує до $\min_{i=1,\ldots,N} X_i$ при $b_1 \to -\infty$ та до $\max_{i=1,\ldots,N} X_i$ при $b_1 \to +\infty$. Рівняння має рівно один розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\min_{i=1,\ldots,N} X_i < \overline{X_Y} < \max_{i=1,\ldots,N} X_i$, що рівносильно умові (3). Рівняння має безліч розв'язків тоді і тільки тоді, коли $\min_{i=1,\ldots,N} X_i = \overline{X_Y} = \max_{i=1,\ldots,N} X_i$. В інших випадках рівняння не має розв'язків. □

Якщо є принаймні два спостереження з додатними Y та різними X, то система (2) має рівно один розв'язок.

3. Пуассонівська регресія з похибкою в змінних. Модель Берксона.

3.1. **Статистична модель.** Ми розглянемо модель Берксона для скалярної логлінійної пуассонівської регресії.

3.1.1. *Одне спостереження.* Позначимо: X_0 — спостережуване значення регресора; X — істинне значення регресора; Y — значення відгуку (ціле невід'ємне число).

У моделі Берксона істинне значення регресора є спостережуваним значенням регресора з похибкою,

$$X = X_0 + U^{\mathrm{Berk}}.$$

Вважаємо, що похибка гомоскедастична та нормально розподілена, тоді

$$X \mid X_0 \sim N\left(X_0, \tau^2\right).$$

Параметр τ^2 будемо вважати відомим.

Розподіл Y залежить від істинного значення регресора,

$$Y \mid (X, X_0) \sim \mathrm{Poi}\left(e^{\beta_0+\beta_1 X}\right),$$

$$\mathsf{P}[Y{=}k \mid X, X_0] = \frac{1}{k!}\exp\left\{-e^{\beta_0+\beta_1 X} + k(\beta_0+\beta_1 X)\right\},$$

де $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ — параметр регресії.

Те, що умовний розподіл $Y \mid (X, X_0)$ явно не залежить від X_0 (тобто

$$Y \mid (X, X_0) \sim Y \mid X),$$

називається умовою індиферентності (indifferentiability condition).

3.1.2. *Функціональна та структурна моделі.* В усіх випадках вважаємо реалізації (X_{0i}, X_i, Y_i) (випадкові тривимірні вектори) незалежними. Спостерігаються (X_{0i}, Y_i), $i{=}1, 2, \ldots, N$.

Функціональна модель. У такій моделі X_{0i} — невипадкові числа. Пари (X_{0i}, Y_i) незалежні, але не однаково розподілені.

Структурна модель. У такій моделі X_{0i} — незалежні, однаково розподілені випадкові величини. Тоді реалізації (X_{0i}, X_i, Y_i) також є незалежними, однаково розподіленими випадковими трійками.

3.2. **Оцінки параметра регресії.**

3.2.1. *Наївна оцінка.* При побудові наївної оцінки похибку ігноруємо і у рівняння для оцінки максимальної вірогідності (ОМВ) у моделі без похибок (2) підставляємо X_0 замість X. Оцінка шукається як точка мінімуму функції

$$Q_{\mathrm{naive}}(b) = \sum_{i=1}^{N}\left(e^{b_0+b_1 X_{0i}} - (b_0 + b_1 X_{0i})Y_i\right), \tag{4}$$

або з системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N e^{b_0+b_1X_{0i}} = \sum_{i=1}^N Y_i, \\ \sum_{i=1}^N X_{0i} e^{b_0+b_1X_{0i}} = \sum_{i=1}^N X_{0i}Y_i. \end{cases} \tag{5}$$

3.2.2. *Оцінка Simple Score.* Запишемо регресію Y за X_0. Умовне математичне сподівання дорівнює

$$\mathsf{E}[Y|X_0] = \exp\left\{\beta_0 + \beta_1 X_0 + \tfrac{1}{2}\beta_1^2\tau^2\right\}, \tag{6}$$

тому $\mathsf{E}\left[\left(\exp\{\beta_0 + \beta_1 X_0 + \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2\} - Y\right)\cdot a(X_0)\right] = 0$ для таких борелевих функцій $a(\cdot)$, що математичне сподівання існує. Незміщеною є наступна система рівнянь для оцінки параметра β:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2} = \sum_{i=1}^N Y_i, \\ \sum_{i=1}^N X_{0i} e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2} = \sum_{i=1}^N X_{0i}Y_i. \end{cases} \tag{7}$$

Незміщеність системи рівнянь означає, що при підстановці замість b істинного значення параметра β ліва та права частини рівнянь мають однакове математичне сподівання. (Для незміщеності системи рівнянь (7) в структурній моделі потрібне виконання умови $\mathsf{E}\,|X_0|\,e^{\beta_1 X_0} < \infty$).

Оцінку можна шукати як точку мінімуму функції

$$Q_{\mathrm{SS}}(b) = \sum_{i=1}^N \left(e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2} - \left(b_0 + b_1X_{0i} + \tfrac{1}{2}b_1^2\tau^2\right)Y_i\right), \tag{8}$$

$$Q_{\mathrm{SS}}(b_0, b_1) = Q_{\mathrm{naive}}\left(b_0 + \tfrac{1}{2}b_1^2\tau^2, b_1\right). \tag{9}$$

Із співвідношення між цільовими функціями (9) отримаємо співвідношення між наївною оцінкою та оцінкою методом Simple Score:

$$\hat\beta_{1,\mathrm{SS}} = \hat\beta_{1,\mathrm{naive}}, \tag{10}$$

$$\hat\beta_{0,\mathrm{SS}} = \hat\beta_{0,\mathrm{naive}} - \tfrac{1}{2}\hat\beta_{1,\mathrm{naive}}^2\tau^2. \tag{11}$$

3.2.3. *Оцінка Quasi Likelihood.* Цей метод оцінювання також називають Quasi Score або зваженим методом найменших квадратів. Система рівнянь для оцінки (з невідомою b):

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mathsf{E}_b[Y_i|X_{0i}] - Y_i}{\mathrm{Var}_b[Y_i|X_{0i}]} \cdot \frac{\partial\,\mathsf{E}_b[Y_i|X_{0i}]}{\partial b} = 0.$$

Оскільки

$$\mathrm{Var}_b[Y|X_0] = e^{b_0+b_1X_0+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2} + e^{2b_0+2b_1X_0+2b_1^2\tau^2} - e^{2b_0+2b_1X_0+b_1^2\tau^2}$$

(див. також формулу (6)), то система рівнянь для оцінки записується у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2} - Y_i}{1+(e^{b_1^2\tau^2}-1)e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2}} = 0, \\ \sum_{i=1}^N \frac{(e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2} - Y_i)(X_{0i}+b_1\tau^2)}{1+(e^{b_1^2\tau^2}-1)e^{b_0+b_1X_{0i}+\frac{1}{2}b_1^2\tau^2}} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Зауважимо, що у другому рівнянні множник $(X_{0i} + b_1\tau^2)$ можна замінити на X_{0i}, після чого утворюється рівносильна система рівнянь.

3.2.4. *Оцінка максимальної вірогідності.* Умовна ймовірність

$$\mathsf{P}[Y{=}k \mid X_0] = \frac{1}{k!} f\left(k, \beta_0 + \beta_1 X_0, \beta_1^2 \tau^2\right),$$

де $f(k,\mu,\sigma^2) = \mathsf{E}\exp\{-e^\zeta + k\zeta\}$, $\zeta \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Оцінка знаходиться як точка максимуму функціоналу

$$\sum_{i=1}^N \ln f\left(Y_i, b_0 + b_1 X_{0i}, b_1^2\tau^2\right).$$

Рівняння для оцінки не записується в явному вигляді без використання інтегралів або спеціальних функцій.

3.3. **Єдиність розв'язку та консистентність оцінки Simple Score у структурній моделі.** Писатимемо, що випадкова подія A_N, яка залежить від номера N, *зрештою* виконується, якщо нижня границя подій

$$\varliminf_{N\to\infty} A_N = \left\{\exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N > N_0 \colon \text{сталась подія } A_N\right\}$$

має ймовірність 1.

Теорема 3.1. *Якщо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці та задовольняє умову*

$$\exists\varepsilon{>}0\colon\ \mathsf{E}[e^{(\beta_1+\varepsilon)X_0} + e^{(\beta_1-\varepsilon)X_0}] < \infty,$$

то система рівнянь (7) для оцінки Simple Score зрештою має рівно один розв'язок на $\mathbb{R}^2$. Цей розв'язок буде сильно консистентною оцінкою параметра β.

Доведення. Позначимо граничне значення нормованої цільової функції наївної оцінки

$$q^*_{\text{naive}}(b) = \frac{1}{N}\,\mathsf{E}\,Q(b) = \mathsf{E}\left[e^{b_0+b_1X_0} - (b_0+b_1X_0)Y\right].$$

При

$$|b_1 - \beta_1| \le \varepsilon \tag{13}$$

математичне сподівання скінченне. При b, що задовольняють (13),

$$\frac{1}{N}\,\mathsf{E}[Q(b) \mid X, X_0] = e^{b_0+b_1X_0} - (b_0+b_1X_0)e^{\beta_0+\beta_1X},$$

$$\frac{1}{N}\,\mathsf{E}[Q(b) \mid X_0] = e^{b_0+b_1X_0} - (b_0+b_1X_0)e^{\beta_0+\beta_1X_0+\frac12\beta_1^2\tau^2},$$

$$q^*_{\text{naive}}(b) = \mathsf{E}\left[e^{b_0+b_1X_0} - (b_0+b_1X_0)e^{\beta_0+\beta_1X_0+\frac12\beta_1^2\tau^2}\right].$$

Функція $q^*_{\text{naive}}(b)$ опукла за векторною змінною b (строго опукла, бо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці). Оскільки

$$\begin{aligned}
&e^{b_0+b_1X_0} - (b_0+b_1X_0)e^{\beta_0+\beta_1X_0+\frac12\beta_1^2\tau^2}\\
&\quad= e^{\beta_0+\beta_1X_0}\left(e^{b_0-\beta_0-\frac12\beta_1^2\tau^2+(b_1-\beta_1)X_0} - b_0 - b_1X_0\right)\\
&\quad\ge e^{\beta_0+\beta_1X_0}\left(1 - \beta_0 - \frac12\beta_1^2\tau^2 - \beta_1X_0\right),
\end{aligned}$$

то

$$q^*_{\text{naive}}(b) \ge \mathsf{E}\left[e^{\beta_0+\beta_1X_0}\left(1-\beta_0-\tfrac12\beta_1^2\tau^2-\beta_1X_0\right)\right],$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли

$$\mathsf{P}\left[b_0 - \beta_0 - \tfrac12\beta_1^2\tau^2 + (b_1-\beta_1)X_0 = 0\right] = 1.$$

Таким чином, функція $q^*_{\text{naive}}(b)$ досягає строгого мінімуму в точці

$$(b_0, b_1) = \left(\beta_0 + \frac12\beta_1^2\beta_1^2, \beta_1\right).$$

За посиленим законом великих чисел

$$\forall b \in [\beta_0-\varepsilon, \beta_0+\varepsilon] \times [\beta_1-\varepsilon, \beta_1+\varepsilon] \colon\ \mathsf{P}\biggl(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Q_{\text{naive}}(b) = q^*_{\text{naive}}(b)\biggr) = 1,$$

звідки за теоремою 10.8 з [4]

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\substack{|b_0-\beta_0|\le\varepsilon\\ |b_1-\beta_1|\le\varepsilon}} \left|\frac{1}{N}Q_{\text{naive}}(b) - q^*_{\text{naive}}(b)\right| = 0 \quad \text{м.н.}$$

Тому зрештою функція $Q_{\text{naive}}(b)$ досягає мінімуму, і для всіх точок мінімуму $\hat\beta_{\text{naive}}$ має місце збіжність майже напевно (м.н.)

$$\lim_{N\to\infty} \hat\beta_{0,\text{naive}} = \beta_0 + \tfrac12 \beta_1^2\tau^2,$$

$$\lim_{N\to\infty} \hat\beta_{1,\text{naive}} = \beta_1.$$

Єдиність розв'язку випливає з аналітичності та опуклості функції $Q_{\text{naive}}(b)$. Звідси за співвідношеннями (10)–(11) отримаємо збіжність

$$\lim_{N\to\infty} \hat\beta_{\text{SS}} = \beta \quad \text{м.н.} \qquad \square$$

3.4. **Єдиність розв'язку та консистентність оцінки Quasi-Likelihood у структурній моделі.**

Теорема 3.2. *Якщо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці та задовольняє умову*

$$\mathsf{E}\left[e^{(-\beta_1-2\varepsilon)X_0} + e^{(-\beta_1+2\varepsilon)X_0} + e^{(2\beta_1-2\varepsilon)X_0} + e^{(2\beta_1+2\varepsilon)X_0}\right] < \infty, \tag{14}$$

то система рівнянь (12) *для оцінки Quasi-Likelihood буде зрештою мати розв'язок на $\mathbb{R}^2$. Оцінка, яку означимо як розв'язок системи рівнянь* (12) *і яку позначимо $\hat\beta_{\text{QL}}$, є сильно консистентною оцінкою параметра β, тобто*

$$\lim_{N\to\infty} \hat\beta_{\text{QL}} = \beta \quad \textit{м.н.}$$

Для доведення теореми 3.2 ми розглянемо сім'ю оцінок (з параметром $\alpha \in [0,1]$), які означаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{e^{b_0+b_1X_{0i}}-Y_i}{\alpha+(1-\alpha)e^{b_0+b_1X_{0i}}} = 0,\\ \sum_{i=1}^N \frac{(e^{b_0+b_1X_{0i}}-Y_i)X_{0i}}{\alpha+(1-\alpha)e^{b_0+b_1X_{0i}}} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Ці оцінки можна означати також, мінімізуючи функціонал

$$Q_{\text{nai-}\alpha}(b) = \sum_{i=1}^N q_{\text{nai-}\alpha}(X_{0i}, Y_i; b),$$

де

$$\begin{gathered} q_{\text{nai-}\alpha}(x_0, y; b) \\ = \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\alpha + (1-\alpha)e^{b_0+b_1x_0}\right) + \frac{y}{\alpha}\ln\left(\alpha e^{-b_0-b_1x_0} + 1 - \alpha\right), \qquad 0<\alpha<1,\\ q_{\text{nai-}\alpha}(x_0, y; b) = b_0 + b_1x_0 + ye^{-b_0-b_1x_0} - y, \qquad \alpha = 0,\\ q_{\text{nai-}\alpha}(x_0, y; b) = e^{b_0+b_1x_0} - 1 - (b_0+b_1x_0)y, \qquad \alpha = 1. \end{gathered}$$

Оскільки функціонал $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ опуклий при всіх $\alpha \in [0,1]$, то множина його розв'язків співпадає з множиною розв'язків екстремального рівняння (15).

Спочатку вивчимо асимптотичні властивості оцінок при фіксованому α.

Лема 3.1. *Необхідні та достатні умови існування та єдиності розв'язку рівняння* (15) *наведені в таблиці:*

α	*Умова того, що* (15) *має рівно один розв'язок*	*Умова того, що* (15) *має безліч розв'язків*
$0<\alpha\le 1$	$\exists i\le N,\ \exists j\le N,\ \exists k\le N,\ \exists l\le N$: $X_{0i}<X_{0j},\ X_{0k}<X_{0l},\ Y_i>0,\ Y_l>0$	$\forall i\le N\colon X_{0i}=X_{01}$; $\exists j\le N\colon Y_j>0$
$\alpha=0$	$\exists i_1\le N,\ \exists i_2\le N\colon Y_{i_1}>0, Y_{i_2}>0$, $X_{0i_1}<\overline{X_0}<X_{0i_2}$	$\forall i\le N\colon (X_{0i}-\overline{X_0})Y_i=0$; $\exists i\le N\colon Y_j>0$

Тут $\overline{X_0}=N^{-1}\sum_{i=1}^N X_{0i}$ *— середнє арифметичне спостережуваних значень регресора.*

Якщо умови, наведені в таблиці не виконуються, то рівняння (15) *не має розв'язків.*

Доведення леми 3.1. а) Для випадку $\alpha=1$ твердження випливає з леми 2.1.

б) При фіксованих x_0, y та α, $0<\alpha\le 1$

$$\inf_{b\in\mathbb{R}^2} q_{\text{nai-}\alpha}(x_0,y;b)>-\infty;$$

$$q_{\text{nai-}\alpha}\left(x_0,y;b^{(n)}\right)\to+\infty \Leftrightarrow \max\left(b_0^{(n)}+b_1^{(n)}x_0, -y\,(b_0^{(n)}+b_1^{(n)}x_0)\right)\to+\infty.$$

Функція $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ опукла та аналітична, тому множина точок мінімуму опукла, і якщо обмежена, то одноточкова. З цього випливає, що спільною для всіх α, $0<\alpha\le 1$, необхідною та достатньою умовою існування та єдиності розв'язку є

$$\lim_{\|b\|\to\infty}\max_{i=1,\dots,N}\max(b_0+b_1X_{0i}, -Y_i\,(b_0+b_1X_{0i}))=+\infty. \tag{16}$$

(Рівняння (15) має рівно один розв'язок тоді і тільки тоді, коли функція $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ має рівно одну точку мінімуму. Це рівносильно

$$\lim_{\|b\|\to\infty} Q_{\text{nai-}\alpha}(b)=+\infty; \qquad \lim_{\|b\|\to\infty}\max_i q_{\text{nai-}\alpha}(X_{0i},Y_i;b)=+\infty;$$

що рівносильно (16).)

Отже, при $0<\alpha<1$ умова існування та єдиності розв'язку системи рівнянь (15) така сама, як і при $\alpha=1$. Розрізнення випадків, коли (15) має безліч розв'язків та коли взагалі не має розв'язків, переборне і тут не наводиться.

в) Випадок $\alpha=0$. Система рівнянь (15) зводиться до такої:

$$\begin{cases} N=\sum_{i=1}^N e^{-b_0-b_1X_{0i}}Y_i,\\ \sum_{i=1}^N X_{0i}=\sum_{i=1}^N e^{-b_0-b_1X_{0i}}X_{0i}Y_i.\end{cases}$$

При $Y_1=Y_2=\cdots=Y_N=0$ система розв'язків не має. Інакше вилучимо невідому змінну b_0:

$$\overline{X_0}=\frac{\sum_{i=1}^N X_{0i}Y_ie^{-b_1X_{0i}}}{\sum_{i=1}^N Y_ie^{-b_1X_{0i}}}.$$

Права частина останнього рівняння спадає від $\max_{Y_i>0}X_{0i}$ до $\min_{Y_i>0}X_{0i}$ (вона є або сталою функцією від b_1, або строго монотонною). Розв'язок існує і єдиній тоді і тільки тоді, коли $\min_{Y_i>0}X_{0i}<\overline{X_0}<\max_{Y_i>0}X_{0i}$. Рівняння має безліч розв'язків, якщо $\min_{Y_i>0}X_{0i}=\overline{X_0}=\max_{Y_i>0}X_{0i}$. В інших випадках розв'язків немає. □

Позначимо елементарну оціночну функцію зі значеннями в $\mathbb{R}^2$:

$$s_{\text{nai-}\alpha}(x_0,y;b)=\frac{\partial q_{\text{nai-}\alpha}(x_0,y;b)}{\partial b}=\frac{e^{b_0+b_1x_0}-y}{\alpha+(1-\alpha)e^{b_0+b_1x_0}}\begin{pmatrix}1\\ x_0\end{pmatrix}.$$

З цим позначенням систему рівнянь для оцінки (15) можна записати як рівняння $\sum_{i=1}^N s_{\text{nai-}\alpha}(X_{0i},Y_i;b)=0$.

Лема 3.2. *Нехай $\varepsilon > 0$; розподіл X_0 задовольняє умову*

$$\mathsf{E}\left[e^{(\beta_1+\varepsilon)\,X_0} + e^{(\beta_1-\varepsilon)\,X_0}\right] < \infty; \tag{17}$$

Θ — компактна множина в $\mathbb{R}^2$, яка лежить всередині смуги $\{(b_0, b_1) : |b_1-\beta_1| < \varepsilon\}$. Тоді випадкові функції $(b,\alpha) \mapsto q_{nai\text{-}\alpha}(X_0, Y; b)$ та $(b,\alpha) \mapsto s_{nai\text{-}\alpha}(X_0, Y; b)$ мажоруються на $\Theta \times [0,1]$ інтегровною випадковою величиною, тобто

$$\mathsf{E}\max_{b\in\Theta}\max_{\alpha\in[0,1]} |q_{nai\text{-}\alpha}(X_0, Y; b)| < \infty,$$

$$\mathsf{E}\max_{b\in\Theta}\max_{\alpha\in[0,1]} \|s_{nai\text{-}\alpha}(X_0, Y; b)\| < \infty.$$

Якщо умову (17) замінити на сильнішу умову (14), то похідна $(b,\alpha) \mapsto \frac{\partial}{\partial\alpha} q_{nai\text{-}\alpha}(X_0, Y; b)$ мажорується на $\Theta \times (0,1)$ інтегровною випадковою величиною, тобто

$$\mathsf{E}\sup_{b\in\Theta}\sup_{\alpha\in(0,1)} \left|\frac{\partial q_{nai\text{-}\alpha}(X_0, Y; b)}{\partial\alpha}\right| < \infty.$$

Тут (X_0, Y) — одне спостереження в моделі Берксона пуассонівської регресії, а $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ — істинне значення параметра регресії.

Доведення. Спочатку наведемо оцінку, доведену в [6] (див. там доведення леми 2.3, с. 63–65): при всіх $b \in \mathbb{R}^2$ та при всіх $\alpha \in [0,1]$

$$(1-y)(b_0 + b_1 X_0) \le q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b) \le e^{b_0+b_1X_0} - 1 + \left(e^{-b_0-b_1X_0} - 1\right) Y,$$

$$\left|s^{(0)}_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)\right| \le \max\left\{\left|e^{b_0+b_1X_0} - Y\right|; \left|1 - Ye^{-b_0-b_1X_0}\right|\right\},$$

$$\left|s^{(1)}_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)\right| \le |X_0| \max\left\{\left|e^{b_0+b_1X_0} - Y\right|; \left|1 - Ye^{-b_0-b_1X_0}\right|\right\};$$

при всіх $b \in \mathbb{R}^2$ та при всіх $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{\partial q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)}{\partial\alpha} \ge y \min\left\{1 - e^{b_0+b_1X_0} + b_0 + b_1X_0; -\frac{(e^{-b_0-b_1X_0} - 1)^2}{2}\right\},$$

$$\frac{\partial q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)}{\partial\alpha} \le \max\left\{b_0 + b_1X_0 - 1 + e^{-b_0-b_1X_0};\ \frac{(e^{b_0+b_1X_0} - 1)^2}{2}\right\}.$$

Тут $s^{(j)}_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b) = \frac{\partial}{\partial b^{(j)}} q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)$ — елемент вектора $s_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)$, $j{=}0,1$.

За умови (17) оцінки для $q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)$ та $s^{(j)}_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)$ є мажоровними функціями від b на множині Θ. За умови (14) оцінки зверху та знизу для $\frac{\partial}{\partial\alpha} q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)$ також мажоруються інтегровною випадковою величиною на множині Θ. □

Теорема 3.3. *Нехай $\alpha \in [0,1]$ фіксоване. Якщо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці та для якогось $\varepsilon > 0$ задовольняє умову (17), то зрештою система рівнянь (15) має рівно один розв'язок на $\mathbb{R}^2$, і цей розв'язок прямує до $(\beta_0 + \frac12\beta_1^2\tau^2, \beta_1)$ м.н.*

Доведення. У цьому доведенні позначимо $\beta^* = (\beta_0 + \frac12\beta_1^2\tau^2, \beta_1)$. Покладемо

$$\Theta = \left[\beta_0 + \tfrac12\beta_1^2\tau^2 - \tfrac12\varepsilon, \beta_0 + \tfrac12\beta_1^2\tau^2 + \tfrac12\varepsilon\right] \times \left[\beta_1 - \tfrac12\varepsilon, \beta_1 + \tfrac12\varepsilon\right].$$

За лемою 3.2 при всіх $b \in \Theta$ математичне сподівання $\mathsf{E}\,|q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)|$ скінченне. Тому має місце посилений закон великих чисел

$$\forall b \in \Theta : \mathsf{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac1N Q_{\text{nai-}\alpha}(b) = \mathsf{E}\, q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)\right) = 1.$$

Оскільки функції $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ опуклі, то збіжність рівномірна:

$$\mathsf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\sup_{b\in\Theta}\left|\frac1N Q_{\text{nai-}\alpha}(b) - \mathsf{E}\, q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)\right| = 0\right) = 1. \tag{18}$$

Потрібно показати, що гранична функція досягає строгого мінімуму на множині Θ в точці $(\beta_0 + \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2, \beta_1)$: при всіх $b \in \Theta$ виконується

$$\mathsf{E}\, q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b) = \min_{\Theta} \mathsf{E}\, q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; \cdot) \Leftrightarrow b = \beta^*. \tag{19}$$

Доведемо (19) в загальному випадку $0 < \alpha < 1$. Безпосередньо перевіряється, що функція

$$g \mapsto \frac{\ln(\alpha + (1-\alpha)e^g)}{1-\alpha} + \frac{e^{g_0}}{\alpha}\ln(\alpha e^{-g} + 1 - \alpha)$$

досягає строгого мінімуму в точці $g = g_0$. Тому всі точки мінімуму функції від b

$$\mathsf{E}[q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b) \mid X_0] = \frac{\ln\left(\alpha + (1-\alpha)e^{b_0 + b_1 X_0}\right)}{1-\alpha} + \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_0 + \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2}}{\alpha}\ln\left(e^{-b_0 - b_1 X_0} + 1 - \alpha\right)$$

складають пряму $\left\{(b_0, b_1)\colon b_0 + b_1 X_0 = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2\right\}$. Тому функція

$$\mathsf{E}\, q_{\text{nai-}\alpha}(X_0, Y; b)$$

досягає мінімуму в точці $\beta^* = (\beta_0 + \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2, \beta_1)$. Оскільки розподіл X_0 не зосереджений в одній точці, то множина точок мінімуму

$$\left\{(b_0, b_1)\colon\ \mathsf{P}\left(b_0 + b_1 X_0 = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \tfrac{1}{2}\beta_1^2\tau^2\right) = 1\right\}$$

одноточкова. При $0 < \alpha < 1$ властивість (19) доведено.

При $\alpha = 1$ єдиність точки мінімуму (19) перевірено при доведенні теореми 3.1. Перевірка (19) у випадку $\alpha = 0$ аналогічна перевірці у випадку $\alpha = 1$.

Зі збіжності (18), єдиності мінімуму граничної функції (19) та опуклості $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ на всій площині $\mathbb{R}^2$ випливає, що зрештою $\min_{b\in\Theta} Q_{\text{nai-}\alpha}(b) = \min_{b\in\mathbb{R}^2} Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ та

$$\max_{Q_{\text{nai-}\alpha}(b) = \min_\Theta Q_{\text{nai-}\alpha}(\cdot)} \|b - \beta^*\| \to 0 \quad \text{м.н.} \tag{20}$$

Єдиність точки мінімуму випливає зі збіжності (20), опуклості та аналітичності функції $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$. Отже функція $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ зрештою має єдину точку мінімуму, і ця точка мінімуму прямує до β^* та є єдиним розв'язком системи рівнянь (15). $\square$

Наведемо наслідок леми 3.1 та теореми 3.3.

Наслідок. *Якщо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці та для якогось $\varepsilon > 0$ задовольняє умову* (17), *то зрештою при кожному $\alpha \in [0, 1]$ система рівнянь* (15) *має рівно один розв'язок.*

Якщо система рівнянь (15) при якомусь значенні параметра $\alpha \in [0, 1]$ має рівно один розв'язок, то позначимо цей розв'язок через $\hat\beta_{\text{nai-}\alpha}$.

У наступній лемі розглядається фіксована вибірка (зокрема, обсяг вибірки сталий).

Лема 3.3. *В тих точках $\alpha \in [0, 1]$ (якщо такі існують), при яких система рівнянь* (15) *має рівно один розв'язок, оцінка $\hat\beta_{nai\text{-}\alpha}$ неперервна як функція від α.*

Доведення. Шлях доведення аналогічний доведенню теореми 3.3. Нехай α_0 таке, що при $\alpha = \alpha_0$ система рівнянь (15) має рівно один розв'язок. Ми позначили цей розв'язок через $\hat\beta_{\text{nai-}\alpha_0}$. Покладемо $\Theta = [\hat\beta_{0,\text{nai-}\alpha_0} - 1, \hat\beta_{0,\text{nai-}\alpha_0} + 1] \times [\hat\beta_{1,\text{nai-}\alpha_0} - 1, \hat\beta_{1,\text{nai-}\alpha_0} + 1]$.

Функція $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ опукла та аналітична по b, неперервна за сукупністю змінних (b, α), тому

$$\forall b \in \mathbb{R}^2 : \lim_{\alpha\to\alpha_0} Q_{\text{nai-}\alpha}(b) = Q_{\text{nai-}\alpha_0}(b).$$

Гранична функція $Q_{\text{nai-}\alpha_0}(b)$ досягає мінімуму рівно в одній точці $\hat\beta_{\text{nai-}\alpha_0}$. Аналогічно, як це було зроблено при доведенні теореми 3.3, отримуємо, що при всіх α з деякого околу $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$ функція $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ має єдину точку мінімуму (яка буде єдиним розв'язком системи рівнянь (15) і яку ми позначили $\hat\beta_{\text{nai-}\alpha}$), крім того, цей розв'язок прямує до $\hat\beta_{\text{nai-}\alpha_0}$:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\hat\beta_{\text{nai-}\alpha}=\hat\beta_{\text{nai-}\alpha_0}. \qquad \square$$

Наслідок. *Якщо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці та для якогось $\varepsilon>0$ задовольняє умову* (17), *то зрештою оцінка $\hat\beta_{nai\text{-}\alpha}$ неперервна на $[0,1]$ як функція від α.*

Лема 3.4. *Якщо розподіл X_0 не зосереджений в одній точці та для якогось $\varepsilon>0$ задовольняє умову* (14), *то має місце рівномірна збіжність при зростанні обсягу вибірки:*

$$\mathsf P\left(\sup_{\alpha\in[0,1]}\|\hat\beta_{nai\text{-}\alpha}-\beta^*\|\to 0\right)=1,$$

де $\beta^*=(\beta_0+\frac12\beta_1^2\tau^2,\ \beta_1)$.

Доведення. Покладемо

$$\Theta=\left[\beta_0+\tfrac12\beta_1^2\tau^2-\tfrac12\varepsilon,\beta_0+\tfrac12\beta_1^2\tau^2+\tfrac12\varepsilon\right]\times[\beta_1-\tfrac12\varepsilon,\beta_1+\tfrac12\varepsilon].$$

За лемою 3.2 функція $q_{\text{nai-}\alpha}(X_0,Y;b)$ та її похідні по b та α мажоровні на $\Theta\times[0,1]$ чи на $\Theta\times(0,1)$. Звідси випливає неперервність функції $\mathsf E\,q_{\text{nai-}\alpha}(X_0,Y;b)$ на $\Theta\times[0,1]$ та рівномірна збіжність

$$\mathsf P\left(\lim_{N\to\infty}\max_{b\in\Theta}\max_{\alpha\in[0,1]}\left|\frac1N Q_{\text{nai-}\alpha}(b)-\mathsf E\,q_{\text{nai-}\alpha}(X_0,Y;b)\right|=0\right)=1. \tag{21}$$

Для доведення леми потрібно показати, що при всіх $\varepsilon_1>0$ зрештою виконується нерівність

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\|\hat\beta_{\text{nai-}\alpha}-\beta^*\|<\varepsilon_1. \tag{22}$$

Візьмемо $0<\varepsilon_1\le\frac12\varepsilon$.

Оскільки при фіксованому $\alpha\in[0,1]$ функція $\mathsf E\,q_{\text{nai-}\alpha}(X_0,Y;b)$ досягає строгого мінімуму при $b=\beta^*$, то

$$\min_{\alpha\in[0,1]}\min_{\|b-\beta^*\|=\varepsilon_1}\left(\mathsf E\,q_{\text{nai-}\alpha}(X_0,Y;b)-\mathsf E\,q_{\text{nai-}\alpha}(X_0,Y;\beta^*)\right)>0.$$

З урахуванням збіжності (21) отримаємо, що зрештою

$$\min_{\alpha\in[0,1]}\min_{\|b-\beta^*\|=\varepsilon_1}\frac1N\left(Q_{\text{nai-}\alpha}(b)-Q_{\text{nai-}\alpha}(\beta^*)\right)>0.$$

Звідси випливає, з урахуванням опуклості, що зрештою всі точки мінімуму по b функцій $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$ (при всіх α) лежать в крузі $\{b:\|b-\beta\|<\varepsilon_1\}$. Єдиність мінімуму (при кожному α) випливає з аналітичності $Q_{\text{nai-}\alpha}(b)$; за умови єдиності мінімуму, точку мінімуму позначено $\hat\beta_{\text{nai-}\alpha}$. Отже, зрештою (22) виконується. $\square$

Доведення теореми 3.2. Існування розв'язку. Введемо допоміжну змінну $\alpha\in[0,1]$ та запишемо систему рівнянь (12) у вигляді

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^N s_{\text{nai-}\alpha}(b_0+\frac12 b_1^2\tau^2,b_1)=0,\\ \alpha=\exp\{-b_1^2\tau^2\}.\end{cases}$$

Зрештою при фіксованому α перше рівняння системи перетворюється на правильну рівність лише при одному b, і тоді система рівносильна такій:

$$\begin{cases}\left(b_0+\frac12 b_1^2\tau^2,b_1\right)=\hat\beta_{\text{nai-}\alpha},\\ \alpha-\exp\{-b_1^2\tau^2\}=0.\end{cases} \tag{23}$$

Рівняння $\alpha - \exp\{-\hat\beta^2_{1,\text{nai-}\alpha}\tau^2\} = 0$ має розв'язок на $[0,1]$ (бо ліва частина неперервна та приймає значення різного знаку в точках $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$). Тоді система (12) має розв'язки.

Консистентність. З першого рівняння системи (23) отримаємо, що зрештою

$$\left(\hat\beta_{0,\text{QL}} + \tfrac{1}{2}\hat\beta^2_{1,\text{QL}}\tau^2, \hat\beta_{1,\text{QL}}\right) = \hat\beta_{\text{nai-}\alpha}$$

для випадкового α. З леми 3.4 отримаємо збіжність $\hat\beta_{\text{QL}} \to \beta$ майже напевно. □

Теорема 3.4. *Якщо виконуються умови теореми 3.2 та, крім того,* $\beta_1 \neq 0$ *або*

$$\exists\varepsilon{>}0\colon\ \mathsf{E}\left[e^{(3\beta_1-3\varepsilon)X_0} + e^{(3\beta_1+3\varepsilon)X_0}\right] < \infty, \tag{24}$$

то система рівнянь (12) *для оцінки Quasi-Likelihood буде зрештою мати рівно один розв'язок на* $\mathbb{R}^2$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 3.3, позначимо $\beta^* = (\beta_0 + \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2, \beta_1)$; окрім того позначимо $\alpha_0 = \exp(-\beta_1^2\tau^2)$. З рівняння

$$\sum_{i=1}^n s_{\text{nai-}\alpha}(X_{0i}, Y_i; \hat\beta_{\text{nai-}\alpha}) = 0$$

знайдемо похідну

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta_{\text{nai-}\alpha}}{d\alpha} &= -\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial b}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial \alpha}\right)\\
&= -\left(\sum_{i=1}^N \frac{e^{\hat\beta_0+\hat\beta_1 X_{0i}}(\alpha+(1-\alpha)Y_i)}{(\alpha+(1-\alpha)e^{\hat\beta_0+\hat\beta_1 X_{0i}})^2}\begin{pmatrix}1 & X_{0i}\\ X_{0i} & X_{0i}^2\end{pmatrix}\right)^{-1}\\
&\quad\times\left(\sum_{i=1}^N \frac{(e^{\hat\beta_0+\hat\beta_1 X_{0i}}-1)(e^{\hat\beta_0+\hat\beta_1 X_{0i}}-Y_i)}{(\alpha+(1-\alpha)e^{\hat\beta_0+\hat\beta_1 X_{0i}})^2}\begin{pmatrix}1\\ X_{0i}\end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

де похідні беруться при $b = (\hat\beta_0, \hat\beta_1) = \hat\beta_{\text{nai-}\alpha}$.

Мають місце закони великих чисел: майже напевно

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{\partial s_{\text{nai-}\alpha}(X_{0i}, Y_i; b)}{\partial b} \to \mathsf{E}\,\frac{e^{b_0+b_1X_0}(\alpha+(1-\alpha)Y)}{\left(\alpha+(1-\alpha)e^{b_0+b_1X_0}\right)^2}\begin{pmatrix}1 & X_0\\ X_0 & X_0^2\end{pmatrix} =: A(b,\alpha);$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{\partial s_{\text{nai-}\alpha}(X_{0i}, Y_i; b)}{\partial b} \to \mathsf{E}\,\frac{(e^{b_0+b_1X_0}-1)(e^{b_0+b_1X_0}-Y)}{\left(\alpha+(1-\alpha)e^{b_0+b_1X_0}\right)^2} =: v(b,\alpha).$$

Існують опукла компактна множина $\Theta \subset \mathbb{R}^2$, що містить β^* як внутрішню точку, та відрізок $[\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2 < 1$ при $\beta_1 \neq 0$ та $0 < \alpha_1 < \alpha_0 = \alpha_2 = 1$ при $\beta_1 = 0$, такі, що похідні $\frac{\partial s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial b}$, $\frac{\partial s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial b^2}$, $\frac{\partial^2 s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial\alpha\partial b}$, $\frac{\partial^2 s_{\text{nai-}\alpha}}{\partial \alpha^2}$ мажоруються на $\Theta\times[\alpha_1, \alpha_2]$ інтегровною випадковою величиною. Майже напевно збіжності (3.4) та (3.4) рівномірні на $\Theta \times [\alpha_1, \alpha_2]$. Крім того, на цій множині матриця $A(b, \alpha)$ невироджена та є неперервною функцією від (b, α); вектор $v(b, \alpha)$ також є неперервною функцією від (b, α). Окрім того, $v(\beta^*, \alpha) = 0$ при $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$.

Тому майже напевно

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ b\to\beta^*}} \frac{d\hat\beta_{\text{nai-}\alpha}}{d\alpha} = 0,$$

причому збіжність рівномірна на $[\alpha_1, \alpha_2]$.

В системі рівнянь (23) виділимо рівняння для α:

$$\alpha - \exp\{-\hat\beta^2_{1,\text{nai-}\alpha}\tau^2\} = 0. \tag{25}$$

З урахуванням леми 3.4, майже напевно

$$\frac{d(\alpha - \exp\{-\hat{\beta}^2_{1,\text{nai-}\alpha}\tau^2\})}{d\alpha} = 1 + 2\tau^2 \hat{\beta}_{1,\text{nai-}\alpha} e^{-\hat{\beta}^2_{1,\text{nai-}\alpha}\tau^2} \frac{d\hat{\beta}_{1,\text{nai-}\alpha}}{d\alpha} \to 1$$

рівномірно на $[\alpha_1, \alpha_2]$. Тому зрештою рівняння (25) буде мати не більше одного розв'язку на відрізку $[\alpha_1, \alpha_2]$. А з леми 3.4 випливає, що це рівняння зрештою не має розв'язків поза відрізком $[\alpha_1, \alpha_2]$.

З того, що рівняння (25) має не більше одного розв'язку, випливає, що система рівнянь (12) також має не більше одного розв'язку. А існування розв'язку доведене в теоремі 3.2. □

4. Висновки

В структурній моделі Берксона простої пуассонівської регресії з гомоскедастичною нормально розподіленою похибкою в регресорі знайдено достатні умови:

- того, що рівняння для оцінки Simple Score зрештою має рівно один розв'язок на $\mathbb{R}^2$, а сама оцінка сильно консистентна;
- того, що рівняння для оцінки Quasi-Likelihood зрештою має (можливо неєдиний) розв'язок на $\mathbb{R}^2$, а сама оцінка (означена як довільний вимірний розв'язок цього рівняння) сильно консистентна;
- того, що рівняння для оцінки Quasi-Likelihood зрештою має рівно один розв'язок на $\mathbb{R}^2$.

Було б цікавим отриманти аналогічні умови у функціональній моделі Берксона.

Література

1. R. J. Carroll, D. Ruppert, L. A. Stefanski, and C. M. Crainiceanu, *Measurement error in nonlinear models*, Second edition, Chapman & Hall, Boca Raton, 2006.
2. A. Kukush, H. Schneeweiss, and R. Wolf, *Three estimators for the Poisson regression model with measurement errors*, Statistical Papers **45** (2000), no. 3, 351–568.
3. A. Kukush and H. Schneeweiss, *Comparing different estimators in a nonlinear measurement error model*, Part 1, Mathematical Methods of Statistics **14** (2005), no. 1, 53–79.
4. Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, "Мир", Москва, 1973.
5. H. Schneeweiss, *The polynomial and the Poisson measurement error models: some further results on quasi score and corrected score estimation*, SFB 386, Discussion Paper 446, LMU Munich, 2005.
6. С. В. Шкляр, *Асимптотичні властивості оцінок параметрів нелінійних регресійних моделей з похибками в змінних*, Дис. ...канд.фіз.-мат.наук, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ, 2008.
7. M. Thamerus, *Different nonlinear regression models with incorrectly observed covariates*, Econometrics in Theory and Practice (R. Galata and H. Kuechenhoff, eds.), Physica-Verlag, Heidelberg, 1998, pp. 31–44.
8. R. W. M. Wedderburn, *Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss–Newton method*, Biometrika **61** (1974), no. 3, 439–447.

Кафедра теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: shklyar@mail.univ.kiev.ua

Надійшла 12/10/2012