Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 88, 2013, стор. 1–16

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 88, 2013, pp. 1–16

# ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМ СО СЛАБО ЭРГОДИЧЕСКИМИ МАРКОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ II

УДК 519.21

А. Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ И А. М. КУЛИК

Аннотация. Статья является продолжением статьи [Веретенников А. Ю., Кулик А.М. *Диффузионная аппроксимация систем со слабо эргодическими марковскими возмущениями I.* Подана в печать в Теор. Ймов. та Мат. Стат.]. Приведены следствия в отдельных случаях, представляющих самостоятельный интерес. Рассмотрен пример процесса, заданного как решение СДУ с шумом Леви, и показано, что предположения, накладываемые на процесс $X$ в рамках предлагаемого нами подхода, эффективно проверяемы.

Анотація. Стаття є продовженням статті [Веретенников А. Ю., Кулик А.М. *Диффузионная аппроксимация систем со слабо эргодическими марковскими возмущениями I.* Подана в печать в Теор. Ймов. та Мат. Стат.]. Наведено наслідки в окремих випадках, що становлять самостійний інтерес. Розглянуто приклад процесу, заданого як розв'язок СДР з шумом Леві, та показано, що припущення, які накладаються на процес $X$ у межах нашого підходу, допускають ефективну перевірку.

Abstract. The paper is a sequel to the paper [Veretennikov A.Yu., Kulik A.M. *Diffusion approximation for systems with weakly ergodic Markov perturbations I.* Submitted to Teor. Imov. Mat. Stat.]. Corollaries are given in some particular cases of self-contained interest. An example of the process solution to a Lévy driven SDE is considered, which illustrates that the assumptions imposed on the process $X$ within the scopes of our approach can be verified in an effective way.

## 1. Введение

Данная статья продолжает статью [1], посвященную изучению поведения при $\varepsilon \to 0$ семейства $Y^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, решений стохастических дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят от "быстрой" случайной компоненты

$$X^\varepsilon(t) = X(t\varepsilon^{-1}), \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $X$ — однородный процесс Маркова, для которого сходимость вероятностей перехода к инвариантному распределению неравномерна по начальному значению и, вообще говоря, имеет место в более слабом смысле, чем сходимость по вариации. В [1] были введены основные объекты, сформулирован и доказан основной результат. В данной статье мы приводим следствия этого основного результата в двух отдельных случаях, представляющих самостоятельный интерес: для процесса $X$, допускающего оценку скорости сходимости к инвариантному распределению в норме полной вариации, неравномерную по начальному положению процесса, и для процесса $X$, допускающего оценку скорости сходимости в расстоянии Канторовича–Рубинштейна. Как прямое следствие, мы получаем центральную предельную теорему для аддитивных функционалов от для процесса $X$, допускающего оценку скорости сходимости в расстоянии Канторовича–Рубинштейна, которую затем сравниваем со сходными результатами статьи [2]. В качестве примера, мы рассматриваем процесс $X$,

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 60J10.

*Ключевые слова и фразы.* Диффузионная аппроксимация, расстояние по вариации, расстояние Канторовича–Рубинштейна, центральная предельная теорема.

заданный как решение СДУ с шумом Леви и показываем, что все предположения, накладываемые на процесс $X$ в рамках предлагаемого нами подхода, для такого процесса эффективно проверяемы. Также мы приводим доказательства вспомогательных утверждений раздела 4.2 статьи [1], которые там были опущены в связи с недостатком объема. Там, где это не оговорено особо, мы используем обозначения и объекты, введенные в [1].

## 2. Вероятность пребывания в компакте и оценки приращений для процесса $Y^\varepsilon$.

В данном разделе, мы приводим доказательства вспомогательных утверждений раздела 4.2 статьи [1]. Для удобства читателя, мы здесь повторяем формулировки этих утверждений.

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнены предположения* (1)–(5) *теоремы 3.1* [1] *и для произвольной* $f\in C^3(\mathbb{R}^m)$, *удовлетворяющей* (4.1) [1], *справедливо* (4.4) [1].

*Тогда для произвольного* $T\in\mathbb{R}^+$

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{t\in[0,T]}\mathsf{P}\left(|Y^\varepsilon(t)|>R\right)\to 0,\qquad R\to+\infty. \tag{2.1}$$

*Если, кроме того,* $X$ *удовлетворяет* $\mathbf{S}(\psi_1,Q_1)$, *то*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y^\varepsilon(t)|>R\right)\to 0,\qquad R\to+\infty. \tag{2.2}$$

*Доказательство.* Заметим, что $Y^\varepsilon$ имеет непрерывные траектории, и следовательно соотношение (2.2) эквивалентно следующему:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\mathsf{P}\left(|Y^\varepsilon(\tau)|>R\right)\to 0,\qquad R\to+\infty. \tag{2.3}$$

Мы докажем (2.3); доказательство (2.1) проводится по схожей схеме, и мы отметим лишь те места, в которых эти два доказательства отличаются.

Рассмотрим функцию $f(y)=\ln(1+|y|^2)$. Ясно, что $f(y)\to+\infty$, $|y|\to+\infty$, так что нам достаточно доказать, что для произвольного $T\in\mathbb{R}^+$

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\mathsf{P}\left(f(Y^\varepsilon(\tau))>R\right)\to 0,\qquad R\to+\infty. \tag{2.4}$$

Поскольку для $f(y)=\ln(1+|y|^2)$ выполнено (4.1) [1], по условию леммы выполнено (4.4) [1]. Следовательно, для доказательства (2.4) достаточно показать, что соответствующие слагаемые в (4.4) [1] таковы, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\mathsf{P}\left(\varepsilon^{1/2}|u_f(X^\varepsilon(\tau),Y^\varepsilon(\tau))|>R\right)\to 0,\qquad R\to\infty, \tag{2.5}$$

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\mathsf{P}\left(\left|\int_0^\tau K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s),Y^\varepsilon(s))\,ds\right|>R\right)\to 0,\qquad R\to\infty, \tag{2.6}$$

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\mathsf{P}\left(|M_f^\varepsilon(\tau)|>R\right)\to 0,\qquad R\to\infty. \tag{2.7}$$

Используя условия $\mathbf{E}(d,r_1,\psi_1)$, $\mathbf{M}_{q_1}(\phi_1,\psi_1)$, условие 4 теоремы 3.1 [1] и оценку (3.2) [3] на расширенный потенциал, получим

$$|\mathcal{R}A_i(x,y)|\le 2\|A_i\|_{\phi_1,p_1}\left(\int_0^\infty r_1^{1/p_1}(t)\,dt\right)\left(\int_{\mathbb{X}}\psi_1\,d\pi\right)^{1/q_1}\psi_1(x)(1+|y|),$$
$$i=1,\dots,m.$$

В силу формулы (4.7) [1], определяющей корректор $u_f$, и оценки на первую производную $f$ в (4.1) [1], это дает оценку

$$|u_f(x,y)| \le C\psi_1(x), \qquad x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.8}$$

В сочетании с $\mathbf{S}(\psi_1, Q_1)$ это дает

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)} \varepsilon^{1/2}\,\mathsf{E}\,|u_f(X^\varepsilon(\tau), Y^\varepsilon(\tau))| < +\infty, \tag{2.9}$$

откуда следует (2.5). Отметим, что если вместо $\mathbf{S}(\psi_1, Q_1)$ выполняется более слабая версия этого условия $\mathbf{W}(\psi_1, Q_1)$, мы в силу таких же соображений имеем следующую более слабую версию соотношения (2.9):

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \sup_{t\in[0,T]} \varepsilon^{1/2}\,\mathsf{E}\,|u_f(X^\varepsilon(t), Y^\varepsilon(t))| < +\infty. \tag{2.10}$$

Ясно, что для произвольного $\tau \in \mathcal{S}^\varepsilon(T)$ справедливо

$$\left|\int_0^\tau K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\,ds\right| \le \int_0^T |K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))|\,ds,$$

так что для доказательства (2.6) достаточно показать, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \mathsf{P}\left(\int_0^T |K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))|\,ds > R\right) \to 0, \qquad R\to\infty. \tag{2.11}$$

Применим утверждение A.1 [1] с $d = d_2$, $\psi = \psi_2$ к функции $K_f^\varepsilon$. Учитывая представление (4.5) [1] для этой функции и соотношения (4.6) [1], получим

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left|K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(t), Y^\varepsilon(t))\right| &= \mathsf{E}\left|K_f^\varepsilon(X(t'),\zeta)\right|\Big|_{t'=t/\varepsilon,\zeta=Y(t/\varepsilon)}\\ &\le C(1+\mathsf{E}\,\psi_2(X(0))), \qquad t\in\mathbb{R}^+,\ \varepsilon\in(0,1]\end{aligned}$$

поскольку функция $r_2$ ограничена по предположению. Следовательно,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \mathsf{E}\int_0^T |K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))|\,ds \le CT\big(1+\mathsf{E}\,\psi_2(X(0))\big). \tag{2.12}$$

Ясно, что (2.12) влечет за собой (2.11), что и доказывает (2.6).

Для доказательства (2.5), покажем сначала, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \mathsf{E}\,|M_f^\varepsilon(T)| < +\infty. \tag{2.13}$$

Поскольку $f$ положительна, из (4.4) [1] следует, что

$$|M_f^\varepsilon(T)| \le f(Y^\varepsilon(T)) + \varepsilon^{1/2}|u_f(X^\varepsilon(T), Y^\varepsilon(T))| + \int_0^T |K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))|\,ds. \tag{2.14}$$

Кроме того, $M_f^\varepsilon$ — мартингал, так что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,f(Y^\varepsilon(T)) &= f(y^0) - \varepsilon^{1/2}\,\mathsf{E}\,u_f(X^\varepsilon(T), Y^\varepsilon(T)) + \varepsilon^{1/2}\,\mathsf{E}\,u_f(X^\varepsilon(0), Y^\varepsilon(0))\\ &\quad + \mathsf{E}\int_0^T K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(t), Y^\varepsilon(t))\,ds \le f(y^0) + \varepsilon^{1/2}\,\mathsf{E}\,|u_f(X^\varepsilon(T), Y^\varepsilon(T))|\\ &\quad + \varepsilon^{1/2}\,\mathsf{E}\,|u_f(X^\varepsilon(0), Y^\varepsilon(0))| + \mathsf{E}\int_0^T |K_f^\varepsilon(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))|\,ds.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Неравенства (2.14), (2.15) и оценки (2.10), (2.12) обеспечивают (2.13).

По теореме Дуба об опциональной остановке, примененной к субмартингалу $|M_f^\varepsilon|$, для любого $\tau \in \mathcal{S}^\varepsilon(T)$ имеем

$$\mathsf{E}\left|M_f^\varepsilon(\tau)\right| \le \mathsf{E}\,|M_f^\varepsilon(T)|;$$

напомним, что $\tau$ — дискретный момент остановки, так что для применения теоремы Дуба нам не нужны дополнительные предположения на фильтрацию $\mathbb{F}^\varepsilon$ или на траектории $M_f^\varepsilon$. Следовательно, из (2.13) получаем

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)} \mathsf{E}\left|M_f^\varepsilon(\tau)\right| < +\infty,$$

что дает (2.7) и завершает доказательство (2.4).

Отметим, что в доказательстве соотношений (2.6) и (2.7) мы не использовали дополнительное предположение $\mathbf{S}(\psi_1, Q_1)$. Таким образом, без этого предположения мы имеем (2.6), (2.7) и (2.10), откуда следует (2.1). □

**Лемма 2.2.** *В предположениях леммы 2.1, для произвольных $r, R > 0$ существует константа $C_{r,R} \in \mathbb{R}^+$ такая, что для произвольных $u \in (0,1]$, $\varepsilon \in (0,1]$, $\tau \in \bigcup_{T\in\mathbb{R}^+}\mathcal{S}^\varepsilon(T)$ неравенство*

$$\mathsf{P}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u)-Y^\varepsilon(\tau)| > r \mid \mathcal{F}_\tau^\varepsilon\right] \le C_{r,R}\big(u+\varepsilon\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\big) \tag{2.16}$$

*выполнено п.н. на множестве $\{|Y^\varepsilon(\tau)| \le R\}$.*

*Доказательство.* Покроем шар $\bar B(0,R) = \{|y|\le R\}$ конечным набором открытых шаров $B(z_i, r/3)$, $i=1,\dots,I$, с данным $r>0$. Рассмотрим соответствующее семейство функций $f_i(y) = \theta((y-z_i)/r)$, $i=1,\dots,I$, где $\theta\in C^2(\mathbb{R}^d)$ — некоторая фиксированная неотрицательная функция, принимающая значения 0 на $\{|y|\le 1/3\}$ и 1 на $\{|y|\ge 2/3\}$. Тогда существует постоянная $C$, зависящая лишь от $r$ и $\theta$, такая что

$$\left|\nabla^j f_i(y)\right| \le C(1+|y|)^{-j}, \qquad j=1,2,3,\ i=1,\dots,I. \tag{2.17}$$

Производные функции $f_i$ равны нулю на шаре $B(z_i,r/3)$ и вне шара $B(z_i,2r/3)$. Следовательно, в силу формулы (4.7) [1], определяющей корректор $u_f$, равенство $u_{f_i}(x,y)=0$ имеет место, как только либо $|y-z_i|<r/3$, либо $|y-z_i|>2r/3$. Следовательно, для произвольного $\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon$ на множестве $\{Y^\varepsilon(\tau)\in B(z_i,r/3)\}$ справедливо равенство

$$f_i(Y^\varepsilon(\tau)) + \varepsilon^{1/2}u_{f_i}(X^\varepsilon(\tau),Y^\varepsilon(\tau)) = 0.$$

С другой стороны, на том же множестве для любого $u\in\mathbb{R}^+$ неравенство

$$|Y^\varepsilon(\tau+u)-Y^\varepsilon(\tau)| > r$$

влечет за собой соотношение $|Y^\varepsilon(\tau+u)-z_i| > 2r/3$, и следовательно — равенство

$$f_i(Y^\varepsilon(\tau+u)) + \varepsilon^{1/2}u_{f_i}(X^\varepsilon(\tau+u),Y^\varepsilon(\tau+u)) = 1.$$

Эти соображения, в сочетании с представлением (4.4) [1] и теоремой Дуба об опциональной остановке, дают

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u)-Y^\varepsilon(\tau)|>r, Y^\varepsilon(\tau)\in B(z_i,r/3)\Big|\mathcal{F}_\tau^\varepsilon\right]\\
&\quad\le \mathsf{E}\Big[f_i(Y^\varepsilon(\tau+u)) + \varepsilon^{1/2}u_{f_i}(X^\varepsilon(\tau+u),Y^\varepsilon(\tau+u))\\
&\qquad\qquad - f_i(Y^\varepsilon(\tau)) - \varepsilon^{1/2}u_{f_i}(X^\varepsilon(\tau),Y^\varepsilon(\tau))\ \Big|\ \mathcal{F}_\tau^\varepsilon\Big]\mathbb{1}_{Y^\varepsilon(\tau)\in B(z_i,r/3)}\\
&\quad= \mathsf{E}\left[\int_0^u K_{f_i}^\varepsilon(X^\varepsilon(\tau+s),Y^\varepsilon(\tau+s))\,ds\ \Big|\ \mathcal{F}_\tau^\varepsilon\right]\mathbb{1}_{Y^\varepsilon(\tau)\in B(z_i,r/3)}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В силу (2.17) и соотношений (4.5) и (4.6) в [1], имеем

$$\|K_{f_i}^\varepsilon\|_{d_2,\phi_2,p_2,\pi_2} \le C, \qquad \varepsilon\in(0,1].$$

С помощью незначительной модификации доказательства утверждения А.1 [1] с $f = K^\varepsilon_{f_i}$, $d = d_2$, $\psi = \psi_2$, отсюда можно получить, что для произвольной $\mathcal{F}^\varepsilon_\tau$-измеримой неотрицательной ограниченной величины $\chi$

$$\mathsf{E}\left|K^\varepsilon_{f_i}(X^\varepsilon(\tau+s), Y^\varepsilon(\tau+s))\right|\chi \le C\,\mathsf{E}\left(1 + r_2^{1/p_2}(s)\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\right)\chi, \qquad s \in \mathbb{R}^+,$$

что эквивалентно

$$\mathsf{E}\left[\left|K^\varepsilon_{f_i}(X^\varepsilon(\tau+s), Y^\varepsilon(\tau+s))\right| ds \;\middle|\; \mathcal{F}^\varepsilon_\tau\right] \le C\left(1 + r_2^{1/p_2}(s)\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\right), \quad s \in \mathbb{R}^+$$

п.н. Таким образом, из (2.18) следует, что на множестве $\{Y^\varepsilon(\tau) \in B(z_i, r/3)\}$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}&\left[|Y^\varepsilon(\tau+u) - Y^\varepsilon(\tau)| > r \;\middle|\; \mathcal{F}^\varepsilon_\tau\right] \le \mathsf{E}\left[\int_\tau^{\tau+u} K^\varepsilon_{f_i}(X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}^\varepsilon_\tau\right] \\
&\le C\int_\tau^{\tau+u}\left(1 + r_2^{1/p_2}((s-\tau)/\varepsilon)\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\right) ds \\
&= C\left(u + \varepsilon\left(\int_0^{u/\varepsilon} r_2^{1/p_2}(s)\,ds\right)\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\right) \\
&\le C\left(u + \varepsilon Q\left(\varepsilon^{-1}\right)\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\right);
\end{aligned} \tag{2.19}$$

в последнем неравенстве мы использовали предположение $u \le 1$. Так как множество $\{|Y^\varepsilon(\tau)| \le R\}$ покрыто конечным набором множеств

$$\{Y^\varepsilon(\tau) \in B(z_i, r/3)\}, \qquad i = 1, \dots, I,$$

неравенства (2.19), $i = 1, \dots, I$ обеспечивают требуемое утверждение. □

**Лемма 2.3.** *В предположениях леммы 2.1, для произвольного $T \in \mathbb{R}^+$*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\sup_{0\le u\le\delta}\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(t+u) - Y^\varepsilon(t)| \wedge 1\right] \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{2.20}$$

*Если, кроме того, $X$ удовлетворяет $\mathbf{S}(\psi_i, Q_i)$, $i = 1, 2$, то*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\sup_{0\le u\le\delta}\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u) - Y^\varepsilon(\tau)| \wedge 1\right] \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{2.21}$$

*Доказательство.* Для $\tau \in \mathcal{S}^\varepsilon(T)$ и положительных $u$, $r$, $R$, по лемме 2.2 имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u) - Y^\varepsilon(\tau)| \wedge 1\right] \\
&\quad\le \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u) - Y^\varepsilon(\tau)| \wedge 1 \;\middle|\; \mathcal{F}^\varepsilon_\tau\right]\mathbb{1}_{|Y^\varepsilon(\tau)|\le R}\right) + \mathsf{P}(|Y^\varepsilon(\tau)| > R) \\
&\quad\le r + \mathsf{E}\left(\mathsf{P}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u) - Y^\varepsilon(\tau)| > r \;\middle|\; \mathcal{F}^{X^\varepsilon}_\tau\right]\mathbb{1}_{|Y^\varepsilon(\tau)|\le R}\right) \\
&\qquad + \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y^\varepsilon(t)| > R\right) \\
&\quad\le r + C_{r,R}\left(u + \varepsilon Q_2\left(\varepsilon^{-1}\right)\mathsf{E}\,\psi_2(X^\varepsilon(\tau))\right) + \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y^\varepsilon(t)| > R\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, условие $\mathbf{S}(\psi_2, Q_2)$ дает

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)}\sup_{0\le u\le\delta}\mathsf{E}\left[|Y^\varepsilon(\tau+u) - Y^\varepsilon(\tau)| \wedge 1\right] \\
&\qquad\le r + \sup_{\varepsilon\in(0,1]}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y^\varepsilon(t)| > R\right).
\end{aligned}$$

Применив второе утверждение леммы 2.1 (здесь мы используем условие $\mathbf{S}(\psi_1, Q_1)$), получим, что оба члена в правой части приведеного неравенства стремятся к нулю при $r \to 0$, $R \to \infty$. Этим доказано (2.21). Доказательство (2.20) вполне аналогично, и мы его опускаем. $\square$

## 3. Частный случай: расстояние по вариации

В данном разделе мы рассматриваем важный частный случай процесса $X$, допускающего неравномерную по начальному условию оценку скорости сходимости к инвариантному распределению относительно расстояния по вариации. Эта оценка имеет следующий вид.

$\mathbf{TV}(r,\psi)$. Процесс $X$ имеет единственное инвариантное распределение $\pi$ и

$$\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{var} \le r(t)\psi(x), \qquad x\in\mathbb{X},\ t\ge 0, \tag{3.1}$$

где функция $\psi$ принимает значения в $[1,+\infty)$, а функция $r\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ограничена и $r(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Существует значительное количество работ, в которых условие (3.1) эффективным образом проверяется для различных классов процессов Маркова, см. обзор во введении к [3]. При этом расстояние по вариации равно минимальной метрике, порожденной дискретной метрикой $d(x,y)=1\!\!1_{x\neq y}$, см. [5], так что $\mathbf{TV}(r,\psi)$ есть частный случай нашего общего предположения $\mathbf{E}(d,r,\psi)$.

Для дискретной метрики $d$ описание “весовых пространств Гельдера” $H_{\phi,d,p}$, $\mathbf{H}_{\phi,p,\kappa}(d,\pi)$ и $\hat{\mathbf{H}}_{\phi,p,\kappa}(d,\pi)$, введенных в разделе [1], особенно просто: нормы в этих пространствах мажорируются соответствующими “весовыми sup-нормами”. Это позволяет существенно упростить условия, накладываемые в теоремах 3.1 и 3.2 [1] на коэффициенты исходного уравнения.

**Утверждение 3.1.** *В условиях теоремы 3.1* [1], *где* $d_1=d_2=d$ — *дискретная метрика, для выполнения условий* (3.4)–(3.7) [1] *достаточно, чтобы имели место следующие неравенства:*

$$\sum_i |A_i(x,y)| + \sum_{i,j}|\partial_{y_i}A_j(x,y)| + \sum_{i,j,k}|\partial^2_{y_iy_j}A_k(x,y)| \le C\phi_1(x)(1+|y|); \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\sum_i |a_i(x,y)| &+ \sum_{i,j}\left(|A_i(x,y)\partial_{y_i}\mathcal{R}A_j(x,y)| + |a_i(x,y)\partial_{y_i}\mathcal{R}A_j(x,y)|\right)\\ &+\sum_{i,j,k}|b_{ij}(x,y)\partial^2_{y_iy_j}\mathcal{R}A_k(x,y)|\\ &\le C\phi_2(x)(1+|y|);\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}&\left(|b_{ij}(x,y)| + |A_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y)| + |a_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y)|\right)\\ &+\sum_{i,j,k}|b_{ij}(x,y)\partial_{y_j}\mathcal{R}A_k(x,y)|\\ &\le C\phi_2(x)(1+|y|^2);\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\sum_{i,j,k}|b_{ij}(x,y)\mathcal{R}A_k(x,y)| \le C\phi_2(x)(1+|y|^3). \tag{3.5}$$

*Доказательство.* Мы опускаем индексы, и пишем $\phi$, $p$ вместо $\phi_1$, $p_1$ или $\phi_2$, $p_2$, соответственно. Ясно, что

$$\|f\|_{\phi,d,p} = \sup_{x_1\neq x_2}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{d^{1/p}(x_1,x_2)(\phi(x_1)+\phi(x_2))} \le 2\sup_x\frac{|f(x)|}{\phi(x)} =: 2\|f\|_\phi.$$

Следовательно, функция $f = f(x,y)$ лежит в $\mathbf{H}_{\phi,p,\kappa}(d,\pi)$, как только

$$\sup_{x\in\mathbb{X},y\in\mathbb{R}^m}\frac{|f(x,y)|}{\phi(x)(1+|y|)^\kappa}+\int_{\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\frac{|f(x,y)|}{(1+|y|)^\kappa}\,\pi(dx)<\infty. \tag{3.6}$$

Подынтегральное выражение во втором слагаемом в (3.6) мажорируется первым слагаемым, умноженным на $\phi(x)$. Условие (2) теоремы 3.1 [1] обеспечивает $\phi\in L_1(\pi)$. Следовательно, $f\in\mathbf{H}_{\phi,p,\kappa}(d,\pi)$, как только

$$\|f\|_{\phi,\kappa}:=\sup_{x\in\mathbb{X},y\in\mathbb{R}^m}\frac{|f(x,y)|}{\phi(x)(1+|y|)^\kappa}<\infty. \tag{3.7}$$

Более того, при том же условии $f$ лежит в $\hat{\mathbf{H}}_{\phi,p,\kappa}(d,\pi)$, поскольку

$$\int_{\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\Xi_N\left(\frac{f(x,y)}{(1+|y|)^\kappa}\right)\pi(dx)\le\int_{\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\Xi_N\left(\|f\|_{\phi,\kappa}\phi(x)\right)\pi(dx)\to 0,$$
$$N\to\infty.\quad\square$$

*Замечание* 3.1. Условия (3.2) — (3.5) вполне соответствуют условиям, накладываемым на коэффициенты исходного уравнения в [4] (в этой работе $\phi$, $\psi$, $r$ полиномиальны). Утверждения теорем 3.1, 3.2 [1] также вполне соответствуют утверждению теоремы 3 в [4]. Это свидетельствует о том, что наш подход, существенно расширяя область применимости метода (напомним, что в [4] процесс $X$ — диффузионный, в рамках же [1] и данной статьи отсутствуют предположения о структуре процесса $X$), не приводит к дополнительным ограничениям на исходные объекты.

*Замечание* 3.2. Для расширенного потенциала $\mathcal{R}f$ функции $f$ доступны оценки роста, см. теорему 3.1 в [3]. Это позволяет привести достаточные условия для выполнения (3.3)–(3.5), не использующие расширенные потенциалы $\mathcal{R}A_i$ и их производные. Например, пусть выполнено (3.2) и

$$\sum_{i,j}|b_{ij}(x,y)|\le C\phi_3(x)(1+|y|^2), \tag{3.8}$$

где функция $\phi_3$ такова, что $\phi_3\psi_1\le\phi_2$. Тогда имеет место (3.5), см. оценку (3.2) в [3]. Аналогичные достаточные условия можно привести для (3.3) и (3.4).

*Замечание* 3.3. В данном случае предположение, наложенное в разделе 2.1 [1], о наличии метрической структуры на пространстве $\mathbb{X}$ избыточно. Тот факт, что расстояние по вариации есть минимальной метрикой, порожденной дискретной метрикой, справедлив для семейства вероятностных мер произвольном борелевском измеримом пространства, см. напр. [6]. Можно проверить непосредственно, что если $d_1=d_2=d$ — дискретная метрика, то доказательство теоремы 3.1 [1] без каких-либо изменений применимо и в том случае, когда $(\mathbb{X},\mathcal{X})$ — борелевское измеримое пространство, а $X$ — измеримый процесс.

*Замечание* 3.4. В литературе часто встречается следующая более сильная версия свойства (3.1):

$$\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{\phi,var}\le r(t)\psi(x),\qquad x\in\mathbb{X},\ t\ge 0, \tag{3.9}$$

где $\|\nu\|_{\phi,var}$ — взвешенная полная вариация заряда $\nu$, равная $\int_{\mathbb{X}}\phi(d\nu_++d\nu_-)$; здесь $\nu_+,\nu_-$ — слагаемые в разложении Хана $\nu=\nu_+-\nu_-$. Особого внимания заслуживает класс *$V$-эргодических* процессов, для которых $\phi=\psi=V$. Свойства полугруппы и потенциала $V$-эргодического процесса, определенных в пространстве $\mathbb{B}_V(\mathbb{X})$ измеримых функций с конечной весовой sup-нормой $\|f\|_V=\sup_x|f(x)|/\phi(x)$, сходны со свойствами (обычных) полугруппы и потенциала для равномерно эргодического процесса Маркова. Поэтому вполне реальна возможность обобщения классических полугруповых методов доказательства теорем о диффузионной аппроксимации

([7, 8]) на класс $V$-эргодических возмущающих процессов $X$. Отметим, однако, что, как правило, свойство $V$-эргодичности связано с выполнением определенного условия об "экспоненциальной возвратности" процесса, например, следующего условия типа Ляпунова с расширенным генератором $\mathcal{A}$ (см. определение 2.1 в [3]) процесса $X$:

$$\mathcal{A}V \le -aV + b \tag{3.10}$$

для некоторых $a, b > 0$. В сочетании с подходящим условием перемешивания, это условие обеспечивает оценку (3.9) с $\phi = \psi = V$ и $r(t) = Ce^{-ct}$, см. напр. [9]. Если же для процесса $X$ вместо (3.10) выполнен его более слабый аналог с сублинейной правой частью, то процесс может, не будучи более $V$-эргодическим, удовлетворять (3.9) с *различными* $\phi$ и $\psi$ и субэкспоненциальной или полиномиальной функцией $1/r$, см. напр. [10]–[12], а также замечание 5.1 и пример 5.1 ниже. Таким образом, класс процессов $X$, которые удовлетворяют (3.1) и к которым применимы теорема 3.1 и теорема 3.2 [1] с $d_1 = d_2 = d$, более широк, чем класс $V$-эргодических процессов.

## 4. Частный случай: метрика Канторовича–Рубинштейна

Пусть $\rho$ — исходная метрика на пространстве $\mathbb{X}$ и $d = \rho^p$, $p \in [1, +\infty)$. Тогда соответствующее минимальное вероятностное расстояние имеет вид

$$d_p(\mu, \nu) = [W_p(\mu, \nu)]^p,$$

где $W_p$ — вероятностная *метрика Канторовича–Рубинштейна*. Отметим, что в современной литературе $W_p$ часто называют *p-метрикой Васерштейна*, однако это название не отражает истории вопроса; см. раздел 1.1.3 [13] и приведенные там ссылки. Подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе для расстояния по вариации, общие условия теорем 3.1, 3.2 [1] в данной ситуации могут быть сформулированы более коротко и в явном виде. Далее мы предполагаем, что

$$W_1\left(P_t(x, \cdot), P_t(x', \cdot)\right) \le v_1(t)\rho(x, x'), \qquad x, x' \in \mathbb{X},\ t \ge 0, \tag{4.1}$$

где ограниченная функция $v_1$ такова, что $v_1(t) \to 0$, $t \to \infty$. Тогда, как несложно показать, существует единственная инвариантная мера $\pi$ процесса $X$ и

$$W_1(\delta_x, \pi) < \infty, \quad x \in \mathbb{X}.$$

**Теорема 4.1.** *Пусть, в дополнение к* (4.1),

$$W_2\left(P_t(x, \cdot), \pi\right) \le v_2(t) W_2\left(\delta_x, \pi\right) < \infty, \qquad x \in \mathbb{X},\ t \ge 0, \tag{4.2}$$

*где ограниченная функция $v_2$ такова, что $v_2(t) \to 0$, $t \to \infty$.*

*Пусть каждая из функций $A_i(\cdot, y)$, $y \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$, центрирована, и для некоторого $\alpha \in (0, 1]$ и некоторого (а значит — для любого) $x_* \in \mathbb{X}$ имеют место оценки*

$$\begin{aligned}\sum_i |A_i(x, y) - A_i(x', y)| + \sum_i |a_i(x, y) - a_i(x', y)| + \sum_{ij} |b_{ij}(x, y) - b_{ij}(x', y)| \\ \le C\rho^\alpha(x, x')\left(1 + \rho(x, x_*) + \rho(x', x_*)\right)^{1-\alpha}(1 + |y|);\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{ij} |\partial_{y_i} A_j(x, y) - \partial_{y_i} A_j(x', y)| + \sum_{ijk} |\partial^2_{y_i y_j} A_j(x, y) - \partial^2_{y_i y_j} A_j(x', y)| \\ \le C\rho^\alpha(x, x')\left(1 + \rho(x, x_*) + \rho(x', x_*)\right)^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\sum_i |A_i(x, y)| + \sum_i |a_i(x, y)| + \sum_{ij} |b_{ij}(x, y)| \le C(1 + \rho(x, x_*)). \tag{4.5}$$

*Пусть также*

$$\int_0^\infty \left(v_1^\alpha(t) + v_2^\alpha(t)\right) dt < \infty. \tag{4.6}$$

*Тогда справедливы утверждения I–III теоремы 3.1* [1]. *Если, кроме того, для произвольного $R>0$ процесс $X$ удовлетворяет*

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\,\mathsf{E}\,\mathbb{1}_{\rho(X(0),x_*)\le R}\sup_{t\le T}\rho^2(x_*,X(t))\to 0,\qquad T\to\infty, \tag{4.7}$$

*тогда справедливо утверждение теоремы 3.2* [1].

*Доказательство.* Без ограничения общности можем предполагать, что для некоторого $R>0$ стартовое значение $X(0)$ лежит в шаре $B(0,R)$ с вероятностью 1: общий случай может быть сведен к этому с помощью стандартной процедуры локализации по начальному условию.

Положим $p_1=1/\alpha$, $q_1=1/(1-\alpha)$, $r_1=v_1$,

$$d_1(x,y)=\rho(x,y),\qquad \phi_1(x)=\left(1+\rho(x,x_*)\right)^{1-\alpha},\qquad \psi_1(x)=1+\rho(x,x_*).$$

В силу (4.1) и неравенства треугольника для метрик $W_1$ и $\rho$ имеем

$$\begin{aligned}W_1\left(P_t(x,\cdot),\pi\right)&=W_1\left(\int_{\mathbb{X}}P_t(x',\cdot)\,\delta_x(dx'),\int_{\mathbb{X}}P_t(x',\cdot)\,\pi(dx')\right)\le r_1(t)W_1(\delta_x,\pi)\\&=r_1(t)\int_{\mathbb{X}}\rho(x,x')\,\pi(dx')\le r_1(t)\left[\int_{\mathbb{X}}\rho(x_*,x')\,\pi(dx')+\rho(x,x_*)\right],\end{aligned}$$

так что справедливо условие $\mathbf{E}(d_1,r_1,\psi_1)$.

При $\alpha=1$ имеем $\phi_1\equiv 1$, так что условие $\mathbf{M}_{q_1}(\phi_1,\psi_1)$ тривиальным образом выполняется. При $\alpha\in(0,1)$, это условие эквивалентно следующему:

$$\int_{\mathbb{X}}\rho(x',x_*)\,P_t(x,dx')\le 1+\rho(x,x_*),\qquad t\ge 0. \tag{4.8}$$

Используя еще раз неравенство треугольника для $d_1$, получим

$$\int_{\mathbb{X}}\rho(x',x_*)\,P_t(x,dx')=d_1\left(\delta_{x_*},P_t(x,\cdot)\right)\le d_1\left(\delta_{x_*},\pi\right)+d_1\left(\pi,P_t(x,\cdot)\right). \tag{4.9}$$

Таким образом, (4.8) следует из $\mathbf{E}(d_1,r_1,\psi_1)$.

Далее, мы положим $p_2=2/\alpha$, $q_2=2/(2-\alpha)$, $r_2=v_2^2$,

$$d_2(x,y)=\rho^2(x,y),\qquad \phi_2(x)=\left(1+\rho(x,x_*)\right)^{2-\alpha},\qquad \psi_2(x)=2\Big(1+\rho^2(x,x_*)\Big).$$

Тогда (4.2) есть в точности условие $\mathbf{E}(d_2,r_2,\psi_2/2)$, из которого, очевидно, следует $\mathbf{E}(d_2,r_2,\psi_2)$. Рассуждение, подобное приведенному выше, обеспечивает выполнение $\mathbf{M}_{q_2}(\phi_2,\psi_2)$. Единственное (несущественное) отличие здесь состоит в том, что для $d_2$ имеет место не неравенство треугольника, а его следующий аналог:

$$d_2(\theta,\vartheta)\le 2\Big(d_2(\theta,\varkappa)+d_2(\vartheta,\varkappa)\Big).$$

Поскольку

$$E_x\psi_1(X(t))=1+\int_{\mathbb{X}}\rho(x',x_*)\,P_t(x,dx'), \tag{4.10}$$

из (4.9) и $\mathbf{E}(d_1,r_1,\psi_1)$ следует также $\mathbf{P}(\psi_1)$. Таким образом, выполнено условие (1) теоремы 3.1 [1].

Аналогично (4.10), запишем, используя (4.9) и $\mathbf{E}(d_1,r_1,\psi_1)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\psi_1(X(t))&=1+\mathsf{E}\int_{\mathbb{X}}\rho(x',x_*)\,P_t(X(0),dx')\le 1+d_1\left(\delta_{x_*},\pi\right)+\mathsf{E}\,d_1\left(\pi,P_t(X(0),\cdot)\right)\\&\le 1+d_1\left(\delta_{x_*},\pi\right)+r_1(t)\,\mathsf{E}\,d_1(\pi,\delta_{X(0)})\le 1+(1+r_1(t))d_1\left(\delta_{x_*},\pi\right)+\mathsf{E}\,\rho(X(0),x_*).\end{aligned}$$

Таким образом, в силу дополнительного предположения $X(0) \in B(0,R)$ п.н. и ограниченности функции $r_1$,

$$\sup_{t\ge 0} \mathsf{E}\, \psi_1(X(t)) < \infty,$$

так что выполнено условие $\mathbf{W}(\psi_1, Q_1)$. Аналогичным образом проверяется условие $\mathbf{W}(\psi_2, Q_2)$, здесь мы учитываем, что в силу (4.6) функция $r_2^{1/p_2}$ интегрируема на $\mathbb{R}^+$, так что функция $Q_2$ ограничена. Таким образом, выполнено условие (2) теоремы 3.1 [1]. Те же рассуждения обеспечивают выполнение условия (6) теоремы 3.1 [1] с

$$\varrho(x) = C(1 + \rho(x, x_*)).$$

Заметим, что аналогичные рассуждения при дополнительном предположении (4.7) обеспечивают условия $\mathbf{S}(\psi_i, Q_i)$, $i = 1, 2$.

Условие (3) теоремы 3.1 [1] обеспечивается (4.6), условие (4) той же теоремы прямо следует из предположений на коэффициент $A$, наложенных в теореме 4.1. Осталось проверить условие (5) теоремы 3.1 [1], то есть соотношения (3.5)–(3.7) в [1]. Мы подробно проверим лишь второе соотношение в (3.6) [1]:

$$A_i \mathcal{R} A_j \in \hat{\mathbf{H}}_{\phi_2, p_2, 2}(d_2, \pi), \tag{4.11}$$

доказательство остальных соотношений аналогично (а некоторых — и проще).

Из (4.3) и элементарного неравенства $(1+a+b)^{1-\alpha} \le (1+a)^{1-\alpha} + (1+b)^{1-\alpha}$ следует, что для $y \in \mathbb{R}^m$

$$\|A_j(\cdot, y)\|_{\phi_1, d_1, p_1} \le C(1 + |y|).$$

Применяя теорему 3.1 [3] с $f = A_j(\cdot, y)$, $d = d_1$, $p = p_1$, $\phi = \phi_1$, $\psi = \psi_1$, получаем

$$|\mathcal{R} A_j(x, y)| \le C\,(1 + \rho(x, x_*))\,(1 + |y|). \tag{4.12}$$

Далее, условие (4.1) является усиленной версией условия $\widehat{\mathbf{E}}(d_1, r_1, \psi_1)$ раздела 2 в [3], в котором множитель $(\psi_1(x) + \psi_1(x'))$ заменен на 1. Тогда справедлива усиленная версия оценки (4.2) [3], в правой части которой множитель $(\psi_1(x) + \psi_1(x'))$ заменен на $(\psi_1(x) + \psi_1(x'))^{1/q_2}$. Интегрируя эту оценку по $t \in \mathbb{R}^+$, получим аналогично доказательству утверждения 2 теоремы 3.1 [3]

$$|\mathcal{R} A_j(x, y) - \mathcal{R} A_j(x', y)| \le C \rho^\alpha(x, x')\,(1 + \rho(x, x_*) + \rho(x', x_*))^{1-\alpha}\,(1 + |y|). \tag{4.13}$$

По условию, для функции $A_i$ выполнены соотношения, аналогичные (4.12) и (4.13). Следовательно,

$$\begin{aligned}
&|A_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y) - A_i(x',y)\mathcal{R}A_j(x',y)| \\
&\quad \le |A_i(x,y) - A_i(x',y)| \cdot |\mathcal{R}A_j(x,y)| + |A_i(x',y)| \cdot |\mathcal{R}A_j(x,y) - \mathcal{R}A_j(x',y)| \\
&\quad \le C\rho^\alpha(x,x')\,(1 + \rho(x,x_*) + \rho(x',x_*))^{2-\alpha}\,(1+|y|)^2 \\
&\quad \le C\,(d_2(x,y))^{p_2}\,(\phi_2(x) + \phi_2(x'))\,(1+|y|)^2,
\end{aligned}$$

то есть

$$\|A_i \mathcal{R} A_j\|_{d_2, \phi_2, p_2, 2} < +\infty.$$

С другой стороны, из (4.12) и аналогичного соотношения для $A_i$ получаем

$$|A_i(x,y)\mathcal{R}A_j(x,y)| \le C\left(1 + \rho^2(x, x_*)\right)(1+|y|)^2 = C\psi_2(x)(1+|y|)^2.$$

Функция $\psi_2$ интегрируема относительно $\pi$, а значит — равномерно интегрируема, что завершает доказательство (4.11).

Таким образом, при описанном выше выборе $d_1$, $d_2$, $p_1$, $p_2$, $\phi_1$, $\phi_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ выполнены все условия теоремы 3.1 [1], а при дополнительном предположении (4.7) — и теоремы 3.2 [1]. Применяя утверждения этих теорем, мы завершаем доказательство. □

Приведем одно следствие, представляющее самостоятельный интерес, и устанавливающее центральную предельную теорему (ЦПТ) для аддитивных функционалов от исходного процесса Маркова $X$.

**Следствие 4.1.** *Пусть выполнены условия* (4.1) *и* (4.2) *с функциями* $v_1$, $v_2$, *удовлетворяющими* (4.6) *с некоторым* $\alpha \in (0,1]$. *Пусть* $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^m$ *центрирована и такова, что для некоторого (а следовательно — для всех)* $x_* \in \mathbb{X}$

$$|f(x) - f(x')| \le C\rho^\alpha(x,x')\Big(1 + \rho(x,x_*) + \rho(x',x_*)\Big)^{1-\alpha}, \quad x, x' \in \mathbb{X}. \tag{4.14}$$

*Тогда имеет место следующее.*

*I. (Индивидуальная ЦПТ). Семейство случайных векторов*

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(X(s))\,ds, \quad T \to \infty$$

*слабо сходится к гауссовскому случайному вектору в* $\mathbb{R}^m$ *с нулевым средним и матрицей ковариаций*

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ij})_{i,j=1}^m,$$
$$\mathbf{B}_{ij} = \int_{\mathbb{X}} (f_i\mathcal{R}f_j + f_j\mathcal{R}f_i)\;d\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}\, f_i\left(X^{st}(0)\right) f_j\left(X^{st}(t)\right)\,dt, \tag{4.15}$$

*где* $X^{st}$ *обозначает стационарную версию процесса* $X$, *определенную на всей оси* $\mathbb{R}$.

*II. (Функциональная ЦПТ). В дополнительном предположении* (4.7), *семейство случайных процессов*

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{Tt} f(X(s))\,ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+,\ T \to \infty$$

*слабо сходится в* $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ *к броуновскому движению с матрицей ковариаций* (4.15).

Утверждение следствия сразу получаем, применив теорему 4.1 к $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $A(x,y) = f(x)$. Уместно сравнить первую часть этого утверждения с индивидуальной ЦПТ, приведенной в работе [2]. Предположение H1) [2] есть в точности наше условие (4.1) с экспоненциальной функцией $v_1$. Аналог нашего условия (4.2) в [2] отсутствует, но при этом предположения H2), H3) [2] накладывают ограничения на моменты порядка $2 + \delta$ от функции $\rho(\cdot, x_*)$. Эти различия мало существенны, так как в типичных ситуациях при наличии (4.1) проверка дополнительных моментных условий не составляет существенных трудностей, см. раздел 6 в [2] и раздел 5 ниже. На функцию $f$ мы накладываем “взвешенное условие Гельдера” (4.14), более слабое, чем условие Липшица на $f$ в [2] (при $\alpha = 1$ эти условия совпадают). Это отличие в конкретных примерах может быть значимым, так как в некоторых моделях, представляющих особый интерес, приходится рассматривать аддитивные функционалы с ядрами, удовлетворяющими минимальным предположениям о регулярности, см. напр. замечание в конце раздела 6 в [2]. Наконец, для нас важным является то обстоятельство, что условия индивидуальной ЦПТ, приведенной в следствии 4.1, прямо перенесены из существенно более общей теоремы 4.1 о диффузионной аппроксимации. То, что эти условия не более ограничительны (а местами являются более общими), чем условия индивидуальной ЦПТ из [2], для нас есть еще одним свидетельством эффективности подхода к доказательству теорем о диффузионной аппроксимации, развитого в [1] и в данной статье; см. также замечание 3.1.

## 5. Пример: решение СДУ с шумом Леви

Рассмотрим в качестве примера процесс Маркова $X$, заданный как решение СДУ в $\mathbb{R}^m$ с шумом Леви

$$dX(t) = a(X(t))\,dt + \int_{|u|\le 1} c(X(t-),u)\tilde{\nu}(dt,du) + \int_{|u|>1} c(X(t-),u)\,\nu(dt,du). \quad (5.1)$$

Здесь $\nu$ — пуассоновская точечная мера на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^k$ с мерой интенсивности $dt\,\mu(du)$, $\mu$ — ее мера Леви, $\tilde{\nu}(dt,du) = \nu(dt,du) - dt\,\mu(dt)$ — соответствующая компенсированная точечная мера. Коэффициенты $a, c$ предполагаем удовлетворяющими обычным условиям, достаточным для существования сильного решения (5.1) (локальная липшицевость и линейный рост). Покажем, что для такого процесса условия теорем 3.1 и 3.2 [1] допускают эффективную проверку. Для упрощения формулировок, далее предполагаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} |c(x,u)|\,\mu(du) < \infty, \qquad x\in\mathbb{R}^m,$$

и обозначаем

$$\tilde{a}(x) = a(x) + \int_{|u|>1} c(x,u)\,\mu(du), \qquad \breve{a}(x) = a(x) - \int_{|u|\le 1} c(x,u)\,\mu(du).$$

Начнем с достаточного условия, обеспечивающего эргодичность процесса $X$ относительно расстояния по вариации. В следующем утверждении собраны в компактном виде некоторые из результатов статьи [14].

**Утверждение 5.1.** *Пусть выполнены следующие условия.*

(1) *Для некоторых $R\ge 0$, $\alpha>0$ справедливо*

$$(a(x),x) \le -\alpha|x|^2, \qquad |x|\ge R.$$

(2) $\int_{|u|>1}|u|^2\,\Pi(du) < +\infty$, *и для произвольного вектора $w\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ существует $\varrho\in(0,1)$ такое, что для произвольного $\delta>0$*

$$\mu\left(\{u\in\mathbb{R}^k\colon (u,w)\ge\varrho|u||w|, |u|\le\delta\}\right) > 0.$$

(3) *Функция $c$ представима в виде $c = c_1 + c_2$, где*

$$|c_1(x,u)| \le \vartheta(x)|u| \quad \text{и} \quad \frac{\vartheta(x)}{|x|}\to 0,\ |x|\to\infty;$$

$$|x + c_2(x,u)| \le |x|, \qquad x\in\mathbb{R}^m, \qquad |u|>1, \qquad c_2(\cdot,u)\equiv 0, \qquad |u|\le 1.$$

(4) *Для некоторой точки $x_*$ существует ее окрестность $O_{x_*}$ такая, что*

$$c(x,u) = \chi(x)u + \delta(x,u), \qquad x\in O_{x_*},$$

*причем*

$$|\delta(x_*,u)| + |\nabla_x\delta(x_*,u)| = o(|u|), \qquad |u|\to 0,$$

*и*

$$\operatorname{rank}[\nabla\breve{a}(x_*)\chi(x_*) - \nabla\chi(x_*)\breve{a}(x_*)] = m.$$

*Тогда процесс $X$ удовлетворяет $\mathbf{TV}(r,\psi)$ с $r(t) = e^{-ct}$ и $\psi(x) = C(1+|x|^2)$.*

*Замечание* 5.1. Условия (2) и (4) обеспечивают выполнение локального интегрального условия неприводимости процесса, см. условие **LD** в [14]. Условия (1) и (3) влекут за собой выполнение условия типа Ляпунова вида (3.10). Отметим, что при отсутствии такого условия процесс $X$ может все же удовлетворять $\mathbf{TV}(r,\psi)$ с подходящей функцией $\psi$ и некоторой функцией $r$, отличной от экспоненциальной. Например, если выполнено условие **LD** [14] и для произвольного $\gamma>2$ справедливы оценки (5.10) и (5.12), приведенные ниже, то (см. доказательство теоремы 2 в [10]) для произвольного $\delta > 0$ существует $\gamma > 2$ такое, что процесс $X$ удовлетворяет $\mathbf{TV}(r, \psi)$ с $r(t) = (1+t)^{-\delta}$ и $\psi(x) = C(1+|x|^{\gamma})$.

Приведенное выше условие, достаточное для эргодичности относительно расстояния по вариации, использует определенные (хотя и не очень сильные) предположения о невырожденности меры Леви $\mu$ и коэффициентов уравнения (5.1). От таких предположений свободно следующее условие, достаточное для эргодичности относительно метрики Канторовича–Рубинштейна.

**Утверждение 5.2.** *Пусть для некоторых $\alpha$, $\beta$ с $\alpha > \beta/2$*

$$(\tilde{a}(x) - \tilde{a}(x'), x - x') \le -\alpha |x - x'|^2, \qquad x, x' \in \mathbb{R}^m, \tag{5.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} |c(x,u) - c(x',u)|^2 \mu(du) \le \beta |x - x'|^2, \qquad x, x' \in \mathbb{R}^m.$$

*Тогда*

$$W_2\left(P_t(x,\cdot), P_t(x',\cdot)\right) \le e^{-t(\alpha - \beta/2)} |x - x'|, \qquad x, x' \in \mathbb{X},\ t \ge 0. \tag{5.3}$$

Условие (5.2) есть предположение о *диссипативности* коэффициента $\tilde{a}$. Оценки типа (5.3) для диссипативных систем вполне типичны, см. напр. [15], раздел 11.5 или [16], раздел 16.2, поэтому доказательство здесь мы не приводим. Заметим, что из (5.3) непосредственно вытекают условия (4.1) и (4.2).

Таким образом, для решения уравнения (5.1) предположение $\mathbf{E}(d, r, \psi)$ допускает эффективную проверку либо в виде условия $\mathbf{TV}(r, \psi)$, либо в виде условий (4.1) и (4.2). Покажем, что остальные предположения теорем 3.1 и 3.2 [1] в данной ситуации также вполне проверяемы.

Пусть, например, для некоторых $\alpha \in (0,2)$ и $B_1, B_2 > 0$

$$(a(x), x) \le -B_1 |x|^{\alpha} + B_2, \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{5.4}$$

и для произвольного $\gamma > 2$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^k} \left(|c(x,u)| + |c(x,u)|^{\gamma}\right) \mu(du) < \infty. \tag{5.5}$$

Пусть $U \in C^2(\mathbb{R}^m)$ — неотрицательная функция, такая, что $U(x) \le |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$, и $U(x) = |x|$, $|x| \ge 1$. По формуле Ито (теорема 5.1 главы II [17]),

$$(1 + U(X(t)) + t)^{\gamma} = \int_0^t Q_{U,\gamma}(X(s), s)\, ds + M_{U,\gamma}(t), \tag{5.6}$$

где $M_{U,\gamma}$ — локальный мартингал, а

$$Q_{U,\gamma}(x,s) = \gamma (1 + U(x) + s)^{\gamma - 1} (\check{a}(x), U'(x))$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^k} \left((1 + U(x + c(x,u)) + s)^{\gamma} - (1 + U(x) + s)^{\gamma}\right) \mu(du).$$

По построению, функция $U$ липшицева. Применив теорему о среднем значении, отсюда несложно вывести, что

$$(1 + U(x + c(x,u)) + s)^{\gamma} - (1 + U(x) + s)^{\gamma} \le C\left((1 + U(x) + s)^{\gamma - 1} |c(x,u)| + |c(x,u)|^{\gamma}\right)$$

с некоторой константой $C$. С учетом (5.4) и (5.5) отсюда следует, что для некоторого положительного $R$

$$Q_{U,\gamma}(x,s) \le 0 \quad \text{и} \quad Q_{U,2\gamma}(x,s) \le 0, \qquad |x| \ge R,\ s \ge 0. \tag{5.7}$$

Тогда при условии $\mathsf{E}|X(0)|^{\gamma} < \infty$ процесс $M_{U,\gamma}$ является (обычным) мартингалом: доказательство здесь вполне стандартно и мы его опускаем (см. напр. доказательство первой части утверждения 3.1 в [18]). Следовательно, в силу (5.7),

$$\mathsf{E}(1 + U(X(t)) + t)^{\gamma} 1\!\!1_{\tau_R > t} \le \mathsf{E}(1 + U(X(0)))^{\gamma}, \qquad \tau_R := \inf\{t\colon |X(t)| \le R\}. \tag{5.8}$$

В частности,

$$\mathsf{E}(U(X(t)))^\gamma \mathbb{1}_{\tau_R>t} \le \mathsf{E}(1+U(X(0)))^\gamma, \tag{5.9}$$

$$\mathsf{P}(\tau_R > t) \le t^{-\gamma}\,\mathsf{E}(1+U(X(0)))^\gamma \le t^{-\gamma}\,\mathsf{E}(1+|X(0)|)^\gamma. \tag{5.10}$$

Применив аналогичные неравенства с $2\gamma$ вместо $\gamma$ и неравенство Коши, получим

$$\mathsf{E}\big(U(X(t))\big)^\gamma \mathbb{1}_{\tau_R>t} \le t^{-\gamma}\,\mathsf{E}\big(1+U(X(0))\big)^{2\gamma}. \tag{5.11}$$

Повторяя, с тривиальными изменениями, доказательство леммы A.3 в [19], из (5.11) получаем, что

$$\sup_{|x|\le R, t\ge 0} \mathsf{E}\big(U(X(t))\big)^\gamma < \infty.$$

В сочетании с (5.9), последнее соотношение (в силу строго марковского свойства процесса $X$ и конструкции функции $U$) приводит к неравенству

$$\mathsf{E}\,|X(t)|^\gamma \le C\,\mathsf{E}(1+|X(0)|)^\gamma \tag{5.12}$$

с некоторой константой $C$.

Из оценки (5.12) легко получить требуемые свойства процесса $X$, см. раздел 2.2 в [1]. Например, положив $\phi(x) = 1+|x|^{\gamma/p}$, из (5.8) получим $\mathbf{M}_p(\phi,\psi)$ с $\psi(x) = C(1+|x|^\gamma)$. Та же оценка для этой функции $\psi$ обеспечивает $\mathbf{P}(\psi)$ и дает $\mathbf{W}(\psi,Q)$ если $Q$ такова, что $\varepsilon Q(\varepsilon^{-1}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Для проверки $\mathbf{S}(\psi,Q)$ используем рассуждения, аналогичные приведенным в [4] для диффузионных процессов. Запишем, аналогично (5.6),

$$|X(t)|^\gamma = \int_0^t \vartheta_\gamma(X(s))\,ds + M_\gamma(t), \tag{5.13}$$

$$M_\gamma(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} \left(|X(s-)+c(X(s-),u)|^\gamma - |X(s-)|^\gamma\right)\,\tilde\nu(ds,du).$$

Применив формулу Тейлора, несложно получить оценку

$$(|x+c(x,u)|^\gamma - |x|^\gamma)^2 \le C\left(|x|^{2\gamma-2}|c(x,u)|^2 + |c(x,u)|^{2\gamma}\right).$$

Поэтому, из (5.12) с $2\gamma-2$ вместо $\gamma$ получаем

$$\mathsf{E}\,M_\gamma^2(t) \le Ct\,\mathsf{E}(1+|X(0)|)^{2\gamma-2}. \tag{5.14}$$

Имеем

$$|X(t)|^\gamma \le |X(0)|^\gamma + \left(\int_0^t \vartheta_\gamma(X(s))\,ds\right)_+ + |M_\gamma(t)|,$$

так что с учетом неравенства Коши и неравенства Йенсена, примененного к выпуклой функции $x\mapsto x_+^2$, имеет место оценка

$$\sup_{t\le T}|X(t)|^{2\gamma} \le 3\left(|X(0)|^{2\gamma} + T\int_0^T \left(\vartheta_\gamma(X(s))\right)_+^2\,ds + \sup_{t\le T} M_\gamma^2(t)\right).$$

Аналогично (5.7), можно показать, что функция $(\vartheta_\gamma)_+$ ограничена. Следовательно, из предыдущего неравенства, максимального моментного неравенства Дуба для мартингала $M_\gamma$ и (5.14) следует

$$\mathsf{E}\sup_{t\le T}|X(t)|^{2\gamma} \le C\left(1+T^2\right)\mathsf{E}(1+|X(0)|)^{2\gamma}. \tag{5.15}$$

Пусть $\psi(x) = 1+|x|^\gamma$, тогда применяя неравенство Гельдера с некоторым $h>1$ и предыдущее неравенство с $h\gamma$ вместо $2\gamma$, получим

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}^\varepsilon(T)} \mathsf{E}\,\psi(X^\varepsilon(\tau)) \le \mathsf{E}\sup_{t\le\varepsilon^{-1}T}\psi(X(t)) \le 1 + C^{1/h}\left(1+\varepsilon^{-2}T^2\right)^{1/h}\left(\mathsf{E}(1+|X(0)|)^{h\gamma}\right)^{1/h}.$$

Таким образом, условие $\mathbf{S}(\psi, Q)$ с $\psi(x) = 1 + |x|^\gamma$ выполнено, если для некоторого $h > 1$

$$\mathsf{E}\,|X(0)|^{h\gamma} < \infty$$

и $Q$ такова, что $\varepsilon^{1-2/h} Q(\varepsilon^{-1}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. В частности, для того, чтобы обеспечить это условие для $Q_1(t) = \sqrt{t}$, достаточно применить приведенные выше рассуждения с $h > 4$.

Приведем в заключение два иллюстративных примера.

**Пример 5.1.** Пусть $X$ — решение одномерного СДУ вида

$$dX(t) = a(X(t))\,dt + dZ(t), \tag{5.16}$$

где $a(x) = -\operatorname{arctg} x$, $Z$ — одномерный процесс Леви. Пусть мера Леви $\mu$ этого процесса невырождена и удовлетворяет

$$\int_{\mathbb{R}} (|u| + |u|^\gamma)\,\mu(du) < +\infty, \qquad \gamma > 1. \tag{5.17}$$

По доказанному выше, для произвольного $\gamma > 2$ справедливы оценки (5.10) и (5.12). Тогда процесс $X$ удовлетворяет $\mathbf{TV}(r, \psi)$ с $r(t) = (1+t)^{-\delta}$ и $\psi(x) = C(1 + |x|^\gamma)$, см. замечание 5.1 (доказательство условия **LD** [14] сейчас проводится аналогично доказательству предложения 0.1 [14] с использованием предложения 4.8 [14]). Как мы видели выше, в силу оценки (5.12) остальные условия, накладываемые на процесс $X$ в теоремах 3.1 и 3.2 [1], для таких функций $\psi$ эффективно проверяются. Отметим, что если

$$\int_{\mathbb{R}} \left(e^{c|u|} - 1\right) \mu(du) = \infty, \qquad c > 0,$$

то, как показывает прямая проверка, для процесса $X$ не выполняется $\mathbf{TV}(r, \psi)$ с какой-либо функцией $\psi$ и экспоненциальной функцией $r$.

**Пример 5.2.** Пусть $X$ — решение СДУ в $\mathbb{R}^2$ вида (5.16) с $a(x) = -x$, и $Z = (Z_1, 0)$, где $Z_1$ — квадратично интегрируемый одномерный процесс Леви. Тогда распределения решений, стартовавших с точек $(x_1, x_2)$ и $(x_1', x_2')$ соответственно, взаимно сингулярны, как только $x_2 \neq x_2'$. Это значит, что для процесса $X$ сходимость по вариации переходных вероятностей вообще не имеет места. С другой стороны, применив утверждение 5.2, получим оценку (5.3) скорости сходимости переходных вероятностей в метрике Канторовича–Рубинштейна. Это, в свою очередь, дает возможность применять теорему 4.1 и следствие 4.1. При этом дополнительное условие (4.7) обеспечивается оценкой (5.15), справедливой, если мера Леви процесса $Z_1$ удовлетворяет (5.17). Отметим (см. также обзор во введении к [3]), что ряд недавних публикаций ([16], [20]–[24]) содержит широкий спектр моделей, приводящих к процессам, для которых, подобно приведенному выше, сходимость переходных вероятностей к инвариантному распределению имеет место в смысле, более слабом, чем в сходимость по вариации.

## Список литературы


1. А. Ю. Веретенников, А. М. Кулик, *Диффузионная аппроксимация систем со слабо эргодическими марковскими возмущениями I*. Теор. ймов. та мат. стат. (2012). (подана в печать)
2. T. Komorowski and A. Walczuk, *Central limit theorem for Markov processes with spectral gap in the Wasserstein metric*, arXiv:1102.1842 (2011).
3. А. Ю. Веретенников, А. М. Кулик, *Расширенное уравнение Пуассона для слабо эргодических процессов Маркова*, Теор. ймов. та мат. стат. **85**, (2011) 22–38.
4. E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation 1*, Ann. Prob. **29** (2001), 1061–1085.
5. Р. Л. Добрушин, *Задание системы случайных величин при помощи условных распределений*, Теор. вероятн. и прим. **15** (1970), № 3, 469–497.

6. A. Yu. Veretennikov, *Coupling method for Markov chains under integral Doeblin type condition*, Theory of Stochastic Processes **8(24)** (2002), no. 3–4, 383–391.
7. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley, New York, 1986.
8. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific, New Jersey, 2005.
9. D. Down, S. P. Meyn, and R. L. Tweedie, *Exponential and uniform ergodicity of Markov processes*, Ann. Probab. **23** (1995), no. 4, 1671–1691.
10. A. Yu. Veretennikov, *On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations*, Stochastic Process. Appl. **70** (1997), 115–127.
11. S. A. Klokov and A. Yu. Veretennikov, *Sub-exponential mixing rate for a class of Markov chains*, Math. Comm. **9** (2004), 9–26.
12. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of $f$-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and Appl. **119** (2009), no. 3, 897–923.
13. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, “Наука”, Москва, 1986.
14. A. M. Kulik, *Exponential ergodicity of the solutions to SDE's with a jump noise*, Stoch. Proc. Appl. **119** (2009), 602–632.
15. G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, 1992.
16. S. Peszat and J. Zabczyk, *Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise (an Evolution Equation Approach)*, Cambridge University Press, 2007.
17. С. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, “Наука”, Москва, 1986.
18. A. M. Kulik and N. N. Leonenko, *Ergodicity and mixing bounds for the Fisher-Snedecor diffusion*, Bernoulli (2011). (принята в печать)
19. A. M. Kulik, *Asymptotic and spectral properties of exponentially $\phi$-ergodic Markov processes*, Stochastic Process. Appl. **121** (2011), 1044–1075.
20. M. Hairer and J. Mattingly, *Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equations with degenerate stochastic forcing*, Ann. of Math. **164** (2006), 993–1032.
21. M. Hairer and J. Mattingly, *Spectral gaps in Wasserstein distances and the 2D stochastic Navier–Stokes equations*, Ann. Probab. **36** (2008), 2050–2091.
22. T. Komorowski, Sz. Peszat, and T. Szarek, *On ergodicity of some Markov processes*, Ann. of Prob. **38** (2010), 1401–1443.
23. T. Szarek, *The uniqueness of invariant measures for Markov operators*, Studia Math. **189** (2008), 225–233.
24. M. Hairer, J. C. Mattingly, and M. Scheutzow, *Asymptotic coupling and a general form of Harris' theorem with applications to stochastic delay equations*, Prob. Theory Rel. Fields **149** (2011), 223–259.



School of Mathemaics, University of Leeds, United Kingdom; Институт проблем передачи информации, Москва, Россия

*Адрес электронной почты*: A.Veretennikov@leeds.ac.uk

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська 3, 01601, Київ, Україна

*Адрес электронной почты*: kulik@imath.kiev.ua


Поступила 15/05/2012