Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 17–31

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 17–31

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ 3D ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ ЗА РОЗКЛАДОМ КОТЕЛЬНИКОВА–ШЕННОНА

УДК 519.21

З. О. ВИЖВА І К. В. ФЕДОРЕНКО

Анотація. В статті вивчаються дійснозначні випадкові поля $\xi(t,x)$, $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^2$ — однорідні за часом та однорідні ізотропні за просторовими змінними на площині. Розглядається проблема апроксимації таких випадкових полів випадковими полями з обмеженим спектром. Для випадкових полів з обмеженим спектром встановлено аналог теореми Котельникова–Шеннона. Отримано оцінки середньоквадратичного наближення випадкових полів у просторі $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу та інтерполяційної формули Котельникова–Шеннона. Розроблено алгоритми статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними на площині випадкових полів.

Abstract. The real-valued, homogeneous on time variable and homogeneous isotropic on spatial variables on a plane random fields $\xi(t,x)$, $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^2$ are researched in this paper. The problem of approximation of such random fields by the random fields with a bounded spectrum is considered. The analogue of Kotelnikov–Shannon theorem for random fields with a bounded spectrum is presented. Estimates of mean-square approximation of random fields in space $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ by model, which are built on the basis of spectral decomposition and interpolation Kotelnikov–Shannon formula, are obtained. Algorithms of statistical simulation realization of Gaussian homogeneous on time variable and homogeneous isotropic on spatial variables random fields on the plane are constructed.

Аннотация. В статье изучаются вещественнозначные случайные поля $\xi(t,x)$, $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^2$ — однородные во времени и однородные изотропные по пространственным переменным на плоскости. Рассматривается проблема аппроксимации таких случайных полей случайными полями с ограниченным спектром. Для случайных полей с ограниченным спектром установлен аналог теоремы Котельникова–Шеннона. Получены оценки среднеквадратического приближения случайных полей в пространстве $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ моделью, построенной на основе спектрального разложения и интерполяционной формулы Котельникова–Шеннона. Разработаны алгоритмы статистического моделирование реализаций гауссовских однородных во времени и однородных изотропных по пространственным переменным на плоскости случайных полей.

1. Вступ

У зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів та полів мають широкий діапазон застосування. Зокрема, це стосується таких напрямків природничих наук, як геологія, геофізика, сейсмологія, метеорологія, океанографія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, та ін. За допомогою методів статистичного моделювання можна згенерувати на комп'ютері реалізації випадкових процесів та полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію.

Запропонований в цій роботі на основі спектрального розкладу та інтерполяційної формули Котельникова–Шеннона метод чисельного моделювання випадкових полів у просторі $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ є узагальненням такого методу для однорідних за часом та однорідних ізотропних по кутовій змінній випадкових полів з обмеженим спектром на

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 65C05.
Ключові слова і фрази. Випадкові поля, моделювання, розклад Котельникова–Шеннона.

одиничному циліндрі $\mathbf{R} \times S_2$ [2, 11], однорідних за часом випадкових полів із обмеженим спектром на $\mathbf{R} \times S_n$, де S_n — одинична сфера в n-вимірному евклідовому просторі [10], однорідних ізотропних випадкових полів на площині [2, 3, 14].

Модифіковані інтерполяційні розклади Котельникова–Шеннона для випадкових процесів та багатовимірних полів з регулярною решіткою вивчали Ю. К. Бєляєв (1959), З. А. Піранашвілі (1967), В. Н. Нагорний (1970), J. R. Higgins (1996), K. Seip (2004), P. L. Butzer (2011), А. Я. Оленко (2004, 2005), A. Ya. Olenko, T. Pogany(2005, 2011), З. О. Вижва (2003, 2011) та ін.

Враховуючи результати цих робіт, у нашій статті одержано оцінки швидкості збіжності середньоквадратичної апроксимації випадкових полів у просторі $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу та інтерполяційної формули Котельникова–Шеннона.

2. Однорідні за часом та однорідні ізотропні за просторовими змінними випадкові поля на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$

Розглядається $\xi(t,x) = \xi(t,r,\varphi)$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^2$ — дійснозначне і неперервне в середньому квадратичному однорідне за часом t та однорідне ізотропне за просторовими змінними r, φ (r, φ — полярні координати точки x, $r \in \mathbf{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) випадкове поле на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$. Це означає, що:

1) $\mathsf{E}\,\xi(t,x) = \mathrm{const}$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R}^2$ (припустимо, що $\mathsf{E}\,\xi(t,x) = 0$),
2) $\mathsf{E}\,\xi(t,x)\xi(s,y) = B(t-s,\rho)$, $\forall t,s \in \mathbf{R}$, $\forall x,y \in \mathbf{R}^2$,

де $B(\tau,\rho)$ — кореляційна функція, яка залежить від зсуву часу $\tau = t - s$ та відстані між векторами x та y, тобто від ρ.

Зазначимо, що відстань ρ між точками $x_1 = (r_1,\varphi_1)$ та $x_2 = (r_2,\varphi_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2$ обчислюється за виразом:

$$\rho = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{1}$$

Як відомо з [12, с. 11], кореляційну функцію дійснозначного, однорідного за часом t та однорідного ізотропного за просторовими змінними випадкового поля $\xi(t,x)$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ можна подати у вигляді інтегрального представлення:

$$B(t-s,\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{i(t-s)u} J_0(\rho\lambda)\,\Phi(du,d\lambda), \tag{2}$$

де $\Phi(u,\lambda)$ — обмежена неспадна функція, що є спектральною функцією, а $J_0(x)$ — функція Бесселя першого роду порядку 0.

Теорема 1. *Неперервне в середньому квадратичному однорідне за часом, однорідне ізотропне за просторовими змінними випадкове поле $\xi(t,r,\varphi)$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ можна подати у вигляді спектрального розкладу:*

$$\begin{aligned}\xi(t,r,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\nu_m}\Big[&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{itu} J_m(\lambda r)\, Z_m^1(du,d\lambda)\cos m\varphi \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{itu} J_m(\lambda r)\, Z_m^2(du,d\lambda)\sin m\varphi\Big],\end{aligned} \tag{3}$$

де $\nu_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$, а $\{Z_m^1(\cdot), Z_m^2(\cdot)\}$ — послідовності дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмножинах Бореля з множини $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ таких, що для будь-яких борелівських множин B_1 і B_2 із $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$, $m,p = 0,1,\ldots;$ $l,q = 1,2$ виконуються умови:

$$\mathsf{E}\,Z_m^l(B_1) = 0, \qquad \mathsf{E}\,Z_m^l(B_1)Z_p^q(B_2) = \delta_m^p\delta_l^q\Phi(B_1 \cap B_2). \tag{4}$$

$\Phi(u,\lambda)$ — *спектральна функція випадкового поля. Причому спектральні міри* $Z_p^q(B)$, $p=0,1,\dots$, $q=1,2$, *з ймовірністю одиниця однозначно визначаються співвідношенням:*

$$
\begin{aligned}
&Z_p^q([\lambda_1,\lambda_2)\times[\gamma_1,\gamma_2)) \\
&\quad = \operatorname{l.i.m.}\int_{-T}^{T}\int_0^{+\infty}\int_{S_2}\frac{e^{-i\lambda_2 t}-e^{-i\lambda_1 t}}{-it} \\
&\qquad\qquad \times[\varphi_{p,\gamma_2}(r)-\varphi_{p,\gamma_1}(r)]S_p^q(\varphi)\xi(t,r,\varphi)\,dm_2\,dr\,dt,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

де $m_2(\cdot)$ — *міра Лебега на одиничній сфері* S_2 *в* $\mathbf{R}^2$, $S_p^q(\cdot)$ — *ортонормовані сферичні гармоніки степеня* p, *а також:* $\varphi_{0,\gamma}(r)=\frac{1}{c_2}\gamma J_1(\gamma r)$,

$$
\varphi_{p,\gamma}(r)=\frac{1}{rc_2}\left[p\gamma r\gamma J_p(\gamma r)+S_{0,p+1-r}(\gamma r)-\gamma rJ_{p-1}(\gamma r)S_{1,p}(\gamma r)+p\right],
$$

$p>0$, $S_{\mu,\upsilon}(z)$ — *функція Ломмеля,* $J_p(\cdot)$ — *функція Бесселя першого роду порядку* p.

Доведення. В силу теореми Шенберга, кореляційну функцію однорідного та ізотропного випадкового поля можна подати у вигляді інтегралу:

$$
B(t-s,\rho)=\mathsf{E}\,\xi(t,r_1,\varphi_1)\xi(s,r_2,\varphi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i(t-s)u}J_0(\rho\lambda)\,\Phi(du,d\lambda). \tag{6}
$$

За теоремою додавання для бесселевих функцій, співвідношення (8.531) [4], маємо:

$$
\begin{aligned}
&J_0\left(\lambda\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\right) \\
&\qquad = J_0(r_1\lambda)J_0(r_2\lambda)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(r_1\lambda)J_m(r_2\lambda)\cos\left(m(\varphi_1-\varphi_2)\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Звідси випливає, що таку кореляційну функцію можна розкласти в ряд:

$$
\begin{aligned}
B(t-s,\rho)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i(t-s)u}J_0(r_1\lambda)J_0(r_2\lambda)\,\Phi(du,d\lambda) \\
&\quad+2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i(t-s)u}J_m(r_1\lambda)J_m(r_2\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)\cos\left(m(\varphi_1-\varphi_2)\right).
\end{aligned}
$$

Застосувавши після цього теорему Карунена, отримаємо розклад випадкового поля (3). □

Якщо розглядати “звуження” випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ на колі радіуса r, то при фіксованому r випадкову функцію $\xi(t,r,\varphi)$ можна розглядати як випадкове поле на циліндрі $\mathbf{R}\times S_2(r)$, де $S_2(r)$ — коло радіуса r на площині $\mathbf{R}^2$. Кореляційна функція такого випадкового поля [11] має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&B(t-s,\varphi_1-\varphi_2) \\
&\quad=\mathsf{E}\,\xi(t,r,\varphi_1)\xi(s,r,\varphi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i(t-s)u}J_0\left(2\lambda r\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\Phi(du,d\lambda).
\end{aligned}
$$

Або, за теоремою додавання для бесселевих функцій (7), кореляційна функція допускає розклад:

$$
\begin{aligned}
B(t-s,\varphi_1-\varphi_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i(t-s)u}J_0{}^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda) \\
&\quad+2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i(t-s)u}J_m^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)\cos\left(m(\varphi_1-\varphi_2)\right).
\end{aligned}
$$

Позначимо коефіцієнти такого розкладу через $b_m(t-s,r)$, $m=0,1,\ldots$, та назвемо їх спектральними коефіцієнтами. У цьому випадку їх можна виразити через спектральну функцію так:

$$b_m(t-s,r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{i(t-s)u} {J_m}^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda). \tag{8}$$

Зауваження 1. Якщо $\xi(t,r,\varphi)$ — гауссівське випадкове поле, то випадкові міри $\{Z_m^1(\cdot),Z_m^2(\cdot)\}$ є гауссівськими випадковими мірами з незалежними значеннями.

Далі будемо розглядати розклад неперервного в середньому квадратичному однорідного за часом та однорідного ізотропного за просторовими змінними випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ в інших позначеннях, порівняно із (3), тобто у вигляді:

$$\xi(t,r,\varphi)=\varsigma_{0,1}(t,r)+\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}[\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi+\varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi], \tag{9}$$

де

$$\varsigma_{m,k}(t,r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{itu} J_m(\lambda r)\,Z_m^k(du,d\lambda), \qquad m=0,1,\ldots;\ k=1,2.$$

Із припущення, що $\mathsf{E}\,\xi(t,r,\varphi)=0$, випливає наступне: $\mathsf{E}\,\varsigma_{m,k}(t,r)=0$, $k=1,2$, $m=0,1,\ldots$.

Теорема 2. *Якщо $\xi(t,r,\varphi)$ — однорідне за часом, однорідне ізотропне за просторовими змінними випадкове поле на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$, то*

$$\mathsf{E}\,\varsigma_{m,i}(t,r)\varsigma_{r,j}(s,r)=\delta_r^m\delta_j^i b_m(t-s,r), \tag{10}$$

де δ_r^m — символ Кронеккера. $\{b_m(t-s,r)\}$ — послідовність додатньовизначених ядер на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$, які задовольняють умову: $\sum_{m=1}^{\infty} b_m(t-s,r)<\infty$ та мають вигляд (8). *Дисперсія випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ визначається за виразом:*

$$\mathsf{E}\,\xi(t,r,\varphi)^2=\mathbf{D}\,\xi(t,r,\varphi)=b_0(0,r)+2\sum_{m=1}^{\infty} b_m(0,r). \tag{11}$$

Доведення. Очевидно, що доведення (10) випливає з умови (4) Теореми 1 та формули для спектральних коефіцієнтів (8).

Дисперсію випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ можна обчислити за формулою (6) та за теоремою додавання для бесселевих функцій (7), а саме:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\,\xi(t,r,\varphi)&=\mathsf{E}\,\xi(t,r,\varphi)\xi(t,r,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{i(t-t)u}J_0(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} J_0^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)+2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} J_m^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)\\&=b_0(0,r)+2\sum_{m=1}^{\infty} b_m(0,r). \quad \square\end{aligned}$$

Розклад (9) можна використати для статистичного моделювання однорідних за часом, однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ із заданою спектральною функцією (або кореляційною функцією).

3. Однорідні за часом випадкові поля з обмеженим спектром

Розглянемо випадкове поле $\xi(t,r,\varphi)$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$, яке будемо називати полем з обмеженим за часом t спектром, якщо всі його спектральні міри $Z_m^l(B)$ — (5) зосереджені на $[-\widetilde{\omega},\widetilde{\omega}]\times\mathbf{R}_+$.

Має місце наступне твердження, яке належить Ю. К. Бєляєву [1].

Лема 1. *Якщо $\xi(t)$ — стаціонарний процес, спектральна функція якого зосереджена на інтервалі $[-\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}]$ і $\omega > \widetilde{\omega}$, та*

$$\xi_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \xi\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) O(t, \omega), \tag{12}$$

де

$$O(t, \omega) = \frac{\sin \omega (t - \frac{k\pi}{\omega})}{\omega (t - \frac{k\pi}{\omega})},$$

то

$$\mathsf{E}\, |\xi(t) - \xi_N(t)|^2 \leq \frac{\gamma^2(t)}{N^2} \frac{\sigma^2}{(1 - \frac{\widetilde{\omega}}{\omega})^2}, \tag{13}$$

де $\gamma(t) = 4(\frac{\omega}{\pi}|t| + 1)/\pi$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\, \xi(t)$.

Нехай $\xi(t, r, \varphi)$, $t \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ — однорідне за часом та однорідне ізотропне за просторовими змінними випадкове поле на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром $\Phi(U, \Lambda)$, $U \subset [-\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}]$, $\Lambda \subset \mathbf{R}_+$, зосередженим на $[-\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] \times \mathbf{R}_+$.

Нехай ω — будь-яке число, $\omega > \widetilde{\omega}$. Покладемо:

$$\xi_N(t, r, \varphi) = \sum_{k=-N}^{N} \xi\left(\frac{k\pi}{\omega}, r, \varphi\right) O(t, \omega). \tag{14}$$

Тоді має місце твердження.

Теорема 3. *Справедлива наступна нерівність для середньоквадратичного наближення однорідного за часом, однорідного ізотропного за просторовими змінними випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром частковою сумою* (14)*, а саме:*

$$\mathsf{E}\, |\xi(t, r, \varphi) - \xi_N(t, r, \varphi)|^2 \leq \frac{\gamma^2(t)}{N^2} \frac{1}{(1 - \frac{\widetilde{\omega}}{\omega})^2} \left(\widetilde{b}_0(0, r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{b}_m(0, r) \right), \tag{15}$$

де

$$\widetilde{b}_m(0, r) = \int_{-\widetilde{\omega}}^{+\widetilde{\omega}} \int_0^{+\infty} {J_m}^2(r\lambda)\, \Phi(du, d\lambda). \tag{16}$$

Доведення. Дійсно, використовуючи результат теореми 2 з урахуванням обмеженості спектра та леми Ю. К. Бєляєва, отримаємо нерівність (15). Теорема доведена. □

Наслідок. *Для випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром має місце розклад Котельникова–Шеннона:*

$$\xi(t, r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\omega}, r, \varphi\right) O(t, \omega), \tag{17}$$

де ряд в правій частині (17) *збігається в середньому квадратичному.*

4. Про апроксимацію випадкових полів, однорідних за часом, випадковими полями з обмеженим спектром

Нехай $\widetilde{\omega}_n$ — довільна послідовність така, що $\widetilde{\omega}_n \to \infty$, і $\omega_n > \widetilde{\omega}_n$. Нехай m_n — деяка послідовність натуральних чисел. Розглянемо випадкове поле:

$$\xi_{n,m_n}(t, r, \varphi) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} \xi\left(\frac{k\pi}{\omega_n}, r, \varphi\right) \frac{\sin \omega_n (t - \frac{k\pi}{\omega_n})}{\omega_n (t - \frac{k\pi}{\omega_n})}. \tag{18}$$

Теорема 4. *Припустимо, що виконуються умови:*

(1) $\omega_n/m_n \to 0$, *при* $n \to \infty$;
(2) $\widetilde{\omega}_n/\omega_n \to \omega < 1$, *при* $n \to \infty$.

Тоді має місце наступне твердження про середньоквадратичне наближення однорідного за часом t *та однорідного ізотропного за просторовими змінними випадкового поля* $\xi(t,r,\varphi)$ *на* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ *випадковими полями* (18) *з обмеженим за часом* t *спектром:*

$$\mathsf{E}\left|\xi(t,r,\varphi)-\xi_{n,m_n}(t,r,\varphi)\right|^2 \to 0, \qquad m_n, n\to\infty.$$

Доведення. Оскільки поле $\xi(t,r,\varphi)$ — з необмеженим спектром, то можна його розкласти у ряд:

$$\begin{aligned}\xi(t,r,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\nu_m}\Bigg[&\int_{|u|>\widetilde{\omega}_n}\int_0^{+\infty} e^{itu}J_m(\lambda r)\,Z_m^1(du,d\lambda)\cos m\varphi\\ &+\int_{|u|>\widetilde{\omega}_n}\int_0^{+\infty} e^{itu}J_m(\lambda r)\,Z_m^2(du,d\lambda)\sin m\varphi\Bigg]\\ +\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\nu_m}\Bigg[&\int_{|u|\le\widetilde{\omega}_n}\int_0^{+\infty} e^{itu}J_m(\lambda r)\,Z_m^1(du,d\lambda)\cos m\varphi\\ &+\int_{|u|\le\widetilde{\omega}_n}\int_0^{+\infty} e^{itu}J_m(\lambda r)\,Z_m^2(du,d\lambda)\sin m\varphi\Bigg].\end{aligned}$$

де $\nu_m = \begin{cases}1, & m=0\\ 2, & m>0.\end{cases}$

Відзначимо, що на основі леми Ю. К. Бєляєва і попередньої теореми буде мати місце наступна нерівність:

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left|\xi(t,r,\varphi)-\xi_{n,m_n}(t,r,\varphi)\right|^2\\ &\le \int_{|t|>\widetilde{\omega}_n}\int_0^{+\infty} J_0^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{|t|>\widetilde{\omega}_n}\int_0^{+\infty} J_m^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)\\ &\quad+\left(\frac{|t|}{\pi}+\frac{1}{\omega_n}\right)^2\frac{16}{m_n^2\pi^2}\frac{\omega_n^2}{\left(1-\frac{\widetilde{\omega}_n}{\omega_n}\right)^2}\left\{\widetilde{b}_0(0,r)+2\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{b}_m(0,r)\right\}\to 0,\\ &\qquad m_n, n\to\infty,\end{aligned}$$

де $\widetilde{b}_m(0,r)$ можна обчислити за виразом (16). Звідси і випливає твердження теореми. □

5. Оцінка швидкості збіжності середньоквадратичного наближення однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$

Нагадаємо, що однорідне за часом та однорідне ізотропне за просторовими змінними випадкове поле на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ можна подати у вигляді розкладу (9), тобто:

$$\xi(t,r,\varphi) = \varsigma_{0,1}(t,r) + \sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right]$$

$$= \varsigma_{0,1}(t,r) + \sqrt{2}\sum_{m=1}^{M}\left[\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right]$$
$$+ \sqrt{2}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left[\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right].$$

Для побудови моделі таких полів з обмеженим за часом t спектром використаємо часткову суму (9) та часткову суму (14) розкладів випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$. Побудована наближена модель має такий вигляд:

$$\widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi) = \sum_{k=-N}^{N}\frac{\sin\omega(t-\frac{k\pi}{\omega})}{\omega(t-\frac{k\pi}{\omega})} \times \left[\varsigma_{0,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right) + \sqrt{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\varsigma_{m,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)\sin m\varphi\right)\right]. \tag{19}$$

Зробимо наступні перетворення:

$$\xi(t,r,\varphi) - \widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi) = \varsigma_{0,1}(t,r) + \sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right)$$
$$- \sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{0,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)$$
$$- \sqrt{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{m,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\cos m\varphi + \sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{m,2}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\sin m\varphi\right)$$
$$= \sqrt{2}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left(\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right)$$
$$+ \left(\varsigma_{0,1}(t,r) - \sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{0,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\right)$$
$$+ \sqrt{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\varsigma_{m,1}(t,r) - \sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{m,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\right)\cos m\varphi$$
$$+ \sqrt{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\varsigma_{m,2}(t,r) - \sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{m,2}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\right)\sin m\varphi.$$

Візьмемо математичне сподівання від квадрату попереднього розкладу. Тоді, врахувавши взаємну ортогональність процесів $\varsigma_{m,1}(t,r)$, $\varsigma_{m,2}(t,r)$, маємо наступне:

$$\mathsf{E}\left|\xi(t,r,\varphi) - \widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi)\right|^2$$
$$\le \mathsf{E}\left|\sqrt{2}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left(\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right)\right|^2$$

$$+\,\mathsf{E}\left|\varsigma_{0,1}(t,r)-\sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{0,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\right|^2$$
$$+\,2\sum_{m=1}^{M}\mathsf{E}\left|\varsigma_{m,1}(t,r)-\sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{m,1}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\right|^2\cos^2 m\varphi$$
$$+\,2\sum_{m=1}^{M}\mathsf{E}\left|\varsigma_{m,2}(t,r)-\sum_{k=-N}^{N}\varsigma_{m,2}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)O(t,\omega)\right|\sin^2 m\varphi$$
$$\le 2\sum_{m=M+1}^{\infty}\widetilde{b}_m(0,r)+\frac{\gamma^2(t)}{N^2}\frac{1}{(1-\frac{\widetilde{\omega}}{\omega})^2}\widetilde{B}_M(0,r),$$

де $\widetilde{b}_m(0,r)$ обчислюється за виразом (16), причому:

$$\widetilde{B}_M(0,r)=\widetilde{b}_0(0,r)+2\sum_{m=1}^{M}\widetilde{b}_m(0,r). \tag{20}$$

Далі, оцінимо перший доданок попередньої нерівності, використовуючи твердження леми 8 ([2, с. 117]), яке формулюється так:

Лема 2. *Має місце нерівність:*

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}{J_m}^2(z)\le\frac{1}{2\pi}\frac{1}{M}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right).$$

Отже, застосовуючи попередню лему, маємо:

$$\begin{aligned}2\sum_{m=M+1}^{\infty}\widetilde{b}_m(0,r)&=2\int_{-\widetilde{\omega}}^{+\widetilde{\omega}}\int_0^{+\infty}\sum_{m=M+1}^{\infty}{J_m}^2(r\lambda)\,\Phi(du,d\lambda)\\&\le 2\int_{-\widetilde{\omega}}^{+\widetilde{\omega}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{M}\left(\frac{1}{2}|r\lambda|+(r\lambda)^2\right)\Phi(du,d\lambda)\\&\le\frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2}r\widetilde{\mu}_1+r^2\widetilde{\mu}_2\right),\end{aligned}\tag{21}$$

де $\widetilde{\mu}_k=\int_{-\widetilde{\omega}}^{+\widetilde{\omega}}\int_0^{+\infty}\lambda^k\,\Phi(du,d\lambda)$.

Тоді оцінка середньоквадратичного наближення однорідного за часом, однорідного ізотропного за просторовими змінними випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром моделлю (19) буде мати наступний вигляд:

$$\mathsf{E}\left|\xi(t,r,\varphi)-\widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi)\right|^2\le\frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2}r\widetilde{\mu}_1+r^2\widetilde{\mu}_2\right)+\frac{\gamma^2(t)}{N^2}\frac{1}{(1-\frac{\widetilde{\omega}}{\omega})^2}\widetilde{B}_M(0,r). \tag{22}$$

6. Інша оцінка швидкості збіжності середньоквадратичного наближення однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$

Для оцінки наближення в середньому квадратичному випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ його моделлю (19) використаємо наслідок 3 з [9] для стаціонарного процесу в широкому сенсі з кореляційною функцією $B(t-s)=\int_\Lambda e^{i(t-s)u}F(du)$, де Λ — обмежена область дійсних чисел. Такий наслідок сформульовано у вигляді нерівності:

$$\mathsf{E}\left|\xi(t)-\xi_N(t)\right|^2<\frac{L_f^2L_0^2(t)\omega^2}{(\omega-\gamma)^2N^2}B(0), \tag{23}$$

де в нашому випадку $L_f = \sup_{u\in\Lambda} \sup_{-\infty<t<+\infty} |e^{itu}| = 1$, $L_0(t) = \frac{2}{1-e^{-\pi}}(\frac{2}{\pi})|\sin \omega t|$, $\omega > \gamma = \sup_{u\in\Lambda} |u|$ — будь-яке фіксоване число, $B(0) = \int_\Lambda F(du) = \mathsf{E}\,|\xi(t)|^2$.

Отже, використовуючи нерівність (23), можна отримати середньоквадратичну оцінку наближення моделлю (19) однорідного за часом, однорідного ізотропного за просторовими змінними випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром. Така оцінка має вигляд:

$$\mathsf{E}\left|\xi(t, r, \varphi) - \widetilde{\xi}_{N,M}(t, r, \varphi)\right|^2 < 2 \sum_{m=M+1}^{\infty} \widetilde{b}_m(0, r) + \frac{L_0^2(t)\omega^2}{(\omega-\gamma)^2 N^2} \widetilde{B}_M(0, r),$$

де $\widetilde{\mu}_k = \int_{-\widetilde{\omega}}^{+\widetilde{\omega}} \int_0^{+\infty} \lambda^k\, \Phi(du, d\lambda)$, $\widetilde{b}_m(0, r)$ обчислюється за виразом (16), $\widetilde{B}_M(0, r) = \widetilde{b}_0(0, r) + 2 \sum_{m=1}^{M} \widetilde{b}_m(0, r)$.

Тоді, за допомогою нерівності (21), остаточно отримаємо таку оцінку:

$$\mathsf{E}\left|\xi(t, r, \varphi) - \widetilde{\xi}_{N,M}(t, r, \varphi)\right|^2 < \frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2} r\widetilde{\mu}_1 + r^2\widetilde{\mu}_2\right) + \frac{L_0^2(t)\omega^2}{(\omega-\gamma)^2 N^2} \widetilde{B}_M(0, r). \tag{24}$$

7. Спрощена оцінка швидкості збіжності середньоквадратичного наближення однорідних за часом, однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$

При статистичному моделюванні реалізацій випадкових полів важливо, щоб нерівності, які використовуються в алгоритмі, були зручними для застосування на практиці. Саме така задача розглядається в цьому пункті статті.

Використовуючи результати роботи [16], знайдемо спрощену оцінку середньоквадратичного наближення випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ моделлю (19), тобто оцінку для:

$$\mathsf{E}\left|\xi(t, r, \varphi) - \widetilde{\xi}_{N,M}(t, r, \varphi)\right|^2. \tag{25}$$

Зробимо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
&\xi(t, r, \varphi) - \widetilde{\xi}_{N,M}(t, r, \varphi)\\
&\quad= \varsigma_{0,1}(t, r) + \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} (\varsigma_{m,1}(t, r) \cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t, r) \sin m\varphi)\\
&\qquad- \sum_{k=-N}^{N} O(t, \omega) W_{k,M}(r, \varphi)\\
&\quad= \sqrt{2} \sum_{m=M+1}^{\infty} (\varsigma_{m,1}(t, r) \cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t, r) \sin m\varphi)\\
&\qquad+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} O(t, \omega) W_{k,M}(r, \varphi) - \sum_{k=-N}^{N} O(t, \omega) W_{k,M}(r, \varphi)\\
&\quad= \sqrt{2} \sum_{m=M+1}^{\infty} (\varsigma_{m,1}(t, r) \cos m\varphi + \varsigma_{m,2}(t, r) \sin m\varphi)\\
&\qquad+ \sum_{k>N, k<-N} O(t, \omega) W_{k,M}(r, \varphi),
\end{aligned} \tag{26}$$

де

$$W_{k,M}(r, \varphi) = \varsigma_{0,1}\left(\frac{k\pi}{\omega}, r\right) + \sqrt{2} \sum_{m=1}^{M} \left[\varsigma_{m,1}\left(\frac{k\pi}{\omega}, r\right) \cos m\varphi + \varsigma_{m,2}\left(\frac{k\pi}{\omega}, r\right) \sin m\varphi\right].$$

Візьмемо математичне сподівання від квадрату виразу (26), врахувавши взаємну ортогональність процесів $\varsigma_{m,1}(t,r)$, $\varsigma_{m,2}(t,r)$. Тоді маємо наступне:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left|\xi(t,r,\varphi)-\widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi)\right|^2 \\
&\quad\le \mathsf{E}\left|\sqrt{2}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left(\varsigma_{m,1}(t,r)\cos m\varphi+\varsigma_{m,2}(t,r)\sin m\varphi\right)\right|^2 \\
&\qquad+\mathsf{E}\left|\sum_{k>N,k<-N}O(t,\omega)W_k(r,\varphi)\right|^2 \\
&\quad\le 2\sum_{m=M+1}^{\infty}\widetilde{b}_m(0,r)+\left(\widetilde{b}_0(0,r)+2\sum_{m=1}^{M}\widetilde{b}_m(0,r)\right)\sum_{k>N,k<-N}\left|O(t,\omega)\right|^2.
\end{aligned}\tag{27}$$

Для оцінки другого множника в останньому доданку нерівності (27) скористаємось наступною рівністю:

$$\sum_{k>N,k<-N}\left|O(t,\omega)\right|^2=\sin^2(\omega t)\sum_{k>N,k<-N}\frac{1}{\pi^2\left(\frac{\omega t}{\pi}-k\right)^2}.$$

Далі підставимо в цей вираз суму ряду:

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\omega t}{\pi}-k\right)^2}=\frac{1}{\sin^2(\omega t)}.$$

Тоді отримаємо, що:

$$g_N\left(\frac{\omega t}{\pi}\right)=\sum_{k>N,k<-N}\left|O(t,\omega)\right|^2=1-\sin^2(\omega t)\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{\pi^2\left(\frac{\omega t}{\pi}-k\right)^2}.$$

Із [7] відомо, що має місце рівність: $\sup_{x\in\mathbf{R}}g_N(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

Тому, врахувавши із [8] тотожність: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ та те, що функція $\frac{1}{(2x-1)^2}$ — спадає при $x>1$, отримаємо, що мають місце наступні оцінки знизу та зверху:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi^2(2N+1)}&=\frac{8}{\pi^2}\int_{N+1}^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2}\le 1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k-1)^2} \\
&=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\le\frac{8}{\pi^2}\int_{N}^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2}=\frac{4}{\pi^2(2N-1)}.
\end{aligned}\tag{28}$$

Отже, остаточно будемо мати спрощену оцінку для середньоквадратичного наближення (25) випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ моделлю (19), скориставшись результатами (21) та оцінкою (28), тобто, таку нерівність:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left|\xi(t,r,\varphi)-\widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi)\right|^2&<2\sum_{m=M+1}^{\infty}\widetilde{b}_m(0,r)+\widetilde{B}_M(0,r)\frac{4}{\pi^2(2N-1)} \\
&\le\frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2}r\widetilde{\mu}_1+r^2\widetilde{\mu}_2\right)+\frac{4}{\pi^2(2N-1)}\widetilde{B}_M(0,r).
\end{aligned}\tag{29}$$

8. Побудова алгоритму статистичного моделювання однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними на площині випадкових полів

Наведені вище розклади Котельникова–Шеннона однорідних за часом, однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром можна використати для статистичного моделювання таких випадкових полів із заданими статистичними характеристиками.

Опишемо побудований на основі моделі (19) та оцінок (22), (24), (29) середньоквадратичного наближення однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів $\xi(t,r,\varphi)$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ з обмеженим за часом t спектром алгоритм для моделювання реалізацій таких випадкових полів, які розподілені за гауссівським законом.

Нагадаємо, що однорідне за часом, однорідне ізотропне за просторовими змінними випадкове поле на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ має вигляд (9). Для побудови моделі (19) випадкових полів, що розглядаються, було використано часткову суму (9) та часткову суму (14) розкладів випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$.

Виберемо за наближену модель такого поля часткову суму наступного вигляду:

$$\widetilde{\xi}_{N,M}(t,r,\varphi)=\sum_{k=-N}^{N}O(t,\omega)W_{k,M}(r,\varphi). \qquad (30)$$

Отже, на основі (30), сформулюємо алгоритм статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними на площині випадкових полів з обмеженим за часом t спектром.

Алгоритм

(1) Вибираємо, відповідно до необхідної точності $\varepsilon>0$, натуральні числа N та M для моделі (30) за допомогою однієї з наступних нерівностей:

$$\frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2}r\widetilde{\mu}_1+r^2\widetilde{\mu}_2\right)+\frac{\gamma^2(t)}{N^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}\right)^2}\widetilde{B}_M(0,r)<\varepsilon,$$
$$\frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2}r\widetilde{\mu}_1+r^2\widetilde{\mu}_2\right)+\frac{L_0^2(t)\omega^2}{(\omega-\gamma)^2N^2}\widetilde{B}_M(0,r)<\varepsilon,$$
$$\frac{1}{M\pi}\left(\frac{1}{2}r\widetilde{\mu}_1+r^2\widetilde{\mu}_2\right)+\frac{4}{\pi^2(2N-1)}\widetilde{B}_M(0,r)<\varepsilon.$$

(2) Моделюємо значення послідовностей гауссівських випадкових процесів (при фіксованому r) $\varsigma_{m,i}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)$, $m=0,1,\ldots,M$, $k=-N,\ldots,N$, $i=1,2$, що задовольняють умовам:

$$\mathsf{E}\,\varsigma_{m,i}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)=0,\qquad \mathsf{E}\,\varsigma_{m,i}\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)\varsigma_{n,j}\left(\frac{l\pi}{\omega},r\right)=\delta_i^j\delta_n^m\widetilde{b}_m\left(\frac{(k-l)\pi}{\omega},r\right),$$
$$m,n=0,1,\ldots,M,\qquad k,l=-N,\ldots,N,\qquad i,j=1,2.$$

(3) Обчислюємо вираз (30) в заданій точці $(t,r,\varphi)\in[-T,T]\times A^2$, $[-T,T]\subset\mathbf{R}$, $A^2\subset\mathbf{R}^2$, підставляючи в нього обчислені за попередніми пунктами 1 та 2 величини N та M і значення послідовностей гауссівських випадкових процесів.

(4) Перевіряємо згенеровану за п. 3 реалізацію випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння відповідних статистичних характеристик.

9. Точність та надійність моделювання гауссівських випадкових полів однорідних за часом та однорідних ізотропних за змінними площини у просторі $L_2(G)$, $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$

Із [5] відомо, що якщо розглядати простір $\mathbf{R}^d$ з евклідовою метрикою, то мають місце наступні твердження.

Нехай G — вимірна множина; $\{\mathbf{R}^d, \mathfrak{A}, \nu\}$ — вимірний простір, де $\mathfrak{A}$ — борелівська σ-алгебра, ν — скінченна міра; $X = \{X(\overrightarrow{t}), \overrightarrow{t} \in G\}$ — центроване випадкове поле вигляду:

$$X\left(\overrightarrow{t}\right) = \sum_{r=1}^{N} \int_{R^d} f_r(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda})\, dZ_r(\overrightarrow{\lambda}), \tag{31}$$

де $Z_r(S)$, $S \in \mathfrak{A}$ — некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі ν, а $f_r(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda})$ — такі функції, що $f_r(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}) \in L_2(\mathbf{R}^d, \nu)$ при кожному $\overrightarrow{t} \in G$, і функція $f_r(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda})$ неперервна по $\overrightarrow{t}$ при кожному $\overrightarrow{\lambda} \in \mathbf{R}^d$. Позначимо через $L_p(G)$ — простір функцій $\varphi(\cdot)$, для яких виконується умова: $\int_G gl|\varphi(\overrightarrow{t})|^p d\overrightarrow{t} < \infty$, $p \geq 1$ (інтегрування по мірі Лебега).

Нехай A — однозв'язна з кусково-гладкою межею область в R^d, D_n — розбиття області A на n однозв'язних областей $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$ з кусково-гладкими межами; $\overrightarrow{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — фіксовані точки в R^d, такі, що $\overrightarrow{\lambda_i} \in \triangle_i$.

Випадкове поле

$$X_n(\overrightarrow{t}, A) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}_i)\ Z_r(\triangle_i), \tag{32}$$

де $Z_r(\triangle_i)$ — сумісно гауссівські випадкові функції, що $\mathsf{E}\, Z_r(\triangle_i) = 0$, $\mathsf{E}\,(Z_r(\triangle_i))^2 = \nu(\triangle_i)$, називається апроксимаційною моделлю поля $X(\overrightarrow{t})$ (A-моделлю). Надалі розглядаються гауссівські випадкові поля.

Теорема 5 ([5, с. 160–168])**.** *Нехай $X = \{X(\overrightarrow{t}), \overrightarrow{t} \in G\}$ — гауссівське випадкове поле. Випадкове поле $X_n(\overrightarrow{t}, A)$ в (32) є A-моделлю, що наближає поле X в $L_2(G)$, з надійністю $1-\alpha$, де $0 < \alpha < 1$, і точністю $\delta > 0$, якщо область A та її розбиття D_n задовольняють умови:*

$$B(D_n, A) < \delta^2, \tag{33}$$

$$\sqrt{e}\frac{\delta}{\sqrt{B(D_n, A)}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B(D_n, A)}\right\} < \alpha, \tag{34}$$

$$B(D_n, A) = \int_T B\left(\overrightarrow{t}, D_n, A\right) d\overrightarrow{t}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} B(\overrightarrow{t}, D_n, A) = \sum_{r=1}^{N} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} \int_{\triangle_i} \left| f_r\left(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}\right) - f_r\left(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}_i\right)\right|^2 d\nu(\overrightarrow{\lambda}) \\ + \int_{\mathbf{R}^d/A} \left| f_r\left(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}\right)\right|^2 d\nu(\overrightarrow{\lambda}) \Bigg). \end{aligned} \tag{36}$$

Тепер розглянемо простір: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$. Позначимо через: $\Phi(u, \lambda) = \nu(A_{u,\lambda})$, $u \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}^2$, $\lambda > 0$, $A_{u,\lambda} = \{(v_1, v_2, v_3) \colon |v_1| = |u| < \widetilde{\omega}, (v_2^2 + v_3^2)^{\frac{1}{2}} < \lambda\}$.

Очевидно, що $\Phi(u, \lambda)$ — обмежена неспадна функція, що є спектральною функцією та задовольняє умову: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} d\Phi(u, \lambda) = \nu\left(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2\right) < +\infty$.

Нехай $X = \{X(\overrightarrow{t}), \overrightarrow{t} \in G\}$, $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ — центроване випадкове поле. Кореляційну функцію такого випадкового поля можна подати у вигляді (2).

Розглянемо гауссівське випадкове поле $X(\overrightarrow{t})$, однорідне за часом, однорідне ізотропне за просторовою змінною на множині вигляду:

$$G = \left\{ \overrightarrow{t} = (t_1, t_2, t_3) \colon |t_1| \leq K, (t_2^2 + t_3^2)^{\frac{1}{2}} \leq L \right\}, \qquad K, L \geq 0.$$

Для того, щоб побудувати A-модель такого поля, побудуємо область A та її розбиття D_n. Нехай A-однозв'язна з кусково-гладкою межею область в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ вигляду:

$$A = \left\{ \overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : |\lambda_1| < U, (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{1}{2}} < \Lambda \right\}, \qquad U, \Lambda \geq 0.$$

Розглянемо в двовимірній підмножині області A полярні координати: $(\lambda_2, \lambda_3) = (\rho, \varphi)$. В таких координатах область A можна подати так: $A = \{|\lambda_1| < U,\ \rho < \Lambda\}$.

Для деякого $m_1, m_2 > 0$ позначимо: $k_{r_1} = Ur_1/m_1$, r_1 — таке ціле число, що $-m_1 \leq r_1 \leq m_1 - 1$; $k_{r_\varphi} = 2\pi r_\varphi/m_2$, $r_\varphi = 0, 1, 2 \ldots, m_2 - 1$, $k_{r_\rho} = r_\rho \Lambda/m_2$, $r_\rho = 0, 1, 2 \ldots, m_2 - 1$.

Розбиття D_n області A визначається його елементами

$$\Delta\left(r_1, r_\rho, r_\varphi\right) = \left\{ k_{r_1} \leq u < k_{r_1+1},\ k_{r_\rho} \leq \rho < k_{r_\rho+1}, k_{r_\varphi} \leq \varphi < k_{r_\varphi} \right\}.$$

При цьому загальна кількість комбінацій n буде рівна $n = 2m_1{m_2}^2$. Позначимо через $\overrightarrow{\lambda}(r_1, r_\rho, r_\varphi)$ точку з координатами $(k_{r_1}, k_{r_\varphi}, k_{r_\rho})$. Тоді A — модель поля X має вигляд:

$$\begin{aligned} X_n\left(\overrightarrow{t}, A\right) = \sum \Big(& \cos(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}(r_1,\ r_\rho, r_\varphi)) Z_1\left(\Delta(r_1, r_\rho, r_\varphi)\right) \\ & + \sin(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}(r_1,\ r_\rho, r_\varphi)) Z_2\left(\Delta(r_1,\ r_\rho, r_\varphi)\right) \Big), \end{aligned} \tag{37}$$

де сума розглядається по множині індексів: $-m_1 \leq r_1 \leq m_1 - 1$, $0 \leq r_\rho \leq m_2 - 1$, $0 \leq r_\varphi \leq m_2 - 1$.

Далі, для цього розбиття оцінимо величини $B\big(\overrightarrow{t}, D_n, A\big)$, $B\left(D_n, A\right)$, а потім скористаємося теоремою 5. Зауважимо, що сім'я випадкових полів

$$\{Z_i(\Delta\left(r_1,\ r_\rho, r_\varphi\right)), i = 1, 2\}$$

— це сім‘я незалежних гауссівських випадкових полів таких, що

$$\mathsf{E}\, Z_1^2\left(\Delta\left(r_1,\ r_\rho, r_\varphi\right)\right) = \mathsf{E}\, Z_2^2\left(\Delta\left(r_1,\ r_\rho, r_\varphi\right)\right) = \nu\left(\Delta(r_1,\ r_\rho, r_\varphi)\right). \tag{38}$$

У цьому випадку легко переконатись, що має місце рівність:

$$\begin{aligned} B\left(\overrightarrow{t}, D_n, A\right) &= \sum \Bigg[\int_{\Delta(r_1, r_\rho, r_\varphi)} (\cos(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}) - \cos(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}(r_1, r_\rho, r_\varphi))^2\, d\nu(\overrightarrow{\lambda}) \\ &\qquad + \int_{\Delta(r_1, r_\rho, r_\varphi)} (\sin(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}) + \sin(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda}(r_1, r_\rho, r_\varphi))^2 d\nu(\overrightarrow{\lambda}) \Bigg] \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^3 \setminus A} d\nu(\overrightarrow{\lambda}) \\ &= \sum \int_{\Delta(r_1, r_\rho, r_\varphi)} 4 \sin^2 \frac{(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\lambda} - \overrightarrow{\lambda}(r_1, r_\rho, r_\varphi))}{2}\, d\nu(\overrightarrow{\lambda}) + \nu\left(\mathbf{R}^3 \setminus A\right). \end{aligned} \tag{39}$$

У формулі (39) сума береться по тим же індексам, що і у (37), а $\nu\big(\mathbf{R}^3 \setminus A\big) = \Phi\left(+\infty, +\infty\right) - \Phi\left(U, \Lambda\right)$. Далі отримаємо нерівність:

$$B\big(\overrightarrow{t}, D_n, A\big) \leq Z_{m_1, m_2} \Phi\left(U, \Lambda\right) \sum_{i=1}^{3} t_i^2 + (\Phi\left(+\infty, +\infty\right) - \Phi\left(U, \Lambda\right)), \tag{40}$$

де

$$Z_{m_1,m_2} = \max_{\substack{-m_1 \le r_1 \le m_1-1 \\ 0 \le r_\rho \le m_2-1 \\ 0 \le r_\varphi \le m_2-1}} \max_{\overrightarrow{\lambda} \in \Delta(r_1,r_\rho,r_\varphi)} \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - \lambda_i(r_1,r_\rho,r_\varphi))^2.$$

Легко переконатися, що при $\overrightarrow{\lambda} \in \Delta(r_1, r_\rho, r_\varphi)$ має місце наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}(\lambda_i - \lambda_i(r_1,r_\rho,r_\varphi))^2 &\le (u-k_{r_1})^2 + (\rho - k_{r_\rho})^2 + 4\rho k_{r_\rho} \sin^2\left(\frac{\varphi - k_{r_\varphi}}{2}\right) \\ &\le \left(\frac{U}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{m_2}\right)^2 + k_{r_\rho+1}k_{r_\rho}\left(\frac{2\pi}{m_2}\right)^2 \\ &\le \left(\frac{U}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{m_2}\right)^2 \left(1+4\pi^2\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Тоді з (40) та (41) випливає, що:

$$\begin{aligned} B\big(\overrightarrow{t}, D_n, A\big) \le &\left(\left(\frac{U}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{m_2}\right)^2 \left(1+4\pi^2\right)\right) \Phi\left(U,\Lambda\right) \sum_{i=1}^{3} t_i^2 \\ &+ \left(\Phi\left(+\infty,+\infty\right) - \Phi\left(U,\Lambda\right)\right). \end{aligned} \tag{42}$$

З попередньої нерівності отримаємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} B\left(D_n, A\right) \le &\left(\left(\frac{U}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{m_2}\right)^2 \left(1+4\pi^2\right)\right) \Phi\left(U,\Lambda\right) \alpha(K,L) \\ &+ \beta(K,L)(\Phi\left(+\infty,+\infty\right) - \Phi\left(U,\Lambda\right)), \end{aligned} \tag{43}$$

де $\alpha(K,L) = \int_G \sum_{i=1}^{3} t_i^2\, d\overrightarrow{t} = \pi\left(\frac{2K^3L^2}{3} + \frac{L^4}{2}\right)$, $\beta(K,L) = \int_{-\infty}^{K}\int_0^L d\overrightarrow{t} = 2\pi K L^2$.

За отриманою оцінкою (43) можна визначити точність (33) та надійність (34) моделювання гауссівських випадкових полів з обмеженим спектром, однорідних за часом та однорідних ізотропних за змінними площини у просторі $L_2\,(G)$, $G \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$.

10. Висновки

Отже, в статті для дійснозначних однорідних за часом, однорідних ізотропних за просторовими змінними на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ випадкових полів $\xi(t,r,\varphi)$ з обмеженим спектром встановлено аналог теореми Котельникова–Шеннона. Розглядається проблема апроксимації однорідних за часом, однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ випадковими полями з обмеженим спектром. Побудовано моделі для статистичного моделювання реалізацій дійснозначних однорідних за часом, однорідних ізотропних за просторовими змінними на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ випадкових полів $\xi(t,r,\varphi)$ з обмеженим спектром. Отримано оцінки середньоквадратичного наближення однорідного за часом та ізотропного за просторовими змінними випадкового поля з обмеженим спектром $\xi(t,r,\varphi)$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ частковими сумами рядів, які є моделями такого поля. Розроблено алгоритми статистичного моделювання реалізацій випадкових полів, що розглядаються в статті, які задано їх статистичними характеристиками. Отримано оцінку для визначення точності та надійності моделювання гауссівських випадкових полів з обмеженим спектром, однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними площини у просторі $L_2\,(G)$, $G\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$.

Література

1. Ю. К. Беляев, *Аналитические случайные процессы*, Теория вероятности и ее применение **4** (1959), № 4, 437–444.
2. З. О. Вижва, *Статистичне моделювання випадкових процесів та полів*, "Обрії", Київ, 2011.
3. З. О. Вижва, *Статистичне моделювання випадкових полів на площині з рівномірною решіткою інтерполяції*, Доповіді НАН України (2003), № 5, 7–12.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, "Наука", Москва, 1971
5. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, І. В. Розора, *Моделювання випадкових процесів та полів*, "Задруга", Київ, 2007.
6. В. Н. Нагорный, *Об интерполяции случайных процессов*, Теор. вер. и мат. стат. **3** (1970).
7. А. Я. Оленко, *Оцінка помилки інтерполяції в багатовимірній теоремі Котельникова–Шеннона*, Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки **3** (2004), 49–54.
8. А. Я. Оленко, *Порівняння оцінок помилки апроксимації в теоремі Котельникова–Шеннона*, Вісник Київ. нац. ун-ту. **13** (2005), 41–45.
9. З. А. Пиранашвили, *К вопросу об интерполяции случайных процессов*, Теория вероятности и ее применение **12** (1967), № 4, 708–717.
10. С. І. Халікулов, З. О. Вижва, *Теорема Котельникова–Шеннона для однорідних по часові ізотропних випадкових полів на сфері та статистичне моделювання*, Вісник Київського університету. Математика і Механіка **6** (2001), 66–71
11. С. И. Халікулов, В. М. Ядренко, *Теорема Котельникова–Шеннона для випадкових полів на циліндрі*, Вісник Київського університету. Математика і Механіка **5** (2000), 55–60.
12. М. И. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1980.
13. P. L. Butzer, G. Schmeisser, and R. L. Stens, *Shannon's sampling theorem for bandlimited signals and their Hilbert transform, Boas-type formulae for higher order derivatives—The aliasing error involved by their extensions from Bandlimited to non-bandlimited signals*, Entropy **14** (2012), no. 11, pp. 2192–2226.
14. Z. Grikh, M. Yadrenko, and O. Yadrenko, *About approximation and statistical simulation of isotropic fields*, Random Operators and Stochastic Equations **1** (1993), 37–45.
15. J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis*, Clarendon Press, Oxford, New York, 1996.
16. A. Ya. Olenko and T. K. Pogany, *A precise upper bound for the error of interpolation of stochastic processes*, Theor. Probability and Math. Statist. **71** (2005), 151–163.
17. A. Ya. Olenko and T. K. Pogany, *Average sampling restoration of harmonizable processes*, Communications in Statistics—Theory and Methods **40** (2011), no. 19–20, 3587–3598.
18. K. Seip, *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions*, University Lectures Series, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

Кафедра загальної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4-е, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: vsa@univ.kiev.ua

Кафедра загальної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4-е, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: slims_mentol@mail.ru

Надійшла 13/02/2012