Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 88, 2013, стор. 32–45

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 88, 2013, pp. 32–45

ОЦІНКА СТІЙКОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА ЗА КЛАСИЧНОЇ УМОВИ МІНОРИЗАЦІЇ

УДК 519.21

В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Розглядається стійкість неоднорідних за часом ланцюгів Маркова, за класичної умови мінориизації. Основним методом дослідження є модифікований метод склеювання для пари різних, можливо неоднорідних ланцюгів Маркова.

Abstract. Stability of time-inhomogeneous Markov chain, under classical minorization condition is consider. The key tool for research is a modified coupling method, for the pair of different, possilby time-inhomogeneous, Markov chains.

Аннотация. Рассматривается устойчивость неоднороднiх по времени цепей Маркова, в допущении классического условия миноризации. Основным методом исследования является модифицированый метод склеивания для пары различных, возможно неоднородных, цепей Маркова.

1. Вступ

В даній роботі розглядається стійкість однорідного ланцюга Маркова збуреного неоднорідним чином. Під стійкістю, в цьому розділі, розуміється близькість перехідних ймовірностей за n кроків у нормі повної варіації.

Умови за яких отримано оцінку стійкості, це — умови близькості перехідних ймовірностей за один крок, класична умова мінориизації, та моменті умови, крім того розглядається додаткова умова стохастичного мажорування процесу відновлення для моменту склеювання.

Для дослідження використано модифікований метод склеювання. Застосування цього методу для однорідних за часом ланцюгів Маркова можна знайти у роботі [23]. У роботі [25] отримано умови для існування моменту склеювання для однорідних ланцюгів Маркова.

2. Основний результат

Розглядаємо вимірний простір $(E, \mathcal{E})$. Нехай μ — деяка міра на $(E, \mathcal{E})$. Визначимо її норму повної варіації наступним чином:

$$\|\mu\|_{TV} = |\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E), \tag{1}$$

де μ^+, μ^- міри отримані з розкладу Гана.

В подальшому, якщо не вказано іншого будемо вважати що використовується норма повної варіації.

Визначимо також f-норму. Нехай $f\colon E \to [1, \infty)$, деяка функція. Тоді:

$$\|\mu\|_f = \sup_{|g| \le f} \int_E g(x)\, \mu(dx).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Coupling theory, coupling method, maximal coupling, discrete Markov chains, stability of distributions, дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів, метод склеювання, теорія склеювання.

Нехай X — однорідний ланцюг Маркова з перехідною ймовірністю P, X' — неоднорідний ланцюг з перехідними ймовірностями на t-тому кроці P_t, для яких виконані зображення:

$$P(x,A) = (1-\varepsilon)Q(x,A) + \varepsilon R(x,A),$$
$$P_t(x,A) = (1-\varepsilon)Q(x,A) + \varepsilon R_t(x,A),$$

де Q “спільна частина” двох перехідних ймовірностей, R, R_t набір деяких стохастичних ядер.

Нехай обидва ланцюги X та X' приймають значення у фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$.

Нехай P, Q — два перехідних ядра, визначимо їх добуток наступним чином:

$$PQ(x,dy) = \int_E P(x,dz)\,Q(z,dy).$$

Позначимо,

$$P^{t,n} = \prod_{i=t}^{t+n-1} P_i, \qquad n \geq 1,$$
$$P^{t,0} = I,$$

де I — одиничне перехідне ядро: $\mu I = \mu$, $If = f$, для довільної міри μ та вимірної функції f.

Розглянемо наступні умови:

(A1) Умова міноризації (див. [1, розділ 5]):
Існує множина $C \in \mathcal{E}$, ймовірнісна міра ν, та константа $\alpha > 0$, що $\forall x \in C$ виконується нерівність:

$$\min\{P(x,\cdot), P_t(x,\cdot\} \geq \alpha\nu(\cdot). \tag{2}$$

Зауваження 2.1. Зауважимо, що умову (A1) можна спростити до такої:

$$\inf_{x\in C} Q(x,\cdot) \geq \alpha'\nu(\cdot),$$

для деякої константи α', в цьому разі, α' та α пов'язані наступним співвідношенням: $\alpha' = \alpha/(1-\varepsilon)$.

Дійсно, $P(x,\cdot) \geq (1-\varepsilon)Q(x,\cdot) \geq \alpha'(1-\varepsilon)\nu(\cdot)$.

Визначимо стохастичні ядра:

$$P_\alpha(x,dy) = \frac{P(x,dy) - \alpha\nu(dy)}{1-\alpha}, \qquad P_{t,\alpha}(x,dy) = \frac{P_t(x,dy) - \alpha\nu(dy)}{1-\alpha}. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} T_t(x,x';dy,dy') = (1-\alpha)&\mathbb{1}_{C\times C}(x,x')P_\alpha(x,dy)P_{t,\alpha}(x',dy') \\ &+ \mathbb{1}_{(C\times C)^c}(x,x')P(x,dy)P_t(x',dy'). \end{aligned} \tag{4}$$

$$T^{t,k} = \prod_{i=t}^{t+k-1} T_i.$$

За припущення, що ланцюг X допускає єдину інваріантну міру π позначимо:

$$\lambda_t(dy,dy') = \int_E \pi(dx)\,R(x,dy) \times R_t(x,dy'), \tag{5}$$

$$m(x,x';t) = \sum_{k\geq 0} T^{t,k}(x,x';E,E). \tag{6}$$

Визначимо неоднорідну послідовність:

$$s_n^{(t)}(x) = \alpha \int_{E\times E} R(x,dy)\,R_t(x,dy')T^{t+1,n-1}(y,y';C,C), \qquad n \geq 1. \tag{7}$$

Величину $s_n^{(t)}(x)$ можна інтерпритувати, як ймовірність того, що розклеївшись зі стану x ланцюг протягом часу n не склеювався.

Означення 2.1. Розподіл $(\hat{g}_n)$ називається стохастичною мажорантою (або мажоруючою послідовністю) сім'ї розподілів $(g_n^{(t)})$ якщо, при кожних t, n виконана рівність: $\sum_{k>n} g_k^{(t)} \le \sum_{k>n} \hat{g}_k$.

Зауваження 2.2. Зауважимо, що за умови рівномірної інтегровності для послідовності $s_n^{(t)}(x)$:

$$\sup_{t>0} \sum_{k>n} s_k^{(t)}(x) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{8}$$

можна визначити стохастичну мажоранту:

$$\hat{s}_n(x) = \sup_{t>0} \sum_{k\ge n} s_k^{(t)}(x) - \sup_{t>0} \sum_{k>n} s_k^{(t)}(x),$$

та для кожних t, n:

$$\sum_{k>n} \hat{s}_k(x) \ge \sum_{k>n} s_k^{(t)}(x).$$

Розглянемо наступні умови:

(M) **Умова мажорування**:

Нехай при кожному x послідовність $s_n^{(t)}(x)$ рівномірна інтегровна за n відносно рахуючої міри, тобто має місце збіжність (8), та для деякої мажоруючої послідовності $\hat{s}_n(x)$ і для кожного $x \in E$:

$$\hat{m}(x) = \sum_{k\ge 0} k\hat{s}_k(x) < \infty. \tag{9}$$

(M2) Нехай існують такі послідовності $(\bar{s}_n, n \ge 0)$, $(\bar{s}_n(x), n \ge 0)$ зі скінченими середніми $\bar{m} = \sum_{n\ge 0} n\bar{s}_n$, $\bar{m}_x = \sum_{n\ge 0} n\bar{s}_n(x)$, та $\bar{s} = \sum_{n\ge 0} \bar{s}_n$, $\bar{s}(x) = \sum_{n\ge 0} \bar{s}_n(x)$. Тоді для кожного $k > 1$ та $n \ge 0$ мають місце наступні нерівності:

$$\begin{aligned} \int\!\!\int \nu(dx) Q^{k-1}(x, dy)\hat{s}_n(y) &\le \bar{s}_n, \\ \int Q^{k-1}(x, dy)\hat{s}_n(y) &\le \bar{s}_n(x), \end{aligned} \tag{10}$$

тут $\hat{s}_n$ — мажоруюча послідовність з умови (M).

Зауваження 2.3. Якщо, для перехідної ймовірності Q існує єдина інваріантна міра π, та наступні величини скінчені:

$$\int \Big(\sum_{k\ge 1} |\nu Q^k - \pi|\Big)(dx)\hat{m}(x) < \infty,$$

$$\sum_{k\ge 0} k \int \pi(dx)\hat{s}_k(x) < \infty,$$

то в якості $\bar{s}_n$ можна вибрати послідовність:

$$\bar{s}_n = \int \Big(\sum_{k\ge 1} |\nu Q^k - \pi|\Big)(dx)\hat{s}_n(x) + \pi(dx)\hat{s}_n(x).$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \nu Q^{k-1}\hat{s}_n &= \int \left(\nu Q^{k-1} - \pi\right)(dx)\hat{s}_n(x) + \int \pi(dx)\hat{s}_n(x) \\ &\le \int \sum_{k\ge 1} \left(\left|\nu Q^{k-1} - \pi\right|\right)(dx)\hat{s}_n(x) + \int \pi(dx)\hat{s}_n(x) = \bar{s}_n, \end{aligned}$$

і крім того:

$$\bar{s} = \sum_{k \geq 1} \|\nu Q^k - \pi\| + 1 < \infty,$$

$$\bar{m} = \sum_{k \geq 0} k \bar{s}_k = \sum_{k \geq 1} \|\nu Q^k - \pi\|_{\hat{m}} + \int \pi(dx) \hat{m}(x) < \infty.$$

Зауваження 2.4. Послідовність $\bar{s}_n$ взагалі кажучи ймовірнісним розподілом не є, хоча $\sum_{n \geq 0} \bar{s}_n < \infty$.

Теорема 2.1. *Нехай виконані умови (A1), (M), (M2). Тоді для кожного* $\varepsilon < 1/4\bar{m}$ *має місце нерівність:*

$$\sup_{n>0, A \in \mathcal{E}} |P^n(x, A) - P^{t,n}(x, A)| \leq \varepsilon M(x, \varepsilon), \tag{11}$$

де

$$M(x, \varepsilon) = \bar{m}_x + \bar{m}(1 - 4\varepsilon \bar{m})^{-1/2},$$

тут $\bar{m}$, $\bar{m}_x$ *визначено в умові (M2).*

3. Приклади застосування

Теорема 3.1. *Розглянемо наступні ланцюги.*

$$P = Q = R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \beta_1 & 1 - \beta_1 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_2 & 0 & 1 - \beta_2 & 0 & \dots \\ \beta_3 & 0 & 0 & 1 - \beta_3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(t)} & a_2^{(t)} & a_3^{(t)} & \dots \\ b_1^{(t)} & 1 - b_1^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ b_2^{(t)} & 0 & 1 - b_2^{(t)} & 0 & \dots \\ b_3^{(t)} & 0 & 0 & 1 - b_3^{(t)} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

$$P_t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1^{(t)} & \alpha_2^{(t)} & \alpha_3^{(t)} & \dots \\ \beta_1^{(t)} & 1 - \beta_1^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ \beta_2^{(t)} & 0 & 1 - \beta_2^{(t)} & 0 & \dots \\ \beta_3^{(t)} & 0 & 0 & 1 - \beta_3^{(t)} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

де $\beta_k^{(t)} = (1 - \varepsilon)\beta_k + \varepsilon b_k^{(t)}$, $0 \leq b_k^{(t)} \leq 1$.

Припустимо виконання наступних умов:

1) *існує таке* $0 < \delta < 1$, *що* $\beta_k > \delta$, *для кожних* t, i: $b_i^{(t)} > \delta$ *(умова Колмогорова).*
2) *існує таке* $k > 0$, *що для* $\inf_t \{\alpha_k^{(t)}, \alpha_k\} > 0$.

Тоді, існує таке ε_0, *що для кожного* x, *та для* $\varepsilon < \varepsilon_0$*:*

$$\|P^n(x, A) - P^{t,n}(x, A)\| \leq \varepsilon M(x),$$

де $M(x) = sup_\varepsilon M(x, \varepsilon)$, *а* $M(x, \varepsilon)$ *— визначено в теоремі 2.1.*

Доведення прикладів наводиться у додатку.

4. Конструкція склеювання

Позначимо:

$$D = \{0, 1, 2\}. \tag{12}$$

Розглянемо простір $Z = (E \times E \times D)$ та ланцюг Маркова $(Z_n, n \geq 0)$ на ньому. $Z_n = \big(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, d_n\big)$, визначаємо наступним чином: $d_0 \in \{0, 1\}$, $Z_0^{(1)} = X_0$, $Z_0^{(2)} = X_0'$. Надалі будемо припускати, що $d_0 = 0$, $X_0 = X_0' = x$ для деякого $x \in E$, або $X_0 = X_0 \sim \nu(\cdot)$.

Нехай визначено Z_n, тоді визначимо Z_{n+1}.

Якщо $d_n = 0$ та $(X_n, X_n') \in C \times C$ тоді робимо незалежне випробування, що видає 1 з ймовірністю α та 0 інакше. Якщо випало 1 тоді встановлюємо $d_{n+1} = 1$ та $Z_{n+1}^{(1)} = Z_{n+1}^{(2)} = X$, де $X \sim \nu(\cdot)$, якщо 0 тоді встановлюємо $d_{n+1} = 0$ та $\big(Z_{n+1}^{(1)}, Z_{n+1}^{(2)}\big) \sim T\big(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, (\cdot, \cdot)\big)$.

Якщо $d_n = 0$ та $(X_n, X_n') \notin C \times C$ тоді встановлюємо $d_{n+1} = 0$ та $\big(Z_{n+1}^{(1)}, Z_{n+1}^{(2)}\big) \sim P \times P_{n+1}(\cdot, \cdot)$.

Якщо $d_n \in \{1, 2\}$, тоді робимо незалежне випробування що видає 1 з ймовірністю ε та 0. Якщо випадає 1, то $Z_{n+1} = (X, X', 0)$, де $X \sim R\big(Z_n^{(1)}, \cdot\big)$, $X' \sim R_{n+1}\big(Z_n^{(2)}, \cdot\big)$, якщо випадає 0 $Z_{n+1} = (X, X, 2)$, де $X \sim Q\big(Z_n^{(1)}\big)$.

Через $\bar{\mathbb{P}}^{(t)}$, та $\bar{\mathbb{E}}^{(t)}$ позначимо ймовірність та математичне сподівання, породжені ланцюгом $(Z_{t+n}, n \geq 0)$.

Запишемо перехідну ймовірність $\bar{P}_t$ для ланцюга Z_{t+n},

$$\begin{gathered}
\bar{P}_t(x, x', 0; A \times A' \times \{0\}) = T_t(x, x'; A \times A'),\\
\bar{P}_t(x, x', 0; A \times A' \times \{1\}) = \mathbb{1}_{C \times C}(x, x')\alpha\nu(A \cap A'),\\
\bar{P}_t(x, x', 0; E \times E \times \{2\}) = 0,\\
\bar{P}_t(x, x', 1; A \times A' \times \{0\}) = \varepsilon\delta_x(x')R(x, A)R_t(x', A'),\\
\bar{P}_t(x, x', 1; A \times A' \times \{1\}) = 0,\\
\bar{P}_t(x, x', 1; A \times A' \times \{2\}) = (1 - \varepsilon)\delta_x(x')Q(x, A \cap A'),\\
\bar{P}_t(x, x', 2; A \times A' \times D) = \bar{P}_t(x, x', 1; A \times A' \times D).
\end{gathered}$$

Зауваження 4.1. Зауважимо, що потрапити в $\{d_n = 1\}$ можна лише зі стану $(X_{n-1}, X_{n-1}', d_{n-1}) \in C \times C \times \{0\}$, і оскільки в цьому разі перехідна ймовірність не залежить від x, x' то має місце наступна формула для довільної міри μ на $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, та довільного $d \in D$:

$$\bar{\mathbb{P}}_{\mu,1}^{(t)}\{d_n = 1, d_{n+k} = d\} = \bar{\mathbb{P}}_{\mu,1}^{(t)}\{d_n = 1\}\bar{\mathbb{P}}_{\nu,1}^{(t+n)}\{d_k = d\}.$$

Лема 4.1. *Для довільного $t > 0$, $d \in D$ справедливі наступні рівності:*

$$\begin{gathered}
P(x, A) = \bar{P}_t(x, x', d; A \times E \times D).\\
P_t(x', A') = \bar{P}_t(x, x', d; E \times A' \times D).
\end{gathered}$$

Доведення. Досить довести твердження для $d \in \{0, 1\}$, оскільки перехідні ймовірності для $d = 2$, співпадають з ймовірностями для $d = 1$.

$$\begin{aligned}
\bar{P}(x, x', 0; A \times E \times D) &= \bar{P}(x, x', 0; A \times E \times \{0\}) + \bar{P}(x, x', 0; A \times E \times \{1\}) \\
&= T_t(x, x'; A \times E) + \alpha\nu(A \cap E) \\
&= (1 - \alpha)\nVdash_{C\times C}(x, x')P_\alpha(x, dy)P_{t,\alpha}(x', dy') \\
&\quad + \nVdash_{(C\times C)^c}(x, x')P(x, dy)P_t(x', dy') + \alpha\nu(A) \\
&= (1 - \alpha)\frac{P(x, A) - \alpha\nu(A)}{1 - \alpha} + \alpha\nu(A) = P(x, A). \\
\bar{P}_t(x, x, 1; A \times E \times D) &= \bar{P}_t(x, x, 1; A \times E \times \{0\}) + \bar{P}_t(x, x, 1; A \times E \times \{2\}) \\
&= \alpha R(x, A)R_t(x, E) + (1 - \alpha)Q(x, A) \\
&= \alpha R(x, A) + (1 - \alpha)Q(x, A) = P(x, A).
\end{aligned}$$

Рівності для P_t отримуються аналогічно. □

Лема 4.2. *Для довільного $t > 0$, $n \geq 1$, $d \in D$, $x' \in E$ і для довільної $\phi \in \mathcal{E}_+$*

$$P^{t,n}\phi(x) = \int_{E\times E\times D} \bar{P}^{t,n}(x, x', d; dx_{n-1} \times dx'_{n-1} \times di)\phi(x_{n-1}).$$

Доведення. Доведення проведемо за індукцією. Нехай $n = 1$, $\phi \in f\mathcal{E}_+$, $d \in D$, $x' \in E$. Тоді треба довести що:

$$P_t\phi(x) = \int_{E\times E\times D} \bar{P}_t(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times di)\phi(x_1).$$

Досить переконатися у рівності для $\phi(x) = I_A(x)$, де $A \in \mathcal{E}$.

$$\int_{E\times E\times D} \bar{P}_t(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times di)I_A(x_1) = \bar{P}_t(x, x', 1; A \times E \times D) = P_t(x, A) = P_t\phi(x).$$

Нехай твердження вірне для n, перевіримо його для $n + 1$.

$$\begin{aligned}
&\int_{E\times E\times D} \bar{P}^{t,n+1}(x, x', d; dx_n \times dx'_n \times di_n)\phi(x_n) \\
&\quad= \int_{E\times E\times D} \bar{P}^{t,n}(x, x', d; dx_{n-1} \times dx'_{n-1} \times di_{n-1}) \\
&\quad\quad \times \int_{E\times E\times D} \bar{P}_{t+n}(x_{n-1}, x'_{n-1}, i_{n-1}; dx_n \times dx'_n \times di_n)\phi(x_n) \\
&\quad= \int_{E\times E\times D} \bar{P}^{t,n}(x, x', d; dx_{n-1} \times dx'_{n-1} \times di_{n-1})P_{t+n}\phi(x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Застосуємо припущення індукції для функції $P_{t+n}\phi(x)$. Тоді:

$$\begin{aligned}
&\int_{E\times E\times D} \bar{P}^{t,n+1}(x, x', d; dx_n \times dx'_n \times di_n)\phi(x_n) \\
&\quad= \int_{E\times E\times D} \bar{P}^{t,n}(x, x', d; dx_{n-1} \times dx'_{n-1} \times di_{n-1})P_{t+n}\phi(x_{n-1}) \\
&\quad= P^{t,n}P_{t+n}\phi(x) = P^{t,n+1}\phi(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Лема 4.3. *Для кожного $t > 0$ має місце наступна нерівність:*

$$\sup_{n\geq 0} \|P^n(x, \cdot) - P^{t,n}(x, \cdot)\|_{TV} \leq \bar{P}^{t,n}(x, x, 1; E \times E \times \{0\}).$$

Доведення.

$$|P^n(x,A) - P^{t,n}(x,A)| = |\bar P^{t,n}(x,x,1; A\times E\times D - \bar P^{t,n}(x,x,1; E\times A\times D|;$$

$$\begin{aligned}
&\left|\bar P^{t,n}(x,x,1; A\times E\times\{1\} - \bar P^{t,n}(x,x,1; E\times A\times\{1\}\right| \\
&= \bigg|\int_{A\times E\times\{1\}} \bar P_t(x,x,1; dx_1\times dx_2\times di)\cdots\int_E \alpha\nu(A\cap E) \\
&\qquad - \int_{E\times A\times\{1\}} \bar P_t(x,x,1; dx_1\times dx_2\times di)\cdots\int_E \alpha\nu(E\cap A)\bigg| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\bar P^{t,n}(x,x,1; A\times E\times\{2\} - \bar P^{t,n}(x,x,1; E\times A\times\{2\}\right| \\
&= \bigg|\int_{A\times E\times\{2\}} \bar P_t(x,x,1; dx_1\times dx_2\times di)\cdots\int_E (1-\varepsilon)Q(x_{n-1}, A\cap E) \\
&\qquad - \int_{E\times A\times\{2\}} \bar P_t(x,x,1; dx_1\times dx_2\times di)\cdots\int_E (1-\varepsilon)Q(x_{n-1}, E\cap A)\bigg| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}
|P^n(x,A) - P^{t,n}(x,A)| &= |\bar P^{t,n}(x,x,1; A\times E\times\{0\}) - \bar P^{t,n}(x,x,1; E\times A\times\{0\})| \\
&\le \max(\bar P^{t,n}(x,x,1; A\times E\times\{0\}), \bar P^{t,n}(x,x,1; E\times A\times\{0\}) \\
&\le \bar P^{t,n}(x,x,1; E\times E\times\{0\}). \quad \square
\end{aligned}$$

Визначимо наступні моменти зупинки відносно σ-алгебри породженої процесом Z_n, з початковим станом $(x,x,1)$ (тобто ланцюги стартують склеєними з точки x):

$$\begin{aligned}
\tau_0 &\equiv 0, \qquad \nu_0 \equiv 0, \\
\tau_n &= \inf(t > \nu_{k-1} \colon d_t = 0), \qquad k \ge 1, \\
\nu_k &= \inf(t > \tau_k \colon d_t = 1), \qquad k \ge 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким чином, τ_k це момент k-того розклеювання, ν_k момент k-того (після нуля) склеювання.

Введемо також наступні величини, що характеризують інтервали між склеюваннями та розклеюваннями:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \zeta_0 \equiv 0, \\
\xi_k &= \tau_k - \nu_{k-1}, \qquad k \ge 1, \\
\zeta_k &= \nu_k - \tau_k, \qquad k \ge 1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Таким чином, ξ_k це інтервал між $(k-1)$-им склеюванням та k-тим розклеюванням, а ζ_k — інтервал між k-тим розклеюванням та k-тим склеюванням.

Зауважимо також, що мають місце очевидні формули:

$$\tau_k = \sum_{j=0}^{k} \xi_k + \sum_{j=0}^{k-1} \zeta_k,$$

$$\nu_k = \sum_{j=0}^{k} \xi_k + \sum_{j=0}^{k} \zeta_k.$$

5. Схема доведення теореми 2.1

Визначимо хвости послідовностей, $s_n^{(t)}(x)$, $\hat{s}_n(x)$, $\bar{s}_n$:

$$
\begin{aligned}
S_n^{(t)}(x) &= \sum_{k>n} s_n^{(t)}(x), \qquad n \ge -1,\\
\hat{S}_n(x) &= \sum_{k>n} \hat{s}_n(x), \qquad n \ge -1,\\
\bar{S}_n(x) &= \sum_{k>n} \bar{s}_n(x), \qquad n \ge -1,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Позначимо, через $p_n = \varepsilon(1-\varepsilon)^{n-1}$, $n \ge 1$, $p_0 = 0$, — розподіл геометричної величини з параметром ε, $(p_n^{\star k}, n \ge 0)$, k-та згортка цього розподілу. Доведення проведемо за наступною схемою:

Зауважимо, що за лемою 4.3

$$\sup_{n\ge 0} \|P^n(x,\cdot) - P^{t,n}(x,\cdot)\|_{TV} \le \bar{P}^{t,n}(x,x,1; E\times E\times\{0\}) = \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{d_n = 0\}.$$

1) Покажемо, що (лема 6.1)

$$\mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{d_n = 0\} = \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\tau_1 \le n, \nu_1 > n\} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\nu_1 = k\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu,1}\{d_{n-k} = 0\}. \tag{16}$$

Далі покажемо, що $\mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\tau_1 < n, \nu_1 > n\}$ та $\sup_{t,n} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{d_n = 0\}$ мають порядок ε. Отже не втрачаючи загальності можна вважати, що ланцюг $(Z_n, n \ge 0)$ починається з розподілу $(\nu, 1)$ (лема 6.1).

2) Доведемо, що ξ_k не залежить від τ_i, ν_i, ξ_i, ζ_i, $i = 0,\dots,k-1$, а також покажемо, що розподіл ξ_k співпадає з $(p_n, n \ge 0)$, а розподіл $\sum_{i=1}^{k} \xi_i$ співпадає з $(p_n^{\star k}, n \ge 0)$, що є негативним біноміальним розподілом (лема 6.6).

3) Запишемо,

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{d_n = 0\} = \sum_{k=1}^{[n/2]} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\tau_k \le n < \nu_k\} = \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\zeta_k > n-j, \tau_k = j\}. \tag{17}$$

4) Доведемо, що для довільної вимірної невід'ємної функції $f\colon E \to \mathbb{R}$, має місце формула (лема 6.2):

$$\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[f(X_{\tau_k - 1}), \tau_k = j] = \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} f, \tau_k = j]. \tag{18}$$

5) Покажемо, що (лема 6.3):

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\zeta_k > n-j, \tau_k = j\} \le \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_j - 1}), \tau_k = j]. \tag{19}$$

6) Доведемо, що (лема 6.4):

$$\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_j-1}), \tau_k = j] = \sum_{l=0}^{j} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_{k-1} = l]\mathbb{E}^{(t+l)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1}\hat{S}_{n-j}, \xi_k = j-l]. \tag{20}$$

7) Доведемо оцінки (лема 6.5):

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_{k-1} = l] \le (p^{\star k-1} \star \bar{S}^{\star k-1})_l, \tag{21}$$

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\xi_k = j-l, \nu Q^{\xi_k-1}\hat{S}_{n-j}] \le \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-l-1}\bar{S}_{n-j}. \tag{22}$$

8) З 5, 6 та 7 випливає випливає наступна оцінка:

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\zeta_k > n-j, \tau_k = j] \le (p^{\star k} \star \bar{S}^{\star k-1})_j \bar{S}_{n-j}. \tag{23}$$

9) З 3 та 8, а також явного вигляду для $(p_n^{\star k}, n \geq 0)$ випливає:

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{d_n = 0\} \leq \sum_{k=1}^{[n/2]} (p^{\star k} \star \bar{S}^{\star k-1} \star \bar{S})_n \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{[n/2]} \varepsilon^{k-1} \binom{2k-2}{k-1} (1 \star \bar{S}^{\star k})_n. \tag{24}$$

10) Скомбінувавши результати попередніх пунктів, отримаємо, що:

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 0} \|P^n(x,\cdot) - P^{t,n}(x,\cdot)\|_{TV} &\leq \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{d_n = 0\} \\ &= \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\tau_1 < n, \nu_1 > n\} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\nu_1 = k\} \mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu,1}\{d_{n-k} = 0\} \\ &\leq \varepsilon \left(\bar{m}_x + \bar{m} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \bar{m}^k \binom{2k}{k} \right) = \varepsilon(\bar{m}_x + \bar{m}(1 - 4\varepsilon\bar{m})^{-1/2}).\end{aligned}$$

6. Допоміжні леми

Лема 6.1.

$$\mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\tau_1 \leq n, \nu_1 > n\} \leq \varepsilon\bar{m}, \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\nu_1 = k\} \mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu,1}\{d_{n-k} = 0\} \leq \sup_{n,t} \mathbb{P}^{(t)}\{d_n = 0\}. \tag{26}$$

Доведення. Доведемо нерівність (25):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\tau_1 < n, \nu_1 > n\} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\tau_1 = k, \nu_1 > n - k\} = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{k-1} \delta_x Q^{k-1} S^{t+k}_{n-k} \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \delta_x Q^{k-1} \hat{S}_{n-k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \bar{S}_{n-k} \leq \varepsilon\bar{m}.\end{aligned}$$

Нерівність (26) очевидна:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\nu_1 = k\} \mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu,1}\{d_{n-k} = 0\} &\leq \sup_{n,t} \mathbb{P}^{(t)}\{d_n = 0\} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\nu_1 = k\} \\ &= \sup_{n,t} \mathbb{P}^{(t)}\{d_n = 0\} \mathbb{P}^{(t)}_{x,x,1}\{\nu_1 \leq n\} \leq \sup_{n,t} \mathbb{P}^{(t)}\{d_n = 0\}. \quad \square\end{aligned}$$

$\square$

Лема 6.2. *Для довільної вимірної невід'ємної функції $f\colon E \to \mathbb{R}$, має місце формула:*

$$\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[f(X_{\tau_k - 1}), \tau_k = j] = \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} f, \tau_k = j]. \tag{27}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[f(X_{\tau_k - 1}), \tau_k = j] &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[f(X_{\tau_k - 1}), \nu_{k-1} + \xi_k = j, \nu_{k-1} = i] \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\nu_{k-1} = i\} \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-i-1} Q^{j-i-1} f \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\nu_{k-1} = i\} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\xi_k = j - i\} \nu Q^{j-i-1} f \\ &= \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} f, \tau_k = j]. \quad \square\end{aligned}$$

Лема 6.3.

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\tau_k = j, \zeta_k > n-j\} \le \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_k - 1}), \tau_k = j].$$

Доведення. Покажемо, спочатку, що

$$\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\zeta_k > v, \xi_k = u | \nu_{k-1}] = \varepsilon(1-\varepsilon)^{u-1} \nu Q^{u-1} S_v^{t+\nu_{k-1}+u-1}. \tag{28}$$

Вимірність очевидна, тоді для довільного $i > 0$:

$$\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\xi_k = u, \zeta_k > v, \nu_{k-1} = i] = \varepsilon(1-\varepsilon)^{u-1} \nu Q^{u-1} S_v^{t+i+u-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_{k-1} = i].$$

Помітимо, що в силу умови (M):

$$\nu Q^{u-1} S_v^{t+\nu_{k-1}+u-1} \le \nu Q^{u-1} \hat{S}_v. \tag{29}$$

Запишемо, тепер використовуючи (28), (29) та незалежність ξ_k:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\tau_k = j, \zeta > n-j\} &= \sum_{l=1}^{j-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_{k-1} = l, \xi_k = j-l, \zeta_k > n-j] \\
&= \sum_{l=1}^{j-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\mathsf{E}[\xi_k = j-l, \zeta_k > n-j | \nu_{k-1}], \nu_{k-1} = l] \\
&\le \sum_{l=1}^{j-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\varepsilon(1-\varepsilon)^{j-l} \nu Q^{j-l-1} \hat{S}_{n-j}, \nu_{k-1} = l] \\
&= \sum_{l=1}^{j-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu Q^{j-l-1} \hat{S}_{n-j}, \nu_{k-1} = l, \xi_k = j-l] \\
&= \sum_{l=1}^{j-1} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_k - 1}), \nu_{k-1} = l, \xi_k = j-l] \\
&= \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_k - 1}), \tau_k = j]. \quad \square
\end{aligned}$$

Лема 6.4.

$$\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_k - 1}), \tau_k = j] = \sum_{l=0}^{j} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_{k-1} = l] \mathbb{E}^{(t+l)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} \hat{S}_{n-j}, \xi_k = j-l].$$

Доведення. За лемою 6.2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\hat{S}_{n-j}(X_{\tau_j - 1}), \tau_k = j] &= \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} \hat{S}_{n-j}, \tau_k = j] \\
&= \sum_{l=0}^{j} \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} \hat{S}_{n-j}, \nu_{k-1} = l, \xi_k = j-l] \\
&= \sum_{l=0}^{j} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}\{\nu_{k-1} = l\} \mathbb{E}^{(t+l)}_{\nu,1}[\nu Q^{\xi_k - 1} \hat{S}_{n-j}, \xi_k = j-l]. \quad \square
\end{aligned}$$

Лема 6.5.

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_k = l] \le (p^{\star k} \star \bar{S}^{\star k})_l, \tag{30}$$

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\xi_k = j-l, \nu Q^{\xi_k - 1} \hat{S}_{n-j}] \le \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-l-1} \bar{S}_{n-j}. \tag{31}$$

Доведення. Доведемо формулу (30) за індукцією. При $k = 1$:

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_1 = l] = \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-1}\nu Q^{j-1} s^{(t+j)}_{l-j} \le \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-1}\nu Q^{j-1} S^{(t+j)}_{l-j}$$
$$\le \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-1}\nu Q^{j-1}\hat{S}_{l-j} \le \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-1}\bar{S}_{l-j} = (p \star \bar{S})_l.$$

Нехай нерівність вірна для k доведемо її для $k+1$:

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_{k+1} = l] = \sum_{j=1}^{l-1} \mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\nu_k = j]\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu,1}\{\nu_{k+1} - \nu_k = l - j\}$$
$$\le \sum_{j=1}^{l-1} (p^{\star k} \star \bar{S})_j \sum_{i=1}^{l-j-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{i-1}\nu Q^{i-1} s^{(t+k+i)}_{l-j-i}$$
$$\le \sum_{j=1}^{l-1} (p^{\star k} \star \bar{S})_j \sum_{i=1}^{l-j-1} p_i \bar{S}_{l-j-i} = (p^{\star k+1} \star S^{\star k+1})_l.$$

Доведемо формулу (31):

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu,1}[\xi_k = j - l, \nu Q^{\xi_k - 1}\hat{S}_{n-j}] = \mathbb{E}^{(t)}_{\nu,1}[\varepsilon(1-\varepsilon)^{j-l-1}\nu Q^{j-l-1} S^{(t+\nu_{k-1}+j-l)}_{n-j}]$$
$$\le \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-l-1}\nu Q^{j-l-1}\hat{S}_{n-j} \le \varepsilon(1-\varepsilon)^{j-l-1}\bar{S}_{n-j}. \quad \square$$

Лема 6.6. *Випадкові величини ξ_k не залежать від τ_i, ν_i, ξ_i, ζ_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Розподіл ξ_k співпадає з $(p_n, n \ge 0)$, а розподіл $\sum_{i=1}^k \xi_i$ співпадає з $(p^{\star k}_n, n \ge 0)$.*

Доведення. ξ_k характеризує час від $(k-1)$-го склеювання до k-того розклеювання. За конструкцією ймовірність переходу зі стану $d_i \in \{1, 2\}$ в стан $d_{i+1} = 2$ є $1 - \varepsilon$ і не залежить від i, так само ймовірність переходу зі стану $d_i \in \{1, 2\}$ в стан $d_{i+1} = 0$ дорівнює ε. Таким чином випадкові величини ξ_k не залежать від поведінки процесу $(Z_n, n \ge 0)$ до моменту ν_{k-1}, а їх розподілом є геометричний розподіл $(p_k, k \ge 0)$.

Зрозуміло, що оскільки всі величини ξ_k незалежні та однаково розподілені то розподілом їх суми буде k-та згортка розподілу одного елемента. $\square$

7. Додаток

Теорема 7.1. *Нехай X, X' два незалежних неоднорідних дискретних ланцюги Маркова, $\alpha > 0$ деяка константа, $C = \{0\}$. Нехай також ξ — незалежна від X, X' геометрично розподілена випадкова величина з параметром α, $\mathsf{P}\{\xi = j\} = (1-\alpha)^{j-1}\alpha$, $j > 0$ та $\mathsf{P}\{\xi = 0\} = 0$. Позначимо, $\tau_0 = 0$,*

$$\tau_k = \inf\{t \ge \tau_{k-1}, (X_t, X'_t) \in C \times C\}.$$

Нехай $\hat{S}_n$ — мажоранта для τ_1, тобто, для кожного t:

$$P^{(t)}_{ij}\{\tau_1 > n\} \le \hat{S}_n(ij),$$

причому

$$\mu = \sum_{n \ge 0} \hat{S}_n(00) < \infty.$$

Тоді для моменту τ_ξ, та для довільних $i, j \in E$ також існує сумована мажоранта $\hat{S}'_n$, причому:

$$P^{(t)}_{ij}\{\tau_\xi > n\} \le \hat{S}'_n(ij),$$
$$\sum_{n \ge 0} \hat{S}'_n(ij) \le \mu/\alpha < \infty.$$

Доведення. Позначимо $Y_n = (X_n, X'_n)$ — неоднорідний ланцюг Маркова, а $\mathcal{F}_n = \sigma[Y_k, k \le n]$ — його природня фільтрація.

$$\begin{aligned}
P^{(t)}_{xy}\{\tau_\xi > n\} &= \sum_{k\ge1} P_{xy}\{\tau_{k-1} \le n < \tau_k, \xi > k-1\} \\
&= \sum_{k\ge1}\sum_{j=1}^{k} E^{(t)}_{xy}[\tau_{k-1} = j, \mathsf{E}[\tau_k - \tau_{k-1} > n-j|\mathcal{F}\tau_{k-1}]](1-\alpha)^{k-1} \\
&= \sum_{k\ge1}\sum_{j=1}^{k} E^{(t)}_{xy}[\tau_{k-1} = j] E^{(t+j)}_{00}[\tau_1 > n-j](1-\alpha)^{k-1} \\
&\le \sum_{k\ge1}\sum_{j=1}^{k} E^{(t)}_{xy}[\tau_{k-1} = j]\hat{S}_{n-j}(00)(1-\alpha)^{k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{S}_{n-j}(00)\sum_{k\ge1}(1-\alpha)^{k-1}P^{(t)}_{xy}\{\tau_j = k\} = \hat{S}'_n(xy).
\end{aligned}$$

Покажемо, що $\hat{S}'_n(xy)$ сумована:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge0}\hat{S}'_n(xy) &= \sum_{n\ge0}\sum_{j=1}^{n}\bar{S}_{n-j}(00)\sum_{k\ge1}(1-\alpha)^{k-1}P^{(t)}_{xy}\{\tau_j = k\} \\
&= \mu\sum_{j\ge0}\sum_{k\ge1}(1-\alpha)^{k-1}P^{(t)}_{xy}\{\tau_j = k\} = \mu\sum_{k\ge1}(1-\alpha)^{k-1}\sum_{j\ge0}P^{(t)}_{xy}\{\tau_j = k\} \\
&= \mu\sum_{k\ge1}(1-\alpha)^{k-1}P^{(t)}_{xy}\{Y_k \in C\times C\} \le \mu/\alpha. \quad \square
\end{aligned}$$

Доведення теореми 3.1. Умова міноризації (A1) очевидно виконана в силу умови 1) з параметром $\alpha = \inf_t\{\alpha^{(t)}_k, \alpha_k\}$. Зауважимо, що умова рівномірної міноризації в даному випадку не виконана. Отже для того, щоб застосувати теорему 2.1 досить показати існування мажоранти. Для цього скористаємось теоремою 7.1, та покажемо існування мажоранти для для моменту першого попадання в $(0,0)$.

Позначимо, через τ_k — момент k-того попадання в 0 першого ланцюга, ν_k — кількість попадань в $\{0\}$ першого ланцюга за час n, T — момент першого сумісного попадання в $\{0\}$. Тоді:

$$P^{(t)}_{ij}\{T > n\} = P^{(t)}_{ij}\{X'_{\tau_1} \ne 0, \dots, X'_{\tau_{\nu_n}} \ne 0\}. \tag{32}$$

Покажемо, що існує таке γ, що для довільного набору $(i_1, \dots, i_n)$, що $i_{k+1} - i_k > 1$, має місце нерівність:

$$P^{(t)}_{ij}\{X'_{i_1} \ne 0, \cdots, X'_{i_n} \ne 0\} \le (1-\gamma)^n.$$

Для цього доведемо, що:

$$\inf_{n\ge2,t} u^{(t)}_n \ge \gamma_0,$$
$$\inf_{n\ge2,t} P^{t,n}(i,0) \ge \gamma_1,$$

де

$$u^{(t)}_n = P^{t,n}(0,0).$$

Доведення першої нерівності проведемо за індукцією. Для $n = 2$,

$$u^{(t)}_2 = \sum_{j\ge1}\alpha^{(t)}_j\beta^{(t)}_j \ge \delta.$$

Нехай для всіх t та для $k \le n$ виконано: $u_k^{(t)} \ge \gamma_n$. Тоді:

$$u_{n+1}^{(t)} = \sum_{k=0}^{n+1} g_k^{(t)} u_{n+1-k}^{(t+k)} \ge \gamma_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} g_k^{(t)} + \gamma_{n+1}^{(t)} \right) = \gamma_n \big(1 - G_{n+1}^{(t)} - g_n^{(t)}\big).$$

Позначимо, через $\tilde{G}_n = G_{n+1}^{(t)} + g_n^{(t)}$. Тоді:

$$u_{n+1}^{(t)} \ge \gamma_n (1 - \tilde{G}_n) \ge \delta \prod_{k\ge 3} (1 - \tilde{G}_k).$$

Покажемо, що послідовність $\tilde{G}_n$ спадає. Це випливає з того, що послідовність $g_n^{(t)}$ спадає:

$$g_n^{(t)} = \sum_{j\ge 1} \alpha_j^{(t)} \prod_{i=1}^{n-2} \big(1 - \beta_j^{t+i}\big) \beta_j^{t+n-1} \ge \sum_{j\ge 1} \alpha_j^{(t)} \prod_{i=1}^{n-1} \big(1 - \beta_j^{t+i}\big) \beta_j^{t+n} = g_{n+1}^{(t)}.$$

Отже

$$0 \le \tilde{G}_n \le \tilde{G}_3 = g_3^{(t)} + \sum_{k>4} g_k^{(t)} = \sum_{k>2} g_k^{(t)} - g_3^{(t)} = 1 - g_2^{(t)} - g_3^{(t)},$$

$$\sum_{k\ge 3} \tilde{G}_k = \sum_{k\ge 3} g_k^{(t)} + \sum_{k\ge 3} G_k^{(t)} = \sum_{k\ge 2} G_k^{(t)} = m^{(t)} - G_0^{(t)} - G_1^{(t)} = m^{(t)} - 2.$$

Таким чином,

$$u_{n+1}^{(t)} \ge \delta \left(g_2^{(t)} + g_3^{(t)} \right)^{\frac{m^{(t)}-2}{1-g_1^{(t)}-g_2^{(t)}}} \ge \delta \left(\inf_t \left\{ g_2^{(t)} + g_3^{(t)} \right\} \right)^{\frac{\sup_t m^{(t)}-2}{1-\inf_t\{g_1^{(t)}+g_2^{(t)}\}}} = \gamma_0.$$

Доведемо тепер, що:

$$\inf_{n\ge 2,t} P^{t,n}(i,0) \ge \gamma_1.$$

Дійсно:

$$\inf_{n\ge 2,t} P^{t,n}(i,0) = \sum_{k=0}^{n} P_0^{t,k}(i,0) u_{n-k}^{t+k} \ge \gamma_0 \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \beta_i^{(t+j)}\right) \beta_i^{t+k} \ge \gamma_0 \delta = \gamma_1.$$

Отже:

$$P_{xy}^{(t)}\{T > n\} \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} (1-\gamma)^k P_y\{\tau_k = j\} P_0\{\tau_{k+1} - \tau_k > n - j\} = E_{xy}[(1-\gamma)^{\nu_n}].$$

Покажемо тепер, що

$$\sum_{n\ge 0} E_{xy}[(1-\gamma)^{\nu_n}] < \infty.$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge 0} E_{xy}[(1-\gamma)^{\nu_n}] &= \sum_{n\ge 0} \sum_{k=0}^{n} (1-\gamma)^k P_y\{\nu_n = k\} = \sum_{k\ge 0} (1-\gamma)^k \sum_{n\ge k} P_y\{\nu_n = k\} \\ &= \sum_{k\ge 0} (1-\gamma)^k \sum_{n\ge k} \sum_{j=0}^{n} P_y\{\tau_k = j\} P_0\{\tau_{k+1} - \tau_k > n - j\} \le \mu/\gamma. \quad \square \end{aligned}$$

Література

1. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
2. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1966.
3. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
4. Н. В. Карташов, *Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления*, Асимптотические задачи для случайн. процессов, Препр. № 77-24, Ин-т матем. АНУ, Киев, 1977, стр. 2–43.
5. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, *Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем*, Препринт № 80-12, Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1980.
6. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl. **11** (1981), 11–26.
7. E. Numemelin and P. Tuominen, *Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applicatoins to renewal theory*, Stoch. Proc. Appls. **12** (1982), 187–202.
8. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
9. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
10. С. Т. Рачев, *Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике*, Теория вероятностей и ее применения **29** (1984), № 4, 625–653.
11. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
12. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
13. P. Tuominen and R. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Adv. in Appl. Probab. **26** (1994), 775–798.
14. R. L. Tweedie and J. N. Corcoran, *Perfect sampling of ergodic Harris chains*, Annals of Applied Probability **11** (2001), № 2, 438–451.
15. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.
16. S. F. Jarner and G. O. Roberts, *Polynomial convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **12** (2001), 224–247.
17. R. Douc, E. Moulines, and J. S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), 1643–1664.
18. R. Douc, E. Mouliness, and J. S. Rothenthal, *Quantitative bounds on convergence of time-inhomogeneous Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), № 4, 1643–1665.
19. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1353–1377.
20. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Computable convergence rates for subgeometrically ergodic Markov chains*, Bernoulli **13** (2007), no. 3, 831–848.
21. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 3, 897–923.
22. В. В. Голомозий, *Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова*, Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки **4** (2009), 10–15.
23. В. В. Голомозий, *Субгеометрична оцінка стійкості для однорідних ланцюгів Маркова*, Теорія ймовірностей та математична статистика **81** (2010), 31–46.
24. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теорія імовірностей та математична статистика **81** (2009), 65–75.
25. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Середній час склеювання незалежних дискретних процесів відновлення*, Теорія ймовірностей та математична статистика **84** (2011), 78–85.
26. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, I*, Теорія ймовірностей та математична статистика **86** (2012), 81–92.
27. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, II*, Теорія ймовірностей та математична статистика **87** (2012), 47–59.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: mailtower@gmail.com

Надійшла 26/12/2011