Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 60–75

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 60–75

ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПРОЦЕСІВ, ЯКІ СПОСТЕРІГАЮТЬСЯ З ШУМОМ

УДК 519.21

І. І. ДУБОВЕЦЬКА І М. П. МОКЛЯЧУК

Анотація. Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\zeta = \int_0^\infty a(t)\zeta(t)\,dt$$

від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t<0$, де $\theta(t)$ — некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. У тому випадку коли відомі спектральні щільності, виведені формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала. Якщо ж спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи допустимих щільностей, знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів допустимих спектральних щільностей.

Abstract. The problem of optimal linear estimation of the functional

$$A\zeta = \int_0^\infty a(t)\zeta(t)\,dt$$

depending on the unknown values of periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$ from observations of the process $\zeta(t)+\theta(t)$ for $t<0$, where $\theta(t)$ is uncorrelated with $\zeta(t)$ periodically correlated process, is considered. Formulas for calculating the spectral characteristic and the mean square error of the optimal linear estimation of the functional are proposed in the case of spectral certainty where spectral densities are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics of optimal estimates of functionals are proposed in the case of spectral uncertainty where spectral densities are not exactly known but sets of admissible spectral densities are given.

Аннотация. Исследуется задача оптимального оценивания линейного функционала

$$A\zeta = \int_0^\infty a(t)\zeta(t)\,dt$$

от неизвестных значений периодически коррелированного процесса $\zeta(t)$ за результатами наблюдений процесса $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t<0$, где шум $\theta(t)$ — некоррелированный с $\zeta(t)$ периодически коррелированный процесс. В том случае, когда известны спектральные плотности, найдены формулы для вычисления спектральной характеристики и среднеквадратической ошибки оптимальной оценки функционала. Если же спектральные плотности неизвестны, а заданы лишь классы допустимых плотностей, найдены наименее благоприятные спектральные плотности и минимаксные (робастные) спектральные характеристики оптимальных линейных оценок функционала для различных классов допустимых спектральных плотностей.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Періодично корельовані процеси, мінімаксна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність.

1. Вступ

Методи дослідження задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів (задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації) розроблені у роботах А. М. Колмогорова [8], Н. Вінера [18], А. М. Яглома [16, 17], Ю. А. Розанова [15]. Ці методи базуються на припущенні, що точні значення спектральних щільностей процесів відомі. У тому випадку, коли повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовуєть мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренандер [2] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. Огляд публікацій з мінімаксних (робастних) методів розв'язування задач оцінювання зробили у свій час С. А. Кассам та Г. В. Пур [7]. М. П. Моклячук [12], М. П. Моклячук та О. Ю. Масютка [13] досліджували задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей (див. також книгу О. М. Куркіна, Ю. Б. Коробочкіна, С. А. Шаталова [9]).

Дослідження періодично корельованих процесів розпочато у статті Є. Г. Гладишева [1], де проведено аналіз властивостей кореляційної функції та зображень періодично корельованих процесів. Зв'язок між періодично корельованими та нескінченно вимірними стаціонарними процесами досліджував А. Макагон [10, 11]. Мінімаксні задачі оптимального оцінювання лінійних функціоналів від періодично корельованих послідовностей вивчалися у роботах І. І. Дубовецької, О. Ю. Масютки, М. П. Моклячука [3]–[5].

У даній статті досліджується задача середньоквадратичного оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\zeta = \int_0^\infty a(t)\zeta(t)\,dt$ від невідомих значень середньоквадратично неперервного періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t<0$, де $\theta(t)$ — некорельований із $\zeta(t)$ середньоквадратично неперервний періодично корельований процес. Знайдені формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ у тому випадку, коли спектральні щільності породжених стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ відомі. Якщо ж повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний підхід до розв'язування задач оцінювання. Для заданих класів допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$.

2. Періодично корельовані процеси та відповідні векторні стаціонарні послідовності

Означення 2.1 ([1])**.** Середньоквадратично неперервний стохастичний процес

$$\zeta\colon \mathbb{R}\to H = L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),\qquad \mathsf{E}\zeta(t)=0,$$

називається періодично корельованим з періодом T, якщо його кореляційна функція $K(t+u,u)=\mathsf{E}\zeta(t+u)\overline{\zeta(u)}$ для всіх $t,u\in\mathbb{R}$ та деякого фіксованого T задовольняє умову

$$K(t+u,u)=\mathsf{E}\zeta(t+u+T)\overline{\zeta(u+T)}=K(t+u+T,u+T).$$

Нехай $\zeta(t)$, $\theta(t)$, $t\in\mathbb{R}$, — некорельовані між собою періодично корельовані стохастичні процеси. Побудуємо дві послідовності стохастичних функцій

$$\{\zeta_j(u)=\zeta(u+jT), u\in[0,T), j\in\mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

$$\{\theta_j(u)=\theta(u+jT), u\in[0,T), j\in\mathbb{Z}\}. \tag{2}$$

Кожна з послідовностей (1), (2) утворює $L_2([0,T);H)$-значну стаціонарну послідовність $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, відповідно, із кореляційними функціями

$$\begin{aligned}B_\zeta(l,j)=\langle\zeta_l,\zeta_j\rangle_H&=\int_0^T\mathsf{E}[\zeta(u+lT)\overline{\zeta(u+jT)}]\,du\\&=\int_0^T K_\zeta(u+(l-j)T,u)\,du=B_\zeta(l-j),\\B_\theta(l,j)=\langle\theta_l,\theta_j\rangle_H&=\int_0^T\mathsf{E}[\theta(u+lT)\overline{\theta(u+jT)}]\,du\\&=\int_0^T K_\theta(u+(l-j)T,u)\,du=B_\theta(l-j),\end{aligned}$$

де $K_\zeta(t,s)=\mathsf{E}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$, $K_\theta(t,s)=\mathsf{E}\theta(t)\overline{\theta(s)}$ — кореляційні функції періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, $\theta(t)$.

Якщо у $L_2([0,T);\mathbb{R})$ задати ортонормований базис

$$\left\{\widetilde{e}_k=\frac{1}{\sqrt{T}}\exp\left\{2\pi i\left\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\right\}u\Big/T\right\},k=1,2,3,\dots\right\},\qquad\langle\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_k\rangle=\delta_{kj},$$

то стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ можна подати у вигляді

$$\begin{gathered}\zeta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_{kj}\widetilde{e}_k,\\\zeta_{kj}=\langle\zeta_j,\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\zeta_j(v)\exp\left\{-2\pi i\left\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\right\}v\Big/T\right\}dv,\end{gathered}\tag{3}$$

та

$$\begin{gathered}\theta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{kj}\widetilde{e}_k,\\\theta_{kj}=\langle\theta_j,\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\theta_j(v)\exp\left\{-2\pi i\left\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\right\}v\Big/T\right\}dv.\end{gathered}\tag{4}$$

Компоненти ζ_{kj}, $k=1,2,\dots$, та θ_{kj}, $k=1,2,\dots$, стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ задовольняють умови [6]

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\zeta_{kj}=0,\qquad\|\zeta_j\|_H^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}|\zeta_{kj}|^2=P_\zeta<\infty,\qquad\mathsf{E}\zeta_{kl}\overline{\zeta_{nj}}=\langle R_\zeta(l-j)e_k,e_n\rangle,\\&\mathsf{E}\theta_{kj}=0,\qquad\|\theta_j\|_H^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}|\theta_{kj}|^2=P_\theta<\infty,\qquad\mathsf{E}\theta_{kl}\overline{\theta_{nj}}=\langle R_\theta(l-j)e_k,e_n\rangle,\end{aligned}$$

де $\{e_k, k=1,2,\dots\}$ — базис простору ℓ_2. Кореляційні функції $R_\zeta(j)$ та $R_\theta(j)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ є операторними функціями у ℓ_2. Кореляційні оператори $R_\zeta(0)=R_\zeta$, $R_\theta(0)=R_\theta$ — ядерні:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\langle R_\zeta e_k,e_k\rangle&=\|\zeta_j\|_H^2=P_\zeta,\\\sum_{k=1}^{\infty}\langle R_\theta e_k,e_k\rangle&=\|\theta_j\|_H^2=P_\theta.\end{aligned}$$

Стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ мають спектральні щільності $f(\lambda)=\{f_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$, $g(\lambda)=\{g_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$ – додатні операторнозначні функції в ℓ_2

змінної $\lambda \in [-\pi, \pi)$, якщо їх кореляційні функції $R_\zeta(j)$ та $R_\theta(j)$ можна записати у вигляді

$$\langle R_\zeta(j)e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\langle f(\lambda)e_k, e_n\rangle\, d\lambda,$$
$$\langle R_\theta(j)e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\langle g(\lambda)e_k, e_n\rangle\, d\lambda, \qquad k, n \geq 1.$$

Для майже всіх $\lambda \in [-\pi, \pi)$ спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ є ядерними операторами з інтегровними ядерними нормами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\langle f(\lambda)e_k, e_k\rangle\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\langle R_\zeta e_k, e_k\rangle = \|\zeta_j\|_H^2 = P_\zeta,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\langle g(\lambda)e_k, e_k\rangle\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\langle R_\theta e_k, e_k\rangle = \|\theta_j\|_H^2 = P_\theta.$$

3. Класичний метод лінійної екстраполяції періодично корельованих процесів

Будемо вивчати задачу середньоквадратичного оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\zeta = \int_0^{\infty} a(t)\zeta(t)\, dt$$

від невідомих значень середньоквадратично неперервного періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t) + \theta(t)$ при $t < 0$, де $\theta(t)$ — некорельований із $\zeta(t)$ середньоквадратично неперервний періодично корельований процес. Функція $a(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, задовольняє умову $\int_0^\infty |a(t)|\, dt < \infty$.

Запишемо функціонал $A\zeta$ у наступному вигляді

$$A\zeta = \int_0^{\infty} a(t)\zeta(t)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^T a_j(u)\zeta_j(u)\, du,$$
$$a(u + jT) = a_j(u), \qquad \zeta(u + jT) = \zeta_j(u), \qquad u \in [0, T).$$

Враховуючи розклад (3) стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та розв'язок рівняння

$$(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^n\left[\frac{n}{2}\right] = 0$$

двох змінних (k, n), який задається парами $(1, 1)$ та $(2l + 1, 2l)$, $(2l, 2l + 1)$ при $l = 2, 3, \ldots$, функціонал $A\zeta$ можна подати наступним чином

$$\begin{aligned}
A\zeta &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^T a_j(u)\zeta_j(u)\, du \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\exp\left\{2\pi i\left\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\right\}u\big/T\right\}\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_{nj}\exp\left\{2\pi i\left\{(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]\right\}u\big/T\right\}\right) du \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kj}\zeta_{nj}\frac{1}{T}\int_0^T \exp\left\{2\pi i\left\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]\right\}u\big/T\right\} du \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\zeta_{kj} = \sum_{j=0}^{\infty}\vec{a}_j^{\top}\vec{\zeta}_j,
\end{aligned}$$

де

$$\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top,$$

$$\vec{a}_j = (a_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top = (a_{1j}, a_{3j}, a_{2j}, \dots, a_{2k+1,j}, a_{2k,j}, \dots)^\top,$$

$$a_{kj} = \langle a_j, \widetilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T a_j(v) \exp\left\{-2\pi i \left\{(-1)^k \left[\frac{k}{2}\right]\right\} v \big/ T\right\} dv.$$

Припустимо, що коефіцієнти $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \dots\}$ задовольняють умови

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\vec{a}_j\| < \infty, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\|\vec{a}_j\|^2 < \infty, \qquad \|\vec{a}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2. \tag{5}$$

За першої умови (5) функціонал $A\zeta$ має скінченний другий момент. Друга умова забезпечує компактність операторів, що визначені в подальшому тексті.

Нехай спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, відповідно, задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr}\left[(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}\right] d\lambda < \infty. \tag{6}$$

Умова (6) є необхідною та достатньою для неможливості безпомилкової екстраполяції невідомих значень послідовності $\{\zeta_j + \theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ [15, 12].

Позначимо через $L_2(f)$ гільбертів простір векторних комплекснозначних функцій $b(\lambda) = \{b_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, які інтегровані в квадраті за мірою із щільністю $f(\lambda)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b^\top(\lambda) f(\lambda) \overline{b(\lambda)}\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k,n=1}^{\infty} b_k(\lambda) \overline{b_n(\lambda)} f_{kn}(\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Через $L_2^-(f)$ позначимо підпростір в $L_2(f)$, породжений функціями $e^{ij\lambda}\delta_k$, $\delta_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots$, $j < 0$, де $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kn} = 0$ для $k \neq n$.

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}\zeta$ функціонала $A\zeta$ від спостережень послідовності $\{\zeta_j + \theta_j\}$ при $j < 0$ має вигляд

$$\hat{A}\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^\top\left(e^{i\lambda}\right)\left(Z^\zeta(d\lambda) + Z^\theta(d\lambda)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} h_k\left(e^{i\lambda}\right)\left(Z_k^\zeta(d\lambda) + Z_k^\theta(d\lambda)\right), \tag{7}$$

де $Z^\zeta(\Delta) = \{Z_k^\zeta(\Delta)\}_{k=1}^{\infty}$ та $Z^\theta(\Delta) = \{Z_k^\theta(\Delta)\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональні випадкові міри послідовностей $\{\zeta_j\}$ та $\{\theta_j\}$, відповідно, $h(e^{i\lambda}) = \{h_k(e^{i\lambda})\}_{k=1}^{\infty}$ — спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\zeta$. Функція $h(e^{i\lambda}) \in L_2^-(f+g)$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h; f, g)$ оцінки $\hat{A}\zeta$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
\Delta(h; f, g) &= \mathsf{E}\,|A\zeta - \hat{A}\zeta|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\left[A\left(e^{i\lambda}\right) - h\left(e^{i\lambda}\right)\right]^\top f(\lambda) \overline{\left[A\left(e^{i\lambda}\right) - h\left(e^{i\lambda}\right)\right]} \\
&\qquad + h^\top\left(e^{i\lambda}\right) g(\lambda) \overline{h\left(e^{i\lambda}\right)} \Big)\, d\lambda,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{a}_j e^{ij\lambda}.$$

Спектральна характеристика $h(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\zeta$ мінімізує значення середньоквадратичної похибки

$$\Delta(f, g) = \Delta(h(f, g); f, g) = \min_{h \in L_2^-(f+g)} \Delta(h; f, g) = \min_{\hat{A}\zeta} \mathsf{E}|A\zeta - \hat{A}\zeta|^2. \tag{9}$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\zeta$ є розв'язком оптимізаційної задачі (9). Використаємо класичний метод проекцій А. М. Колмогорова [8]. Запишемо дві умови, які визначають $\hat{A}\zeta$ як проекцію на підпростір $H^{-}(\zeta+\theta)$ простору H, породжений величинами $\zeta_j+\theta_j$, $j<0$:

1) $\hat{A}\zeta \in H^{-}(\zeta+\theta)$,
2) $(A\zeta-\hat{A}\zeta) \perp H^{-}(\zeta+\theta)$.

Умова 2) виконується, якщо

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(A\zeta-\hat{A}\zeta)(\overline{\zeta_j+\theta_j}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(A\left(e^{i\lambda}\right)-h\left(e^{i\lambda}\right)\right)^{\top}f(\lambda)-h^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda)\right]e^{-ij\lambda}\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-h^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)(f(\lambda)+g(\lambda))\right]e^{-ij\lambda}\,d\lambda=0,\\ &\qquad j=-1,-2,\dots .\end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що

$$A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-h^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)(f(\lambda)+g(\lambda))=\sum_{j=0}^{\infty}\vec{c}_j^{\top}e^{ij\lambda}=C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right),$$

де $\vec{c}_j$, $j=0,1,\dots$ — невідомі коефіцієнти. Отже спектральна характеристика $h(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ має вигляд

$$\begin{aligned}h^{\top}(f,g) &= \left(A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}\\ &= A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)-\left(A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda)+C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1},\end{aligned}\tag{10}$$

Умова 1) еквівалентна рівностям

$$\int_{-\pi}^{\pi}h(f,g)e^{-il\lambda}\,d\lambda=0,\qquad l=0,1,\dots,$$

тобто

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(j-l)\lambda}\,d\lambda\,\vec{a}_j\\ &\quad=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(j-l)\lambda}\,d\lambda\,\vec{c}_j,\qquad l=0,1,\dots .\end{aligned}\tag{11}$$

Визначивши матриці $\mathbf{B}=\{B(l,j)\}_{l,j=0}^{\infty}$ та $\mathbf{D}=\{D(l,j)\}_{l,j=0}^{\infty}$, які задаються елементами

$$\begin{aligned}B(l,j)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(j-l)\lambda}\,d\lambda,\\ D(l,j)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(j-l)\lambda}\,d\lambda,\end{aligned}$$

та вектори $\mathbf{a}=\{\vec{a}_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\mathbf{c}=\{\vec{c}_j\}_{j=0}^{\infty}$, систему рівнянь (11) можна записати у матричному вигляді

$$\mathbf{Da}=\mathbf{Bc},$$

звідки випливає, що невідомі коефіцієнти $\vec{c}_j$, $j=0,1,\dots$, визначаються з рівняння

$$\mathbf{c}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Da}.$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки $\hat{A}\zeta$ за (8) має вигляд

$$\begin{aligned}\Delta(f,g) &= \Delta(h(f,g);f,g)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda)+C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right][f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}\\ &\qquad\times f(\lambda)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}\left[A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda)+C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right]^{*}d\lambda\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right][f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}\\ &\qquad\times g(\lambda)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}\left[A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)\right]^{*}d\lambda,\end{aligned}$$

Враховуючи властивості спектральних щільностей

$$f(\lambda)=f^{*}(\lambda),\qquad g(\lambda)=g^{*}(\lambda),\qquad f(\lambda)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}g(\lambda)=g(\lambda)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}f(\lambda),$$

формулу для обчислення величини середньокваратичної похибки $\Delta(f,g)$ можна записати наступним чином

$$\begin{aligned}\Delta(f,g) &= \sum_{j=0}^{\infty}\vec{a}_j^{\top}\overline{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}g(\lambda)\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}\,d\lambda\,\vec{a}_l}\\ &+\sum_{j=0}^{\infty}\vec{c}_j^{\top}\overline{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}\,d\lambda\,\vec{c}_l}\\ &= \langle\mathbf{a},\mathbf{Ra}\rangle+\langle\mathbf{c},\mathbf{Bc}\rangle,\end{aligned}\tag{12}$$

де $\langle a,b\rangle$ — скалярний добуток в ℓ_2, матриця $\mathbf{R}=\{R(j,l)\}_{j,l=0}^{\infty}$ задається елементами:

$$R(j,l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}g(\lambda)\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}\,d\lambda,\qquad l,j=0,1,\dots.$$

Отримані результати можна об'єднати у наступну теорему.

Теорема 3.1. *Нехай $\{\zeta(t),t\in\mathbb{R}\}$ та $\{\theta(t),t\in\mathbb{R}\}$ — некорельовані між собою періодично корельовані стохастичні процеси такі, що стаціонарні послідовності $\{\zeta_j,j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j,j\in\mathbb{Z}\}$, побудовані за співвідношеннями* (1), (2), *відповідно, мають спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, які задовольняють умову мінімальності* (6). *Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j,j=0,1,\dots\}$, які визначають функціонал $A\zeta$, задовольняють умови* (5). *Тоді спектральна характеристика $h(f,g)$ і середньоквадратична похибка $\Delta(f,g)$ лінійної оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t<0$, обчислюються за формулами* (10) *та* (12). *Оптимальна оцінка $\hat{A}\zeta$ функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою* (7).

У випадку екстраполяції функціонала $A\zeta$ за спостереженнями без шуму справедливий наступний наслідок, який безпосередньо випливає із Теореми 3.1.

Наслідок 3.1. *Нехай $\{\zeta(t),t\in\mathbb{R}\}$ — періодично корельований стохастичний процес такий, що стаціонарна послідовність $\{\zeta_j,j\in\mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням* (1), *має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\left[(f(\lambda))^{-1}\right]d\lambda<\infty.\tag{13}$$

Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j,j=0,1,\dots\}$, які визначають функціонал $A\zeta$, задовольняють умови (5). *Тоді спектральна характеристика $h(f)$ та середньоквадратична* *похибка $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процеса $\zeta(t)$ при $t<0$ обчислюються за формулами*

$$h^{\top}(f) = A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right) - C^{\top}\left(e^{i\lambda}\right)[f(\lambda)]^{-1}, \tag{14}$$

$$\Delta(f) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle, \tag{15}$$

де $\mathbf{c} = \{\vec{c}_j\}_{j=0}^{\infty} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}$, *матриця* $\mathbf{B} = \{B(l,j)\}_{l,j=0}^{\infty}$ *задається елементами:*

$$B(l,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda))^{-1}\right]^{\top} e^{i(j-l)\lambda}\,d\lambda, \qquad l,j = 0,1,\ldots.$$

Оптимальна оцінка $\hat{A}\zeta$ функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою

$$\hat{A}\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^{\top}\left(e^{i\lambda}\right) Z^{\zeta}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} h_k\left(e^{i\lambda}\right) Z_k^{\zeta}(d\lambda). \tag{16}$$

Зауваження 3.1. Зауважимо, що А. М. Колмогоров [8] запропонував метод розв'язання задачі інтерполяції стаціонарної послідовності (тобто знаходження спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки пропущеного спостереження послідовності), що використовує коефіцієнти Фур'є функції $1/f$. Теорема 3.1 показує, що коефіцієнти Фур'є функцій від спектральних щільностей можна використати для знаходження спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціоналів від стаціонарної послідовності для задач екстраполяції та інтерполяції як за спостереженнями без шуму, так і за спостереженнями з шумом. Вказаний вигляд спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки зручний для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів для задач екстраполяції та інтерполяції як за спостереженнями без шуму, так і за спостереженнями з шумом.

Для розв'язання задачі екстраполяції стаціонарних послідовностей А. М. Колмогоров [8] (див. також [18, 16, 17, 15]) запропонував метод, що базується на факторизації спектральної щільності. Такий метод зручний для розв'язання задач екстраполяції за спостереженнями без шуму, тоді як Теорема 3.1 вказує метод розв'язання задачі екстраполяції за спостереженнями з шумом.

Застосуємо метод, що базується на факторизації спектральних щільностей до задачі оцінки функціоналу за спостереженнями без шуму.

Означення 3.1. Позначимо через $H_{\zeta}(n)$ замкнутий лінійний підпростір гільбертового простору H, породжений випадковими величинами ζ_{kj}, $k \geq 1$, $j \leq n$. Послідовність $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ називається регулярною, якщо $\bigcap_n H_{\zeta}(n) = \varnothing$.

Регулярна стаціонарна послідовність $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ допускає канонічне зображення рухомого середнього своїх компонент [6]

$$\zeta_{kj} = \sum_{u=-\infty}^{j}\sum_{m=1}^{M} d_{km}(j-u)\varepsilon_m(u), \tag{17}$$

де $\varepsilon_m(u)$, $m = 1,\ldots,M$, $u \in \mathbb{Z}$ — взаємно ортогональні в H послідовності з ортогональними значеннями: $\mathsf{E}\,\varepsilon_m(u)\overline{\varepsilon_p(v)} = \delta_{mp}\delta_{uv}$; M — кратність стаціонарної послідовності $\{\zeta_j\}$; послідовності $d_{km}(u)$, $k = 1,2,\ldots$, $m = 1,\ldots,M$, $u = 0,1,\ldots$, такі, що $\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}|d_{km}(u)|^2 = P_{\zeta}$. Оптимальна лінійна оцінка компонент регулярної стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ за даними спостережень цієї послідовності при $j<0$ може бути записана у вигляді

$$\hat{\zeta}_{kj}=\sum_{u=-\infty}^{-1}\sum_{m=1}^{M} d_{km}(j-u)\varepsilon_m(u). \tag{18}$$

Оскільки невідомі значення компонент сингулярної стаціонарної послідовності оцінюються безпомилково, то можна розглядати задачу оптимального лінійного оцінювання тільки для регулярних стаціонарних послідовностей.

Спектральна щільність $f(\lambda)$ регулярної стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ допускає канонічну факторизацію

$$f(\lambda)=P(\lambda)P^*(\lambda), \qquad P(\lambda)=\sum_{u=0}^{\infty} d(u)e^{-iu\lambda}, \tag{19}$$

матриця $d(u)=\{d_{km}(u)\}_{k=1,\dots,\infty}^{m=1,\dots,M}$ визначається коефіцієнтами канонічного зображення (17).

Враховуючи розклади (17), (18) компонент регулярної стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, запишемо середньоквадратичну похибку оптимальної оцінки $\hat{A}\zeta$ згідно означення

$$\begin{aligned}\Delta(h(f);f)&=\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{kj}\sum_{u=0}^{j}\sum_{m=1}^{M}d_{km}(j-u)\varepsilon_m(u)\right|^2\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=l}^{\infty}a_{kj}d_{km}(j-l)\right|^2=\sum_{l=0}^{\infty}\|(\mathbf{Ad})_l\|^2=\|\mathbf{Ad}\|^2,\end{aligned}$$

де $(\mathbf{Ad})_l=\sum_{j=l}^{\infty}\vec{a}_j^{\top}d(j-l)$, $l\geq 0$. Якщо виконана друга умова (5), то оператор $\mathbf{A}$ — компактний.

Оскільки спектральна характеристика $h(f)$ мінімізує значення середньоквадратичної похибки

$$\Delta(f)=\Delta(h(f);f)=\min_{h\in L_2^-(f)}\Delta(h;f)=\|\mathbf{Ad}\|^2 \tag{20}$$

з одного боку, а з іншого — з формули (8) маємо

$$\Delta(h;f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A\left(e^{i\lambda}\right)-h(e^{i\lambda})\right]^{\top}f(\lambda)\overline{\left[A\left(e^{i\lambda}\right)-h\left(e^{i\lambda}\right)\right]}\,d\lambda,$$

то природно припустити, що

$$h(f)=A\left(e^{i\lambda}\right)-X(\lambda).$$

$X(\lambda)$ — вектор-стовпчик, який визначається з рівностей

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\|(\mathbf{Ad})_l\|^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_p e^{ip\lambda}\right)^*d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)Q(\lambda)\underbrace{P(\lambda)P^*(\lambda)}_{f(\lambda)}Q^*(\lambda)\left(\sum_{p=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_p e^{ip\lambda}\right)^*d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^{\top}(\lambda)f(\lambda)\overline{X(\lambda)}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Тоді $X(\lambda)=S(e^{i\lambda})Q(\lambda)$, $S(e^{i\lambda})=\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}$, $Q(\lambda)=\{q_{mk}(\lambda)\}_{m=1,\dots,M}^{k=1,\dots,\infty}$ — матрична функція, що задовольняє рівняння $Q(\lambda)P(\lambda)=I_M$, спектральна характеристка

$h(f)$ обчислюється за формулою

$$h^{\top}(f) = A^{\top}\left(e^{i\lambda}\right) - S\left(e^{i\lambda}\right) Q(\lambda). \tag{21}$$

Отримані вище результати сформулюємо як наступну теорему.

Теорема 3.2. *Нехай $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ — періодично корельований стохастичний процес такий, що стаціонарна послідовність $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням* (1), *має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умову мінімальності* (13). *Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \dots\}$, які визначають функціонал $A\zeta$, задовольняють умови* (5). *Тоді спектральна характеристика $h(f)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процеса $\zeta(t)$ при $t < 0$ обчислюються за формулами* (21) *та* (20). *Оптимальна оцінка $\hat{A}\zeta$ функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою* (16).

Аналогічні до останніх міркування можна застосувати для оцінювання функціонала

$$A_N\zeta = \int_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N} \vec{a}_j^{\top}\vec{\zeta}_j$$

та встановити справеливість наступного наслідку, який очевидним чином випливає із Теореми 3.2.

Наслідок 3.2. *Нехай $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ — періодично корельований стохастичний процес такий, що стаціонарна послідовність $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням* (1), *має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умову мінімальності* (13). *Спектральна характеристика $h_N(f)$ та середньоквадратична похибка $\Delta_N(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процеса $\zeta(t)$ при $t < 0$ обчислюються за формулами*

$$h_N^{\top}(f) = A_N^{\top}\left(e^{i\lambda}\right) - S_N\left(e^{i\lambda}\right) Q(\lambda), \tag{22}$$

$$\Delta_N(f) = \sum_{l=0}^{N} \|(\mathbf{A_N d})_l\|^2 = \|\mathbf{A_N d}\|^2, \tag{23}$$

$$A_N\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{j=0}^{N} \vec{a}_j e^{ij\lambda}, \qquad S_N\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{l=0}^{N} (\mathbf{A_N d})_l e^{il\lambda}, \qquad (\mathbf{A_N d})_l = \sum_{j=l}^{N} \vec{a}_j^{\top} d(j-l).$$

4. Мінімаксна (робастна) екстраполяція

Формулами (10), (12), (14), (15), (20)–(23) можна користуватись для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ лише тоді, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, які побудовані за співвідношеннями (1), (2), відповідно, відомі. Якщо ж спектральні щільності точно не відомі, але задана множина $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень процесу. Ми шукаємо оцінку, яка дає найменшу похибку одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу D.

Означення 4.1. Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими у D для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$, якщо

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta\left(h(f^0, g^0); f^0, g^0\right) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 4.2. Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D} L_2^-(f+g), \qquad \min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h;f,g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h^0;f,g).$$

Враховуючи вказані означення та співвідношень (10), (12), (14), (15), (20)–(23), переконуємося у спаведливості наступних лем.

Лема 4.1. *Спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, які задовольняють умову (6), найменш сприятливі в класі D для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$\left(f^0(\lambda)+g^0(\lambda)\right)^{-1}, \qquad f^0(\lambda)\left(f^0(\lambda)+g^0(\lambda)\right)^{-1}, \qquad f^0(\lambda)\left(f^0(\lambda)+g^0(\lambda)\right)^{-1} g^0(\lambda)$$

задають матриці $\mathbf{B}^0$, $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{R}^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D} \left(\langle \mathbf{a}, \mathbf{R}\mathbf{a}\rangle + \left\langle (\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{D}\mathbf{a}\right\rangle\right) = \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{R}^0\mathbf{a}\right\rangle + \left\langle (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}, \mathbf{D}^0\mathbf{a}\right\rangle. \tag{24}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою (10) за умови, що $h(f^0, g^0) \in H_D$.

Лема 4.2. *Спектральна щільність $f^0(\lambda) \in D_f$, яка задовольняє умову (13), найменш сприятлива в класі D_f для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t < 0$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $(f^0(\lambda))^{-1}$ задають матрицю $\mathbf{B}^0$, яка визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D_f} \left\langle (\mathbf{B})^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a}\right\rangle = \left\langle (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a}\right\rangle. \tag{25}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою (14) за умови, що $h(f^0) \in H_D$.

Лема 4.3. *Спектральна щільність $f^0(\lambda) \in D_f$, яка задовольняє умову (13), найменш сприятлива в класі D_f для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t < 0$, якщо вона допускає канонічну факторизацію*

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{u=0}^{\infty} d^0(u)e^{-iu\lambda}\right)\left(\sum_{u=0}^{\infty} d^0(u)e^{-iu\lambda}\right)^*, \tag{26}$$

де $\mathbf{d^0} = \{d^0(u), u = 0, 1, \dots\}$ — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\|\mathbf{A}\mathbf{d}\|^2 \to \max, \qquad f(\lambda) = \left(\sum_{u=0}^{\infty} d(u)e^{-iu\lambda}\right)\left(\sum_{u=0}^{\infty} d(u)e^{-iu\lambda}\right)^* \in D. \tag{27}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою (21) за умови, що $h(f^0) \in H_D$.

Лема 4.4. *Спектральна щільність $f^0(\lambda) \in D_f$, яка задовольняє умову (13), найменш сприятлива в класі D_f для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t < 0$, якщо вона допускає канонічну факторизацію*

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{u=0}^{N} d^0(u)e^{-iu\lambda}\right)\left(\sum_{u=0}^{N} d^0(u)e^{-iu\lambda}\right)^*, \tag{28}$$

де $\mathbf{d^0} = \{d^0(u), u = 0, 1, \dots, N\}$ — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\|\mathbf{A_N}\mathbf{d}\|^2 \to \max, \qquad f(\lambda) = \left(\sum_{u=0}^{N} d(u)e^{-iu\lambda}\right)\left(\sum_{u=0}^{N} d(u)e^{-iu\lambda}\right)^* \in D. \tag{29}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h_N^0 = h_N(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою (22) за умови, що $h_N(f^0) \in H_D$.

Доведення лем безпосередньо випливає із застосування означень найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксної спектральної характеристики до Теорем 3.1, 3.2 та наслідків до них.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h^0; f, g\right) \leq \Delta\left(h^0; f^0, g^0\right) \leq \Delta\left(h; f^0, g^0\right), \qquad \forall h \in H_D,\ \forall f \in D_f,\ \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f^0, g^0)$, $h(f^0, g^0) \in H_D$ та (f^0, g^0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\Delta\left(h(f^0, g^0); f, g\right) \to \sup, \qquad (f, g) \in D, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(h(f^0, g^0); f, g\right)\\
&\quad= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A^\top\left(e^{i\lambda}\right)g^0(\lambda) + \left(C^0(e^{i\lambda})\right)^\top\right]\left(f^0(\lambda) + g^0(\lambda)\right)^{-1}\\
&\qquad\qquad\times f(\lambda)\left(f^0(\lambda) + g^0(\lambda)\right)^{-1}\left[g^0(\lambda)\overline{A\left(e^{i\lambda}\right)} + \overline{C^0\left(e^{i\lambda}\right)}\right]d\lambda\\
&\quad+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A^\top\left(e^{i\lambda}\right)f^0(\lambda) - \left(C^0(e^{i\lambda})\right)^\top\right]\left(f^0(\lambda) + g^0(\lambda)\right)^{-1}\\
&\qquad\qquad\times g(\lambda)\left(f^0(\lambda) + g^0(\lambda)\right)^{-1}\left[f^0(\lambda)\overline{A\left(e^{i\lambda}\right)} - \overline{C^0\left(e^{i\lambda}\right)}\right]d\lambda.
\end{aligned}$$

Задача на умовний екстремум (30) еквівалентна наступній задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta\left(h(f^0, g^0); f, g\right) + \delta((f, g)|D) \to \inf,$$

де $\delta((f, g)|D)$ — індикаторна функція множини D. Розв'язок (f^0, g^0) останньої задачі визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(f^0, g^0)$ [14], яка є необхідною та достатньою для того, щоб точка (f^0, g^0) належала множині мінімумів опуклої функції. $\partial\Delta_D(f^0, g^0)$ — субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f, g)$ в точці $(f, g) = (f^0, g^0)$. Скористаємося вказаними умовами і знайдемо найменш сприятливі спектральні щільності в деяких класах допустимих щільностей.

5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_0 \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t) + \theta(t)$ при $t < 0$, за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, відповідно, які побудовані за співвідношеннями (1), (2), належать множинам

$$D_0 = \left\{f(\lambda)\ \middle|\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr} f(\lambda)\,d\lambda = P_\zeta\right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{g(\lambda)\ \middle|\ \operatorname{Tr} g(\lambda) = (1-\varepsilon)\omega(\lambda) + \varepsilon u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr} g(\lambda)\,d\lambda = P_\theta\right\},$$

де $\omega(\lambda)$ — відома невід'ємна функція, а $u(\lambda)$ — невідома невід'ємна функція. Множина D_0 характеризує обмеження на момент спектральної щільності $f(\lambda)$. Множина D_ε описує модель "ε-забруднення" стохастичної послідовності $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$.

Для визначення пари найменш сприятливих щільностей $(f^0(\lambda), g^0(\lambda))$ у даному випадку можемо скористатись методом невизначених множників Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа для задачі (30) на умовний екстремум

$$\mathcal{L}(f,g) = -\Delta(h(f^0,g^0); f,g) + \alpha^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} f(\lambda)\, d\lambda - P_\zeta \right) + \beta^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} g(\lambda)\, d\lambda - P_\theta \right) + \gamma^2 \big(\operatorname{Tr} g(\lambda) - (1-\varepsilon)\omega(\lambda) - \varepsilon u(\lambda)\big),$$

де $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ — множники Лагранжа. За принципом Лагранжа знаходимо, що розв'язок $(f^0(\lambda), g^0(\lambda))$ задачі (30) задовольняє рівняння

$$\left(g^0(\lambda)\overline{A\left(e^{i\lambda}\right)} + \overline{C^0\left(e^{i\lambda}\right)}\right)\left(A^\top\left(e^{i\lambda}\right) g^0(\lambda) + \left(C^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^\top\right) = \alpha^2 \left(f^0(\lambda) + g^0(\lambda)\right)^2, \quad (31)$$

$$\left(f^0(\lambda)\overline{A\left(e^{i\lambda}\right)} - \overline{C^0\left(e^{i\lambda}\right)}\right)\left(A^\top\left(e^{i\lambda}\right) f^0(\lambda) - \left(C^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^\top\right) = \left(\beta^2 + \varphi(\lambda)\right)\left(f^0(\lambda) + g^0(\lambda)\right)^2, \quad (32)$$

де функція $\varphi(\lambda) \geq 0$ та $\varphi(\lambda) = 0$, коли $\operatorname{Tr} g^0(\lambda) \geq (1-\varepsilon)\omega(\lambda)$.

Вказані рівняння визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_0 \times D_\varepsilon$.

Отримані результати можна об'єднати у наступну теорему.

Теорема 5.1. *Нехай спектральні щільності $f(\lambda) \in D_0$, $g(\lambda) \in D_\varepsilon$ задовольняють умову* (6). *Тоді матриці спектральних щільностей $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ є найменш сприятливими у класі $D_0 \times D_\varepsilon$ для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$, якщо вони задовольняють співвідношення* (31), (32) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (24). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0, g^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою* (10).

У випадку оцінювання функціонала $A\zeta$ за спостереженнями без шуму із Теореми 5.1 безпосередньо випливають наступні наслідки для множин D_0 та D_ε допустимих щільностей.

Наслідок 5.1. *Нехай спектральна щільність $f^0(\lambda) \in D_0$ задовольняє умову* (13). *Тоді матриця спектральної щільності $f^0(\lambda)$ є найменш сприятливою у класі D_0 для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t < 0$, якщо вона задовольняє співвідношення*

$$\overline{C^0(e^{i\lambda})}\left(C^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^\top = \alpha^2 \left(f^0(\lambda)\right)^2$$

і визначає розв'язок екстремальної задачі (25). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою* (14).

Наслідок 5.2. *Нехай спектральна щільність $f^0(\lambda) \in D_\varepsilon$ задовольняє умову* (13). *Тоді матриця спектральної щільності $f^0(\lambda)$ є найменш сприятливою у класі D_ε для оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t < 0$, якщо вона задовольняє співвідношення*

$$\overline{C^0(e^{i\lambda})}\left(C^0\left(e^{i\lambda}\right)\right)^\top = \left(\beta^2 + \varphi(\lambda)\right)\left(f^0(\lambda)\right)^2$$

і визначає розв'язок екстремальної задачі (25). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\zeta$ обчислюється за формулою* (14).

6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі D_0

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\zeta$ та $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t<0$ для множини D_0 спектральних щільностей $f(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), таких, що допускають канонічну факторизацію (19).

Для визначення найменш сприятливої щільності $f^0(\lambda)$ застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа для задачі (27) на умовний екстремум

$$\mathcal{L}(f)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)Q(\lambda)f(\lambda)Q^*(\lambda)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)^* d\lambda$$
$$+\alpha^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr} f(\lambda)\,d\lambda-P_\zeta\right),$$

де α^2 — множник Лагранжа. За принципом Лагранжа знаходимо, що розв'язок $f^0(\lambda)$ задачі (27) задовольняє співвідношення

$$Q^\top(\lambda)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)^\top\overline{\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)Q(\lambda)}=\alpha^2 I_\infty,$$

яке еквівалентне

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)^\top\overline{\left(\sum_{l=0}^{\infty}(\mathbf{Ad})_l e^{il\lambda}\right)}=\alpha^2 P^\top(\lambda)\overline{P(\lambda)}. \tag{33}$$

Після розкриття дужок у (33) прирівняємо коефіцієнти при $e^{il\lambda}$, $l\geq 0$,

$$\sum_{t=0}^{\infty}d^\top(t)\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\vec{a}_{t+l+p}\vec{a}^*_{s+p}\overline{d(s)}=\alpha^2\sum_{t=0}^{\infty}d^\top(t)\overline{d(t+l)}.$$

Для кожного фіксованого $t=0,1,\dots$, після заміни $t+l=r$ та транспонування остання рівність запишеться у вигляді

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\overline{\vec{a}_{r+p}}\vec{a}^\top_{s+p}\,d(s)=\alpha^2 d(r),\qquad r=0,1,\dots. \tag{34}$$

Якщо для кожного $r=0,1,\dots$ виконуються рівності (34), то виконується рівність (33).

З умови $f(\lambda)\in D_0$ випливає обмеження

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr}\left(\sum_{u=0}^{\infty}d(u)e^{-iu\lambda}\right)\left(\sum_{u=0}^{\infty}d(u)e^{-iu\lambda}\right)^* d\lambda=\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}|d_{km}(u)|^2$$
$$=\sum_{u=0}^{\infty}\|d(u)\|^2=\|\mathbf{d}\|^2=P_\zeta. \tag{35}$$

Отримані результати можна об'єднати у наступну теорему.

Теорема 6.1. *Спектральна щільність* (26) *послідовності рухомого середнього* (17) *є найменш сприятливою в класі* D_0 *для оптимальної оцінки функціонала* $A\zeta$. *Послідовність матриць* $\mathbf{d^0}=\{d^0(u),u=0,1,\dots\}$ *визначається рівняннями* (34) *та умовою* (35). *Функція* $h(f^0)$, *обчислена за формулою* (21), *є мінімаксною спектральною характеристикою функціонала* $A\zeta$.

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до задачі (29) на умовний екстремум та аналогічні до попередніх перетворення можна встановити, що для функціонала $A_N\zeta$ співвідношення (33) має вигляд

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l=0}^{N}(\mathbf{A_N}\mathbf{d})_l e^{il\lambda}\right)^{\top}&\overline{\left(\sum_{l=0}^{N}(\mathbf{A_N}\mathbf{d})_l e^{il\lambda}\right)}\\ &=\alpha^2\left(\sum_{u=0}^{N}d^0(u)e^{-iu\lambda}\right)^{\top}\overline{\left(\sum_{u=0}^{N}d^0(u)e^{-iu\lambda}\right)}.\end{aligned}\tag{36}$$

Рівність (36) виконується, якщо виконуються рівності

$$\sum_{p=0}^{N-r}\sum_{s=0}^{N-p}\overline{\vec{a}_{r+p}}\vec{a}_{s+p}^{\top}d(s)=\alpha^2 d(r),\qquad r=0,1,\ldots,N.\tag{37}$$

Обмеження (35) запишеться у вигляді

$$\|\mathbf{d_N}\|^2=\sum_{u=0}^{N}\|d(u)\|^2=\sum_{u=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}|d_{km}(u)|^2=P_\zeta.\tag{38}$$

Запишемо останні результати як теорему.

Теорема 6.2. *Спектральна щільність (28) послідовності рухомого середнього*

$$\zeta_{kj}=\sum_{u=j-N}^{j}\sum_{m=1}^{M}g_{km}(j-u)\varepsilon_m(u),$$

є найменш сприятливою в класі D_0 для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$. Послідовність матриць $\mathbf{d_N^0}=\{d^0(u),u=0,1,\ldots,N\}$ визначається рівняннями (37) *та умовою* (38). *Функція $h_N(f^0)$, обчислена за формулою* (22), *є мінімаксною спектральною характеристикою функціонала $A_N\zeta$.*

7. Висновки

Запроповано метод розв'язання задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень періодично корельованих стохастичних процесів. Метод базується на можливості привести задачу до відповідної задачі для стаціонарних (нескінченновимірних) послідовностей і записати середньоквадратичну похибку у вигляді лінійного функціоналу в $L_1\times L_1$ відносто (f,g), що дає можливість розв'язати задачу на умовний екстремум і отримати мінімаксні оцінки. Зауважимо, що опубліковано велику кількість робіт про періодично корельовані послідовності і лише кілька про періодично корельовані процеси (див., наприклад, роботи А. Макагона [10], [11]).

У даній роботі виведено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики в задачі оптимальної оцінки функціонала $A\zeta=\int_0^\infty a(t)\zeta(t)\,dt$, який залежить від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t<0$, де $\theta(t)$ — некорельований з $\zeta(t)$ періодично корельований стохастичний процес. Задача вивчається за умов спектральної визначеності та спектральної невизначеності. Показано, що періодично корельовані стохастичні процеси, які породжують стаціонарні (нескінченновимірні) послідовності одностороннього рухомого середнього, є найменш сприятливими для оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\zeta$ за умов спектральної невизначеності в класі допустимих щільностей з обмеженням на моменти.

Література

1. Е. Г. Гладышев, *Периодически и почти-периодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем*, Теория вероятностей и ее применения **8** (1963), № 2, 184–189.
2. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
3. І. Дубовецька, *Задача екстраполяції функціоналів від періодично корельованої послідовності*, Вісник Київ. ун-ту. Математика. Механіка **25** (2011), 22–26.
4. І. І. Дубовецька, М. П. Моклячук, *Фільтрація лінійних функціоналів від періодично корельованих послідовностей*, Теорія ймовірн. та матем. статист. **86** (2012), 43–55.
5. I. I. Dubovets'ka, O. Yu. Masyutka, and M. P. Moklyachuk, *Interpolation of periodically correlated stochastic sequences*, Theor. Probab. and Math. Statist. **84** (2012), 43–56.
6. G. Kallianpur and V. Mandrekar, *Spectral theory of stationary H-valued processes*, J. Multivariate Analysis **1** (1971), 1–16.
7. S. A. Kassam and H. V. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proc. IEEE. **73** (1985), 433–481.
8. А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Сборник статей, "Наука", Москва, 1986.
9. О. М. Куркин, Ю. Б. Коробочкин, С. А. Шаталов, *Минимаксная обработка информации*, "Энергоатомиздат", Москва, 1990.
10. A. Makagon, *Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes*, Studia Math. **136** (1999), no. 1, 71–86.
11. A. Makagon, *Characterization of the spectra of periodically correlated processes*, Multivariate Analysis **78** (2001), 1–10.
12. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", Київ, 2008.
13. M. P. Moklyachuk and A. Yu. Masyutka, *Minimax-Robust Estimation Technique for Stationary Stochastic Processes*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
14. М. П. Моклячук, *Негладкий аналіз та оптимізація*, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", Київ, 2008.
15. Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, 2-е изд. доп., "Наука", Москва, 1990.
16. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
17. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
18. N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications*, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, 1966.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: idubovetska@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Надійшла 04/10/2012