Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 88, 2013, стор. 90–97

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 88, 2013, pp. 90–97

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАЛИШКІВ У МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ВАЖКИМИ ХВОСТАМИ ПОХИБОК СПОСТЕРЕЖЕНЬ

УДК 519.21

О. В. ІВАНОВ І І. К. МАЦАК

Анотація. У роботі отримано граничні теореми для максимальних залишків у моделях лінійної регресії з похибками спостережень, що мають важкі хвости.

Abstract. In the paper the limit theorems for maximal residuals in linear regression models with observation errors having heavy tails are obtained.

Аннотация. В роботе получены предельные теоремы для максимальных невязок в моделях линейной регресии с ошибками наблюдений, которые имеют тяжелые хвосты.

В роботі розглядається лінійна модель регресії та вивчається асимптотична поведінка максимуму відхилень спостережень від емпіричної функції регресії у випадку, коли похибки спостережень мають важкі хвости. Доведено збіжність розподілу цього нормованого певним чином максимуму до одного з граничних максимум-розподілів незалежних однаково розподілених випадкових величин(в.в.), якщо об'єм вибірки зростає до нескінченності.

На важливість такого типу задач для спостережень з важкими хвостами нашу увагу звернув проф. В. В. Булдигін на семінарі в КПІ у зв'язку з роботою [1]. Отримані результати можна застосувати в статистичних критеріях для визначення характеру розподілу похибки спостережень та перевірки адекватності моделей регресії.

Розглянемо лінійну модель регресії

$$y_j = \sum_{i=1}^{q} \theta_i x_{ji} + \varepsilon_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

де ε_j — незалежні однаково розподілені в.в.

Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nq} \end{pmatrix}$$

— $n \times q$-матриця плану регресійного експеременту, $\det(X^T X) \neq 0$. Тоді оцінка найменших квадратів (о.н.к.) невідомих параметрів $\theta^T = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbf{R}^q$ за спостереженнями (1), тобто випадковий вектор $\hat{\theta}_n^T = (\hat{\theta}_{1n}, \dots, \hat{\theta}_{qn})$, що мінімізує функціонал

$$Q(\theta) = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta),$$

$Y^T = (y_1, \dots, y_n)$, задається формулою

$$\hat{\theta}_n = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y. \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G70, 62J05.

Ключові слова і фрази. Модель регресії, екстремальні значення, важкі хвости.

Покладемо

$$\hat{y_j} = \sum_{i=1}^{q} \hat{\theta}_{in} x_{ji}, \qquad \hat{\varepsilon}_j = y_j - \hat{y_j}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$
$$Z_n = \max_{1 \le j \le n} \varepsilon_j, \qquad \hat{Z}_n = \max_{1 \le j \le n} \hat{\varepsilon}_j, \tag{3}$$
$$d_{in}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}^2, \qquad d_n = \mathrm{diag}(d_{in}, i = 1, \ldots, q).$$

Далі будемо користуватися наступними двома стандартними вимогами щодо плану регресійного експеременту для достатньо великих n.

$$(i) \qquad d_{in}^{-1} \max_{1 \le j \le n} |x_{ji}| \le k_i n^{-1/2}, \qquad i = 1, \ldots, q. \tag{4}$$

Позначимо

$$J_n = d_n^{-1} X^T X d_n^{-1} = \left(d_{kn}^{-1} d_{ln}^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_{jk} x_{jl} \right)_{k,l=1}^{q}, \tag{5}$$

$\lambda_{min}(A)$ - найменше власне число додатно визначеної матриці A.

$$(ii) \qquad \lambda_{\min}(J_n) \ge \lambda_0 > 0. \tag{6}$$

Нас буде цікавити асимптотична поведінка екстремальних залишків $\hat{Z}_n$ в моделі (1). Така задача досліджувалась авторами в роботі [1], при цьому вивчався класичний випадок: $\mathsf{E}\,\varepsilon_j = 0$, $\mathsf{E}\,\varepsilon_j^2 = \sigma^2 < \infty$. У даній роботі розглянемо випадок важких хвостів, тобто коли $\sigma^2 = \infty$. Якщо і математичне сподівання в.в. ε_j не існує, то о.н.к. $\hat{\theta}_n$ втрачає звичні статистичні властивості. Проте формальне використання формули (2) в виразах (3) приводить, як ми побачимо, до змістовних результатів.

Нехай в.в. (ε_j) мають функцію розподілу(ф.р.) $F(x)$. Припустимо, що для деяких констант $b_n > 0$, a_n при $n \to \infty$

$$b_n(Z_n - a_n) \xrightarrow{D} \zeta, \tag{7}$$

і ζ має невироджену ф.р. $G(x) = \mathsf{P}(\zeta < x)$ (через $\xrightarrow{D}$ позначаємо слабку збіжність в.в.).

Якщо співвідношення (7) виконується, то кажуть, що ф.р. F належить області максимум притягнення закону G і пишуть $F \in D(G)$.

Відомо [2]–[4], що при виконанні співвідношення (7) G може мати лише один із наступних трьох типів розподілів:

$$\text{Тип I}: \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{при} \quad \alpha > 0,\, x > 0\,; \end{cases}$$
$$\text{Тип II}: \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \text{при} \quad \alpha > 0,\, x \le 0, \\ 1, & \text{при} \quad x > 0; \end{cases} \tag{8}$$
$$\text{Тип III}: \quad \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty.$$

Позначимо $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Якщо $F \in D(\Psi_\alpha)$, то ([4, с.28],) $x_F < \infty$, а отже

$$\mathsf{E}(\varepsilon_j)_+^m < \infty, \qquad m > 0. \tag{9}$$

Коли ф.р. F належить області максимум притягнення закону Λ, то також виконується нерівність (9) ([3, с.89]).

Таким чином, для випадку важких хвостів для аналізу залишається лише тип I. Для того, щоб $F \in D(\Phi_\alpha)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$x_F = \infty \quad i \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha},\ x > 0,\ \alpha > 0, \tag{10}$$

при цьому константи в співвідношенні (7) можуть бути вибрані так (див. [4, с.28, 30]):

$$a_n = 0, \qquad b_n = (\gamma_n)^{-1}, \qquad \gamma_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай в.в.* ε_j *в моделі* (1) *симетрично розподілені, їх ф.р.* $F(x)$ *задовольняє умову* (10) *для деякого* $\alpha \in (0, 2]$. *Нехай також виконуються умови (i), (ii). Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\hat{Z}_n}{\gamma_n} < x\right\} = \Phi_\alpha(x), \qquad x \in \mathbf{R}^1. \tag{12}$$

При доведенні теореми 1 нам буде потрібна наступна

Лема 1. *Нехай* $0 < \beta < \infty$, ξ_j, $j \geq 1$, *— незалежні симетричні в.в.,* $\mathsf{E}\,|\xi_j|^\beta < +\infty$. *Тоді існує константа* $C_\beta < +\infty$ *така, що*

$$\mathsf{E}\Big|\sum_{j=1}^n \xi_j\Big|^\beta \leq C_\beta\, \mathsf{E}\Big(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\Big)^{\beta/2}. \tag{13}$$

Доведення леми 1. Для $\beta \geq 1$ нерівність (13) — це частковий випадок нерівності Марцинцевича–Зигмунда ([5, с.78]). Якщо χ_j, $j \geq 1$, — незалежні симетричні в.в. Бернуллі ($\mathsf{P}(\chi_j = \pm 1) = \frac{1}{2}$), c_j, $j \geq 1$, — дійсні числа і $\xi_j = \chi_j c_j$, то (13) — це відома нерівність Хінчина [6].

Оскільки симетричні в.в. ξ_j можна представити у вигляді

$$\xi_j \overset{d}{=} \chi_j \xi_j^{'},$$

де $\xi_j \overset{d}{=} \xi_j^{'}$, χ_j та $\xi_j^{'}$ — незалежні в.в., то загальний випадок нерівності (13) одержуємо із нерівності Хінчина підстановкою $\xi_j^{'}$ замість c_j. □

Доведення теореми 1. Зразу відзначимо, що тут ми скористаємось деякими міркуваннями із роботи [1].

З умови (6) випливає існування матриці $J_n^{-1} = \mathcal{L}_n = (\mathcal{L}_n^{kl})_{k,l=1}^q$ та нерівності

$$\det J_n = \lambda_1 \ldots \lambda_q \geq \lambda_{\min}^q \geq \lambda_0^q > 0,$$
$$\det \mathcal{L}_n \leq \lambda_0^{-q}, \qquad n > n_0,$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — власні числа матриці J_n.

В матриці алгебраїчних доповнень до елементів матриці J_n кожний елемент складається з добутків елементів матриці J_n. Кожний елемент J_n за нерівністю Коші–Буняковського оцінюється одиницею. У відповідному мінорі всього $(q-1)!$ доданків. Таким чином, за умови (ii) кожний елемент матриці $\mathcal{L}_n$ оцінюється величиною

$$|\mathcal{L}_n^{kl}| \leq \lambda_0^{-q}(q-1)!, \qquad k, l = 1, \ldots, q. \tag{14}$$

Виберемо $0 < \beta < \alpha$. Ф.р. $F(x)$, яка задовольняє умову (10), має вигляд $F(x) = 1 - x^{-\alpha}L(x)$, $x > 1$, де $L(x)$ — повільно змінна на нескінченності функція (п.з.ф.). Таким чином, $\mathsf{E}\,|\varepsilon_j|^\beta < +\infty$ (див., наприклад, [7, с.190]).

Із нерівності

$$\Big|\max_{1\leq j\leq n} c_j - \max_{1\leq j\leq n} d_j\Big| \leq \max_{1\leq j\leq n} |c_j - d_j|$$

одержуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,|\hat{Z}_n - Z_n|^\beta &\le \mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\hat{\varepsilon}_j-\varepsilon_j|^\beta\\ &\le \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{q}|\hat{\theta}_{in}-\theta_i|\max_{1\le j\le n}|x_{ji}|\right)^\beta \\ &\le k(\beta)\sum_{i=1}^{q}\mathsf{E}\,|\hat{\theta}_{in}-\theta_i|^\beta\max_{1\le j\le n}|x_{ji}|^\beta,\end{aligned} \tag{15}$$

де $k(\beta)=1$, якщо $0<\beta<\alpha\le 1$, і $k(\beta)=q^{\beta-1}$, якщо $1\le\beta<\alpha\le 2$.

Із формули (2) і нерівності (13) отримуємо для $i=1,\dots,q$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,|\hat{\theta}_i-\theta_i|^\beta &= \mathsf{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\Big(d_{in}^{-1}\sum_{l=1}^{q}\mathcal{L}_n^{il}d_{ln}^{-1}x_{jl}\Big)\varepsilon_j\right|^\beta\\ &\le \mathsf{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\Big(d_{in}^{-1}\sum_{l=1}^{q}\mathcal{L}_n^{il}d_{ln}^{-1}x_{jl}\Big)^2\varepsilon_j^2\right|^{\beta/2}\\ &\le \mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|^\beta d_{in}^{-\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{q}\mathcal{L}_n^{il}d_{ln}^{-1}x_{jl}\Big)^2\right)^{\beta/2}.\end{aligned} \tag{16}$$

Використовуючи оцінку (14), маємо

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{q}\mathcal{L}_n^{il}d_{ln}^{-1}x_{jl}\right)^2\le q\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}(\mathcal{L}_n^{il})^2d_{ln}^{-2}x_{jl}^2\le (q!)^2\lambda_0^{-2q},$$

і ми можемо продовжити нерівність (16):

$$\mathsf{E}\,|\hat{\theta}_i-\theta_i|^\beta\le (q!)^\beta\lambda_0^{-\beta q}d_{in}^{-\beta}\,\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|^\beta. \tag{17}$$

Разом з (15) та умовою (4) це дає оцінку

$$\mathsf{E}\,|\hat{Z}_n-Z_n|^\beta\le k(\beta)(q!)^\beta\lambda_0^{-\beta q}\left(\sum_{i=1}^{q}k_i^\beta\right)\left(\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|^\beta\right)n^{-\beta/2}. \tag{18}$$

Покладемо

$$Z_n^*=\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|,\qquad W_n=\min_{1\le j\le n}\varepsilon_j.$$

Тоді для $x>0$

$$\mathsf{P}\{Z_n^*>x\}=\mathsf{P}\{Z_n>x,W_n<-x\}\le\mathsf{P}\{Z_n>x\}+\mathsf{P}\{W_n<-x\}.$$

Завдяки симетрії в.в. ε_j, $\mathsf{P}\{W_n<-x\}=\mathsf{P}\{Z_n>x\}$.

Таким чином

$$\mathsf{E}(Z_n^*)^\beta=\beta\int_0^\infty x^{\beta-1}\,\mathsf{P}\{Z_n^*>x\}\,dx\le 2\beta\int_0^\infty x^{\beta-1}\,\mathsf{P}\{Z_n>x\}\,dx=2\beta\,\mathsf{E}(Z_n)_+^\beta, \tag{19}$$

тут і далі для будь-якого $x\in\mathbf{R}^1$ будемо позначати

$$x_+=\max(x,0),\qquad x_-=\max(-x,0).$$

Якщо $F\in D(\Phi_\alpha)$ і $\beta<\alpha$, то [8]

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\left(\frac{Z_n}{\gamma_n}\right)_+^\beta=\int_0^\infty x^\beta\,d\Phi_\alpha(x)<+\infty. \tag{20}$$

Беручи до уваги (19) і (20), отримуємо із (18)

$$\mathsf{E}\left|\frac{\hat{Z}_n-Z_n}{\gamma_n}\right|^\beta=O\left(n^{-\beta/2}\right). \tag{21}$$

Оскільки в умовах теореми 1 в.в. Z_n задовольняє рівність (12), то і для $\hat{Z}_n$ вона очевидно буде виконуватись. □

При справедливості умови (10) неважко знайти асимптотику нормуючої константи γ_n. Дійсно, оскільки $1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $x > 1$, де $L(x)$ — повільно змінна на нескінченності функція (п.з.ф.), то за (11) величина γ_n є розв'язком рівняння

$$\gamma_n^{-\alpha}L(\gamma_n) = \frac{1}{n}, \quad \text{або} \quad \gamma_n^{\alpha}L_1(\gamma_n) = n,$$

де $L_1(x) = L(x)^{-1}$. Розглянемо функцію $U_1(x) = x^{\alpha}L_1(x)$. Відомо (див. [9, с.27, твердження 5]), що існує п.з.ф. $L_2(x)$ така, що

$$U_1(U_2(x)) \sim U_2(U_1(x)) \sim x, \quad x \to \infty,$$

де $U_2(x) = x^{1/\alpha}L_2(x)$. Тоді при $n \to \infty$

$$n^{1/\alpha}L_2(n) = U_2(n) = U_2(U_1(\gamma_n)) \sim \gamma_n. \tag{22}$$

Приклад 1 ([3, с. 64–65], [4, с. 34])**.** Нехай (ε_j) мають розподіл Коші, тобто $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$. Неважно перевірити, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-1},$$

а отже для $\hat{Z}_n/\gamma_n$ граничним є розподіл Φ_1, заданий рівністю (8). Отримуємо далі

$$1 - F(\gamma_n) = \frac{1}{n}, \qquad \gamma_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = nL_2(n),$$

$$L_2(x) = \frac{1}{x\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)} \sim \frac{1}{\pi}.$$

Таким чином, можемо взяти $\gamma_n = n/\pi$.

Покладемо $\hat{Z}_n^* = \max_{1\le j\le n}|\hat{\varepsilon}_j|$. Тоді вірна

Теорема 2. *В умовах теореми 1*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\hat{Z}_n^*}{\gamma_n} < x\right\} = \Phi_\alpha^2(x), \qquad x \in \mathbf{R}^1, \tag{23}$$

Доведення теореми 2. Позначимо $u_n = \gamma_n x$. Тоді

$$nF(-u_n) = n(1 - F(u_n)) = \frac{1 - F(u_n)}{1 - F(\gamma_n)} \to x^{-\alpha}, \qquad n \to \infty.$$

Тут скористаємось теоремою 1.8.2 ([4, с.40]): при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{Z_n^* < u_n\} = \mathsf{P}\{Z_n < u_n, W_n > -u_n\} \to \Phi_\alpha^2(x).$$

Для отримання (23) залишається записати нерівність

$$|Z_n^* - \hat{Z}_n^*| \le \max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j|$$

і повторити міркування із доведення теореми 1. □

Зауваження 1. Очевидно, теореми 1 і 2 залишаються вірними, якщо замість умови (4) виконується слабкіша умова

$$(iii) \qquad \lim_{n\to\infty} d_{in}^{-1} \max_{1\le j\le n}|x_{ji}| = 0, \qquad i = 1, \dots, q. \tag{24}$$

Однак, умова (i) надає можливість оцінити швидкість збіжності величин

$$\mathsf{E}\left(\frac{|\hat{Z}_n - Z_n|}{\gamma_n}\right)^\beta, \qquad \mathsf{E}\left(\frac{|\hat{Z}_n^* - Z_n^*|}{\gamma_n}\right)^\beta$$

до нуля.

Розглянемо модель простої лінійної регресії

$$y_j = \theta_1 + \theta_2 x_j + \varepsilon_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{25}$$

де ε_j — незалежні однаково розподілені в.в.

Оскільки модель (25) є частинний випадок моделі (1), то для простої регресії вірні теореми 1, 2, якщо виконуються переписані для (25) умови (ii) та, скажімо, (iii). Для моделі (25)

$$d_{1n}^2 = n, \quad d_{2n}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad v_n = n^{-1/2} d_{2n}^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & v_n \\ v_n & 1 \end{pmatrix},$$

і тому (ii) виконується, якщо $|v_n| \le 1 - \delta$ для деякого $\delta > 0$. В свою чергу, (iii) перетворюється на умову $\lim_{n\to\infty} d_{2n}^{-1} \max_{1\le j\le n} |x_j| = 0$.

З іншого боку, можна дати пряме доведення теорем 1, 2 для моделі (25). При цьому вдається ще трохи послабити наведені вище умови. О.н.к. невідомих параметрів (θ_1, θ_2) задаються формулами

$$\hat\theta_{2n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)(y_j - \bar y)}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2}, \qquad \hat\theta_{1n} = \bar y - \hat\theta_{2n}\bar x,$$

$$\bar x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad \bar y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Зараз $\hat y_j = \hat\theta_{1n} + \hat\theta_{2n} x_j$. Зміст інших позначень не змінюється.

Теорема 3. *Нехай в.в.* ε_j *в моделі* (25) *симетрично розподілені, їх ф.р.* $F \in D(\Phi_\alpha)$ *для деякого* $\alpha \in (0, 2]$ *і*

$$\frac{\max_{1\le j\le n} |x_j|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2}} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{26}$$

Тоді виконуються співвідношення (12) *і* (23).

Доведення теореми 3. Оскільки

$$\hat\varepsilon_j = y_j - \hat y_j = (\theta_1 - \hat\theta_{1n}) + (\theta_2 - \hat\theta_{2n})x_j + \varepsilon_j,$$

то

$$|Z_n - \hat Z_n| \le \max_{1\le j\le n} |\varepsilon_j - \hat\varepsilon_j| \le |\theta_1 - \hat\theta_{1n}| + |\theta_2 - \hat\theta_{2n}| \max_{1\le j\le n} |x_j|.$$

Оцінимо величину $|\theta_2 - \hat\theta_{2n}|$. Ясно, що $y_j - \bar y = \theta_2(x_j - \bar x) + \varepsilon_j - \bar\varepsilon$, де $\bar\varepsilon = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$. Тому

$$\hat\theta_{2n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)(\theta_2(x_j - \bar x) + \varepsilon_j - \bar\varepsilon)}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2} = \theta_2 + \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)\varepsilon_j}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2}. \tag{27}$$

Нехай $0 < \beta < \alpha$. За лемою 1 та рівністю (27) маємо

$$\mathsf{E}\,|\theta_2 - \hat\theta_{2n}|^\beta \le \mathsf{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2\varepsilon_j^2}{(\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2)^2}\right)^{\beta/2} \le \frac{\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|^\beta}{(\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2)^{\beta/2}}. \tag{28}$$

Враховуючи співвідношення (19), (20), (26) та (28), одержуємо

$$\mathsf{E}\left|\frac{\theta_2 - \hat\theta_{2n}}{\gamma_n}\right|^\beta \max_{1\le j\le n}|x_j|^\beta \le C\left(\frac{\max_{1\le j\le n}|(x_j|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar x)^2}}\right)^\beta \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{29}$$

Залишається оцінити $|\theta_1 - \hat\theta_{1n}|$:

$$|\theta_1 - \hat\theta_{1n}| = |\theta_1 - (\bar y - \hat\theta_{2n}\bar x)| \le |\theta_2 - \hat\theta_{2n}| \cdot |\bar x| + |\bar\varepsilon|.$$

Оскільки $|\bar x| \le \max_{1\le j\le n}|x_j|$, то із (29) випливає збіжність до нуля величини

$$\mathsf{E}\left|\frac{(\theta_2 - \hat\theta_{2n})\bar x}{\gamma_n}\right|^\beta, \qquad n \to \infty.$$

З іншого боку, якщо $0 < \beta < \alpha \le 1$, то за (22)

$$\mathsf{E}\left(\frac{|\bar{\varepsilon}|}{\gamma_n}\right)^{\beta} \le \frac{n^{1-\beta}\,\mathsf{E}\,|\varepsilon_1|^{\beta}}{\gamma_n^{\beta}} = \frac{\mathsf{E}\,|\varepsilon_1|^{\beta}}{L_2^{\beta}(n)}\frac{1}{n^{\beta/\alpha+\beta-1}}.$$

Величина $\beta/\alpha + \beta - 1 > 0$, якщо $\beta > \alpha/(1+\alpha)$, і для таких β

$$\mathsf{E}\,(|\bar{\varepsilon}|/\gamma_n)^{\beta} \to 0$$

при $n \to \infty$.

У випадку $1 \le \beta < \alpha \le 2$ і $n \to \infty$ за законом великих чисел $\bar{\varepsilon} \to 0$ м.н., отже співвідношення (12) доведено. Доведення (23) вже не викликає труднощів. □

Зауваження 2. Нехай виконується умова (iii) і $v_n^2 \ge 1 - \delta$, $\delta > 0$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = d_{2n}^2(1 - v_n^2) \ge \delta d_{2n}^2,$$

$$\frac{\max_{1\le j\le n}|(x_j|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}} \le \delta^{-1/2} d_{2n}^{-1}\max_{1\le j\le n}|(x_j| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким чином, ми бачимо, що умова (26) слабкіша за умови (ii), (iii).

Розглянемо випадок несиметричного розподілу похибок спостережень (ε_j). Зрозуміло, що тут доведеться накладати певні умови на лівий хвіст розподілу в.в. (ε_j).

Теорема 4. *Нехай в.в.* ε_j *в моделі* (1) *мають ф.р.* $F(x)$, *яка задовольняє умову* (10) *для деякого* $\alpha \in [1, 2]$, $\mathsf{E}\,\varepsilon_j = 0$, $\mathsf{E}\,\varepsilon_j^2 = \infty$. *Нехай також виконуються умови (i), (ii). Тоді справедлива рівність* (12), *якщо* $1 \le \alpha < 2$ *або якщо* $\alpha = 2$ *і для деякого* $\beta > 1$

$$\mathsf{E}(\varepsilon_j)_-^{\beta} < \infty. \tag{30}$$

Доведення теореми 4. Аналіз отримання оцінки (18) теореми 1 показує, що симетричність в.в. ε_j використовувалась лише при застосуванні леми 1. Але при умові $\mathsf{E}\,\varepsilon_j = 0$ та $\beta \ge 1$ лема 1 залишається вірною і в несиметричному випадку (нерівність Марцинцевича-Зигмунда). Таким чином, оцінка (18) справедлива і в умовах теореми 4 при $\beta \ge 1$.

Припустимо, що $1 \le \alpha < 2$ та виберемо $\beta = 1$. Тоді нерівність (18) запишеться так:

$$\mathsf{E}\,|\hat{Z}_n - Z_n| \le (q!)\lambda_0^{-q}\left(\sum_{i=1}^{q} k_i\right)\left(\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|\right) n^{-1/2}. \tag{31}$$

Враховуючи (22), маємо

$$\frac{\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|}{\gamma_n} \le \frac{n\,\mathsf{E}\,|\varepsilon_1|}{\gamma_n} = \frac{\mathsf{E}\,|\varepsilon_1|}{L_2(n)n^{1/\alpha-1}}.$$

Звідси та оцінки (31) отримуємо при $n \to \infty$

$$\frac{\mathsf{E}\,|\hat{Z}_n - Z_n|}{\gamma_n} \le C\frac{\mathsf{E}\,|\varepsilon_1|}{L_2(n)n^{1/\alpha+1/2-1}} \to 0.$$

Із останнього співвідношення так само, як і в теоремі 1, випливає рівність (12).

Залишається розглянути випадок $\alpha = 2$. Виберемо $1 < \beta < 2$ таке, щоб виконувалась умова (30). Тоді із (18) одержуємо

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{E}\,|\hat{Z}_n - Z_n|^{\beta}}{\gamma_n^{\beta}} &\le C\frac{\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}|\varepsilon_j|^{\beta}}{\gamma_n^{\beta}}n^{-\beta/2}\\ &\le C\frac{\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}(\varepsilon_j)_-^{\beta} + \mathsf{E}\max_{1\le j\le n}(\varepsilon_j)_+^{\beta}}{\gamma_n^{\beta}}\,n^{-\beta/2}.\end{aligned} \tag{32}$$

Згідно з рівністю (20) при $n \to \infty$

$$\frac{\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}(\varepsilon_j)_+^{\beta}}{\gamma_n^{\beta}}\, n^{-\beta/2} \to 0. \tag{33}$$

І далі

$$\frac{\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}(\varepsilon_j)_-^{\beta}}{\gamma_n^{\beta}}\, n^{-\beta/2} \le \frac{n\,\mathsf{E}(\varepsilon_1)_-^{\beta}}{n^{\beta}L_2^{\beta}(n)} \to 0. \tag{34}$$

Разом співвідношення (32)–(34) і завершують доведення теореми 4. □

Розглянемо приклад застосування наведених результатів. Припустимо, що в умовах моделі простої лінійної регресії (25) ми хочемо перевірити гіпотезу:

$$H_0 = \{F \text{ є розподіл Коші}\}$$

при альтернативах:

$$H_1^+ = \{F \in D(\Phi_\alpha), \alpha > 1\}, \qquad H_1^- = \{F \in D(\Phi_\alpha), \alpha < 1\}.$$

Якщо (x_i) задовольняють умови теореми **3**, то приходимо до наступного критерію.

Вибираємо в якості статистики $T_n = \pi \hat{Z}_n^*/n$. При заданому рівні значущості δ відповідні критичні області задаються так:

$$K^+ = \{x\colon 0 < x < U_{\delta/2}\}, \qquad K^- = \{x\colon U_{1-\delta/2} < x\}, \qquad K = K^+ \cup K^-,$$

де U_p — квантилі рівня p розподілу $\Phi_1^2(x)$. Наприклад, для $\delta = 0.05$

$$K^+ = (0, \frac{2}{\ln(2/\delta)}) \approx (0, 0.54), \qquad K^- = \left(\frac{2}{\ln(1/(1-\delta/2)}, \infty\right) \approx (79.0, \infty)$$

(на перший погляд допустима область $R^1 \setminus K$ здається занадто великою, але треба врахувати ту обставину, що розподіл $\Phi_1^2(x)$ має важкий хвіст справа).

Тоді, якщо $T_n \in \mathbf{R}^1 \setminus K$, то гіпотеза H_0 приймається,

якщо $T_n \in K^+$, то приймається H_1^+,

якщо $T_n \in K^-$, то приймається H_1^-.

Література

1. О. В. Іванов, І. К. Мацак, *Граничні теореми для екстремальних залишків у лінійній та нелінійній моделях регресії*, Теорія ймовірн. та мат. статист. **86** (2012), 69–80.
2. B. V. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire*, Ann. Math. **44** (1943), 423–453.
3. Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, "Наука", Москва, 1984.
4. М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен, *Экстемумы случайных последовательностей и процессов*, "Мир", Москва, 1989.
5. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1972.
6. Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, *Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия*, УМН **50** (1995), № 3, 3–62.
7. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, "Мир", Москва, 1967.
8. J. Pickands, *Moment convergence of sample extremes*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), № 3, 881–889.
9. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, "Наука", Москва, 1985.

Національний технічний університет "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги, 37, Київ 03056

Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127

Адреса електронної пошти: mik@unicyb.kiev.ua

Надійшла 17/07/2012