Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 90, 2014, стор. 113–122

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 90, 2014, pp. 113–122

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

УДК 519.21

А. В. ЛОГАЧЁВ

Аннотация. В работе доказан принцип больших уклонений для последовательности процессов $\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s))\,ds + \frac{1}{\varphi(n)}\int_0^t \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s)$, в предположении, что существуют интегральные средние у функций $\frac{b(x)}{\sigma^2(x)}$ и $\frac{1}{\sigma^2(x)}$. Найден функционал действия.

Анотація. У роботі доведено принцип великих відхилень для послідовності процесів $\eta_n(t) = x_0+\int_0^t b(n\eta_n(s))\,ds+\frac{1}{\varphi(n)}\int_0^t \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s)$, за умови, що існують інтегральні середні для функцій $\frac{b(x)}{\sigma^2(x)}$ та $\frac{1}{\sigma^2(x)}$. Знайдено функціонал дії.

Abstract. The large deviation principle for the sequence of stochastic processes

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s))\,ds + \frac{1}{\varphi(n)}\int_0^t \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s)$$

is proved provided integral averages of functions $\frac{b(x)}{\sigma^2(x)}$ and $\frac{1}{\sigma^2(x)}$ exist. The rate functional is obtained.

1. Вступление

Статья посвящена вопросу о больших уклонениях для заданной на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathsf{P})$ последовательности решений стохастических уравнений

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s))\,ds + \frac{1}{\varphi(n)}\int_0^t \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s), \tag{1}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, $b(x)$ и $\sigma(x)$ — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям $\exists\lambda > 1$:

$$\frac{1}{\lambda} \le \sigma^2(x) \le \lambda, \qquad |b(x)| \le \lambda, \tag{2}$$

$n \in N$, $t \in [0,1]$, $\varphi(n)$ положительная монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$.

Известны результаты о больших уклонениях для случая когда коэффициенты $b(x)$ и $\sigma(x)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми периодическими функциями [1] или выполнено условие (M) работы [2]. Мы не будем требовать от функций $b(x)$ и $\sigma(x)$ ни гладкости, ни периодичности и покажем, что при предположении (2) для обоснования принципа больших уклонений достаточно существования у них интегральных средних. Метод доказательства отличен от метода, предложенного в [2]. При этом оказывается, что порядок роста функции $\varphi(n)$ при $n \to \infty$ зависит от поведения интегралов от коэффициентов уравнения.

Отметим, что принцип больших уклонений для некоторых других типов случайных процессов обосновывается в работах [8], [9].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10, 60F17.

Ключевые слова и фразы. Большие уклонения, функционал действия, стохастическое дифференциальное уравнение.

Работа построена по следующему плану. Во втором разделе доказывается теорема о больших уклонениях для последовательности (1), в третьем разделе приводятся примеры.

Для метрического пространства (X,ρ) через $\mathbf{B}(X,\rho)$ обозначим борелевскую σ-алгебру его множеств. Напомним [3, стр. 111], что семейство вероятностных мер P_n на пространстве (X,ρ) удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $S(x)$ и нормирующей функцией $\psi(n)$ если $\psi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и выполнены следующие условия:

i) для любого $c>0$ множество $\Phi(x)=\{x\colon S(x)\le c\}$ компактно,

ii) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(n)}\ln\mathsf{P}_n(F)\le -S(F)$ для любого замкнутого множества

$$F\in\mathbf{B}(X,\rho),$$

iii) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(n)}\ln\mathsf{P}_n(G)\ge -S(G)$, для любого открытого множества

$$G\in\mathbf{B}(X,\rho),$$

где $S(A)=\inf_{x\in A}S(x)$.

Для функций определенных на отрезке $[0,1]$ будем использовать следующие обозначения: $C[0,1]$ — пространство непрерывных функций, $AC_{x_0}[0,1]$ — множество абсолютно непрерывных функций $x(t)$, таких, что $x(0)=x_0$.

Для множеств будем использовать обозначения: $I(A)$ — индикатор множества A, $\overline{A}$ — дополнение к множеству A. Обозначим через $[a]$ и $\{a\}$ соответственно целую и дробною часть числа a.

2. Принцип больших уклонений

На пространстве $C[0,1]$ рассмотрим метрику

$$\rho(x,y)=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия*

1)
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{\sigma^2(x)}\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^0\frac{1}{\sigma^2(x)}\,dx=1/a,$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{b(x)}{\sigma^2(x)}\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^0\frac{b(x)}{\sigma^2(x)}\,dx=B,$$

2) *для любого* $c>0$
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|u|\le c}\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\left|\int_0^{un}\theta_1(s)\,ds\right|+\left|\int_0^{un}\theta_2(s)\,ds\right|}=0,$$

где
$$\theta_1(s)=\frac{(b(s)-Ba)}{\sigma^2(s)},\qquad \theta_2(s)=1-\frac{a}{\sigma^2(s)}.$$

Тогда семейство мер $\mathsf{P}_n(A)=\mathsf{P}\{\eta_n(\cdot)\in A\}$, $A\in\mathbf{B}(C[0,1],\rho)$ *удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве* $(C[0,1],\rho)$ *с нормирующей функцией* $\psi(n)=\varphi^2(n)$ *и функционалом действия*

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}\int_0^1(\dot{x}(t)-Ba)^2\,dt, & \text{если } x(\cdot)\in AC_{x_0}[0,1],\\ +\infty, & \text{в противном случае.}\end{cases}\tag{3}$$

Эта теорема доказывается ниже после доказательства вспомогательных утверждений.

Лемма 1 ([4, теорема 5 стр. 172])**.** *Рассмотрим непрерывный мартингал*

$$x(t) = \int_0^t g(s,\omega)\, dw(s),$$

заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathsf{P})$.

Пусть $g(t,\omega)$ — $\mathfrak{F}_t$ *прогрессивно измеримый случайный процесс, удовлетворяющий условию* $\sup_{t\in[0,1]} g^2(t,\omega) \le \lambda$ *п.н. Тогда для любого* $c > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \ge c\right) \le 2\exp\left\{-\frac{c^2}{2\lambda}\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть случайный процесс* $x(t)$ *заданный на стохастическом базисе* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathsf{P})$ *имеет вид*

$$x(t) = \int_0^t g(\omega, y(s))\, dw(s),$$

где случайные процессы $g(\omega, y(t))$ *и* $y(t)$ *являются* $\mathfrak{F}_t$ *прогрессивно измеримыми,*

$$\mathsf{E}\int_0^1 g^2(\omega, y(s))\, ds < \infty.$$

Для произвольной положительной константы d *обозначим*

$$U_d = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]} |y(t)| \le d\right\}.$$

Пусть $\sup_{|y|\le d} g^2(y,\omega) \le \lambda$ *почти наверное. Тогда для любого* $c > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left\{\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \ge c\right\} \cap U_d\right) \le 2\exp\left\{-\frac{c^2}{2\lambda}\right\}.$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}\left(\left\{\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \ge c\right\} \cap U_d\right) = \mathsf{P}\left(I(U_d) \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s),\omega)\, dw(s)\right| \ge c\right).$$

Так как для любого $s \in [0,1]$

$$U_d \subseteq \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,s]} |y(t)| \le d\right\},$$

то

$$\begin{aligned}
&I(U_d) \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s,\omega),\omega)\, dw(s)\right| \\
&\quad \le I(U_d) \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s),\omega) I\left(\sup_{v\in[0,s]} |y(v)| \le d\right) dw(s)\right| \\
&\qquad + I(U_d) \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s),\omega) I\left(\sup_{v\in[0,s]} |y(v)| > d\right) dw(s)\right| \\
&\quad = I(U_d) \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s),\omega) I\left(\sup_{v\in[0,s]} |y(v)| \le d\right) dw(s)\right|.
\end{aligned}$$

Таким образом, почти наверное

$$I(U_d) \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s,\omega),\omega)\, dw(s)\right| \le \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g(y(s),\omega) I\left(\sup_{v\in[0,s]} |y(v)| \le d\right) dw(s)\right|.$$

Поэтому, применяя лемму 1, получаем

$$\mathsf{P}\left(\left\{\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|\geq c\right\}\cap U_d\right)$$
$$\leq \mathsf{P}\left(I(U_d)\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t g(y(s),\omega)I\left(\sup_{v\in[0,s]}|y(v)|\leq d\right)dw(s)\right|\geq c\right)$$
$$\leq \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t g(y(s),\omega)I\left(\sup_{v\in[0,s]}|y(v)|\leq d\right)dw(s)\right|\geq c\right)\leq 2\exp\left\{-\frac{c^2}{2\lambda}\right\}. \quad \square$$

В дальнейшем нам понадобится один результат из работы [5]. Сформулируем его. Рассмотрим, заданную на стохастическом базисе $(\Omega,\mathfrak{F},\mathfrak{F}_t,\mathsf{P})$ последовательность непрерывных семимартингалов $X_\varepsilon(t)$, $t\in[0,1]$:

$$X_\varepsilon(t)=x_0+\int_0^t b_\varepsilon(s)\,ds+\varepsilon^k\int_0^t \alpha_\varepsilon(s)\,dw(s),$$

где $b_\varepsilon(t)$ и $\alpha_\varepsilon(t)$ это $\mathfrak{F}_t$-согласованные случайные процессы с $\int_0^t|b_\varepsilon(s)|\,ds<\infty$ и $\int_0^t\alpha_\varepsilon^2(s)\,ds<\infty$ п.н., ε — малый параметр, k — положительное число.

Лемма 3 ([5, теорема A.1 стр. 52])**.** *Пусть* $0<c_1\leq\alpha_\varepsilon^2(s)\leq c_2$, $|b_\varepsilon(s)|\leq c_3$ *и существуют константы* $\mathbf{a}>0$ *и* $\mathbf{b}$ *такие, что для любого* $\delta>0$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{2k}\ln\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t(b_\varepsilon(s)-\mathbf{b})\,ds\right|>\delta\right)=-\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{2k}\ln\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t(\alpha_\varepsilon^2(s)-\mathbf{a})\,ds\right|>\delta\right)=-\infty.$$

Тогда семейство мер $\mathsf{P}_\varepsilon(A)=\mathsf{P}\{X_\varepsilon(\cdot)\in A\}$, $A\in\mathbf{B}(C[0,1],\rho)$ *удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве* $(C[0,1],\rho)$ *с нормирующей функцией* $1/\varepsilon^{2k}$ *и функционалом действия*

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\mathbf{a}}\int_0^1(\dot{x}(t)-\mathbf{b})^2\,dt, & \textit{если } x(\cdot)\in AC_{x_0}[0,1],\\ +\infty, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Замечание. Результат леммы 3 также может быть получен из [6, следствие 4.3.8 стр. 349]. Там сформулирован более общий результат в терминах теории идемпотентных мер и максингалов.

Доказательство теоремы. Обозначим φ^{-1} функцию обратную к монотонной функции φ. Если положить $\varepsilon_n=(1/\varphi(n))^{1/k}$, случайные процессы

$$b_{\varepsilon_n}(s)=b\left(\varphi^{-1}\left(1/\varepsilon_n^k\right)\eta_n(s)\right),\qquad \alpha_{\varepsilon_n}(s)=\sigma\left(\varphi^{-1}\left(1/\varepsilon_n^k\right)\eta_n(s)\right),$$

то из леммы 3 будет следовать, что нам достаточно проверить следующие условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}\ln\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t(b(n\eta_n(s))-aB)\,ds\right|>\varepsilon\right)=-\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}\ln\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t(\sigma^2(n\eta_n(s))-a)\,ds\right|>\varepsilon\right)=-\infty. \tag{5}$$

Покажем, что выполнено условие (4). Обозначим

$$H_1(x)=\int_0^x\int_0^r\theta_1(s)\,ds\,dr.$$

Применив формулу Ито к функции $H_1(n\eta_n(t))$ получим

$$\begin{aligned} H_1(n\eta_n(t)) = H_1(nx_0) &+ n\int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r)\,dr\right) b(n\eta_n(s))\,ds \\ &+ \frac{n^2}{2\varphi^2(n)}\int_0^t (b(n\eta_n(s)) - aB)\,ds \\ &+ \frac{n}{\varphi(n)}\int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r)\,dr\right) \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s). \end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\int_0^t (b(n\eta_n(s)) - aB)\,ds = \frac{2\varphi^2(n)}{n^2}H_1(n\eta_n(t)) - \frac{2\varphi^2(n)}{n^2}H_1(nx_0) - Y_n^1(t) - Y_n^2(t), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} Y_n^1(t) &= \frac{2\varphi^2(n)}{n}\int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r)\,dr\right) b(n\eta_n(s))\,ds, \\ Y_n^2(t) &= \frac{2\varphi(n)}{n}\int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r)\,dr\right) \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s). \end{aligned} \tag{8}$$

Оценим слагаемые. Имеем,

$$\begin{aligned} \left|\frac{2\varphi^2(n)}{n^2}H_1(n\eta_n(t))\right| &= \frac{2\varphi^2(n)}{n}\left|\int_0^{\eta_n(t)}\int_0^{nu}\theta_1(s)\,ds\,du\right| \\ &\le \sup_{t\in[0,1]}|\eta_n(t)|\frac{2\varphi^2(n)}{n}\sup_{|u|\le \sup_{t\in[0,1]}|\eta_n(t)|}\left|\int_0^{nu}\theta_1(s)\,ds\right|. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично,

$$\left|\frac{2\varphi^2(n)}{n^2}H_1(nx_0)\right| = \frac{2\varphi^2(n)}{n}\left|\int_0^{x_0}\int_0^{nu}\theta_1(s)\,ds\,du\right| \le \sup_{|u|\le|x_0|}\frac{2\varphi^2(n)|x_0|}{n}\left|\int_0^{nu}\theta_1(s)\,ds\right|. \tag{10}$$

Используя условия (2) получаем

$$\begin{aligned} |Y_n^1(t)| &= \left|\frac{2\varphi^2(n)}{n}\int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r)\,dr\right) b(n\eta_n(s))\,ds\right| \\ &\le \frac{2\varphi^2(n)\lambda}{n}\sup_{|u|\le \sup_{t\in[0,1]}|\eta_n(t)|}\left|\int_0^{nu}\theta_1(s)\,ds\right|. \end{aligned} \tag{11}$$

Для $c > |x_0| + \lambda$ обозначим

$$B_c = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]}|\eta_n(t)| > c\right\}.$$

Применив лемму 1 будем иметь

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(B_c) &= \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s))\,ds + \frac{1}{\varphi(n)}\int_0^t \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s)\right| > c\right) \\ &\le \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\varphi(n)}\int_0^t \sigma(n\eta_n(s))\,dw(s)\right| > c - |x_0| - \lambda\right) \\ &\le 2\exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)(c-|x_0|-\lambda)^2}{2\lambda}\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$D_\delta = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]} |Y_n^2(t)| > \delta\right\} \cap \overline{B}_c,$$

$$J_{n,c} = \sup_{|u|\le c} \left| \int_0^{nu} \theta(r)\,dr \right|.$$

Используя лемму 2 и (8) получаем

$$\mathsf{P}(D_\delta) \le 2\exp\left\{-\frac{n^2\delta^2}{8\varphi^2(n)\lambda J_{n,c}^2}\right\}.$$

Из условия 2 теоремы следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^4(n)}{n^2} J_{n,c}^2 = 0,$$

поэтому для любого $\delta > 0$ существует $n(\delta, c, \lambda)$: $\forall n > n(\delta, c, \lambda)$

$$-\frac{n^2\delta^2}{8\varphi^2(n)\lambda J_{n,c}^2} = -\frac{\varphi^2(n)\delta^2}{8\lambda \frac{\varphi^4(n)}{n^2} J_{n,c}^2} < -\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda}. \tag{13}$$

Обозначим

$$K_1^\delta = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(n\eta_n(t))\right| > \delta\right\}, \qquad K_2^\delta = \left\{\omega\colon \left|\frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(nx_0)\right| > \delta\right\},$$

$$K_3^\delta = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]} |Y_n^1(t)| > \delta\right\}, \qquad A_\varepsilon = \left\{\omega\colon \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t (b(n\eta_n(s)) - Ba)\,ds\right| > \varepsilon\right\}.$$

Используя (7) и оценки (9)–(13), учитывая условие 2 теоремы при достаточно больших n будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_\varepsilon) &\le \mathsf{P}(A_\varepsilon \cap \overline{B}_c) + \mathsf{P}(B_c) \\
&\le \mathsf{P}\left(\left(K_1^{\varepsilon/4} \cup K_2^{\varepsilon/4} \cup K_3^{\varepsilon/4} \cup D_{\varepsilon/4}\right) \cap \overline{B}_c\right) + \mathsf{P}(B_c) \\
&\le \mathsf{P}\left(\frac{2c\varphi^2(n)}{n} \sup_{|u|\le c} \left|\int_0^{nu} \theta(s)\,ds\right| \ge \frac{\varepsilon}{4}\right) \\
&\quad + \mathsf{P}\left(\frac{2\varphi^2(n)|x_0|}{n} \sup_{|u|\le |x_0|} \left|\int_0^{nu} \theta(s)\,ds\right| \ge \frac{\varepsilon}{4}\right) \\
&\quad + \mathsf{P}\left(\frac{2\varphi^2(n)\lambda}{n} \sup_{|u|\le c} \left|\int_0^{nu} \theta_1(s)\,ds\right| \ge \frac{\varepsilon}{4}\right) + 2\exp\left\{-\frac{n^2\varepsilon^2}{128\varphi^2(n)\lambda J_{n,c}^2}\right\} \\
&\quad + 2\exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda}\right\} \\
&\le 4\exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda}\right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Используя (14) для любого $c > |x_0| + \lambda$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathsf{P}(A_\varepsilon) \le -\frac{(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda}.$$

Перейдя к пределу при $c \to +\infty$ получим (4).

Если рассмотреть функцию

$$H_2(x) = \int_0^x \int_0^r \theta_2(s)\,ds\,dr$$

и применить формулу Ито к процессу $H_2(n\eta_n(t))$, то проделав рассуждения полностью аналогичные вышеизложенным получим (5). $\square$

Замечание. Если функции $b(x)$, $\sigma(x)$ ограниченные и периодические с периодом T, то

$$\int_0^{nT} \theta_i(s)\, ds = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Откуда следует, что найдется такая константа $l > 0$, что для всех $u \in \mathbf{R}$

$$\left| \int_0^{un} \theta_i(s)\, ds \right| \le l.$$

Поэтому условие 2 теоремы будет выполнено, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

то есть будет таким же как в работе [1].

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$, определяемую решениями стохастических уравнений

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_0^t b(|n\xi_n(s)|^\gamma)\, ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(|n\xi_n(s)|^\gamma)\, dw(s), \tag{15}$$

где функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ периодические с периодом 1. Будем считать выполненным условие (2). Обозначим

$$\int_0^1 \frac{1}{\sigma^2(x)}\, dx = 1/a, \qquad \int_0^1 \frac{b(x)}{\sigma^2(x)}\, dx = B.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия*

$$\gamma > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\min(\gamma/2, 1/2)}} = 0.$$

Тогда семейство мер, порожденное решениями (15) *на пространстве* $(C[0,1], \rho)$ *удовлетворяет принципу больших уклонений с нормирующей функцией* $\psi(n) = \varphi^2(n)$ *и функционалом действия*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\int_0^1 (\dot x(t) - Ba)^2\, dt, & \textit{если } x(\cdot) \in AC_{x_0}[0,1], \\ +\infty, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Будем использовать доказанную выше теорему. Покажем, что выполнено условие 1 теоремы. Так как $\sigma(|x|^\gamma)$ и $b(|x|^\gamma)$ функции четные и ограниченные, то достаточно показать, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T \frac{1}{\sigma^2(x^\gamma)}\, dx = 1/a, \tag{16}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T \frac{b(x^\gamma)}{\sigma^2(x^\gamma)}\, dx = B. \tag{17}$$

Докажем (16). Используя замену переменной $y = x^\gamma$ получаем

$$\int_1^T \frac{1}{\sigma^2(x^\gamma)}\, dx = \frac{1}{\gamma} \int_1^{T^\gamma} \frac{y^{1/\gamma - 1}}{\sigma^2(y)}\, dy.$$

Обозначим

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^2(x)}\, dx.$$

Так как функция $\frac{1}{\sigma^2(x)}$ периодическая с периодом 1, то

$$F(y)-\frac{1}{a}y=\int_0^y\left(\frac{1}{\sigma^2(x)}-\frac{1}{a}\right)dx=\int_0^{\{y\}}\frac{1}{\sigma^2(x)}\,dx-\frac{1}{a}\{y\}.$$

Используя условия наложенные на $\sigma(x)$ и неравенство $1/a\le\lambda$ получим оценку

$$\frac{1}{a}y-\lambda\{y\}\le F(y)\le\frac{1}{a}y+\lambda\{y\}. \tag{18}$$

Применяя формулу интегрирования по частям получаем для $T\ge 1$

$$\frac{1}{\gamma}\int_1^{T^\gamma}\frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)}\,dy=\frac{T^{1-\gamma}}{\gamma}F(T^\gamma)-\frac{1}{a\gamma}-\frac{1-\gamma}{\gamma^2}\int_1^{T^\gamma}y^{1/\gamma-2}F(y)\,dy,$$

откуда используя оценку (18) и неравенство $1/a\le\lambda$ получаем для $T\ge 1$

$$\frac{T}{a}-\frac{2\lambda}{\gamma}(T^{1-\gamma}+1)\le\frac{1}{\gamma}\int_1^{T^\gamma}\frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)}\,dy\le\frac{T}{a}+\frac{2\lambda}{\gamma}(T^{1-\gamma}+1). \tag{19}$$

Используя оценку (19) получаем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T\frac{1}{\sigma^2(x^\gamma)}\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\gamma}\int_1^{T^\gamma}\frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)}\,dy=1/a.$$

Формула (16) доказана. Полностью аналогично доказывается (17).

Покажем, что выполнено условие 2 теоремы. Используя оценку (19) и предположение о функции $\sigma^2(x)$ получаем для $|un|\in[0,1)$

$$-1-a\lambda\le\int_0^{|un|}\left(1-\frac{a}{\sigma^2(x^\gamma)}\right)dx\le 1+a\lambda, \tag{20}$$

для $|un|\ge 1$

$$-1-a\lambda-\frac{2\lambda a}{\gamma}-\frac{2a|un|^{1-\gamma}\lambda}{\gamma}\le\int_0^{|un|}\left(1-\frac{a}{\sigma^2(x^\gamma)}\right)dx\le 1+a\lambda+\frac{2\lambda a}{\gamma}+\frac{2a|un|^{1-\gamma}\lambda}{\gamma}. \tag{21}$$

Так как функция $\sigma(|x|^\gamma)$ четная, $a\le\lambda$, то из (20), (21) следует, что

$$\left|\int_0^{un}\theta_2(x)\,dx\right|=\left|\int_0^{|un|}\left(1-\frac{a}{\sigma^2(|x|^\gamma)}\right)dx\right|\le 1+\frac{\lambda^2(2+\gamma)}{\gamma}+\frac{2\lambda^2|un|^{1-\gamma}}{\gamma}I(|un|\ge 1). \tag{22}$$

Проделав рассуждения полностью аналогичные вышеизложенным получим аналогичную оценку для $\int_0^{un}\frac{(b(|x|^\gamma)-Ba)}{\sigma^2(|x|^\gamma)}\,dx$:

$$\left|\int_0^{un}\frac{(b(|x|^\gamma)-Ba)}{\sigma^2(|x|^\gamma)}\,dx\right|\le\frac{\lambda^4(2\gamma+5)}{\gamma}+\frac{6\lambda^4|un|^{1-\gamma}}{\gamma}I(|un|\ge 1). \tag{23}$$

Из (22), (23) и условий леммы имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sup_{|u|\le c}\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\left|\int_0^{un}\theta_1(s)\,ds\right|+\left|\int_0^{un}\theta_2(s)\,ds\right|}\\
&\le\lim_{n\to\infty}\sup_{|u|\le c}\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\lambda^4(4\gamma+7)}{\gamma}+\frac{8\lambda^4|un|^{1-\gamma}I(|un|\ge 1)}{\gamma}}\\
&\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\lambda^4(4\gamma+15)}{\gamma}}I(\gamma\ge 1)+\frac{\varphi(n)}{n^{\gamma/2}}\sqrt{\frac{9\lambda^4c^{1-\gamma}}{\gamma}}I(0<\gamma<1)\right)\\
&=0.
\end{aligned}$$

□

3. Примеры

Приведем несколько модельных примеров.

1.

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sqrt{2 + \frac{1}{1 + (n\eta_n(s))^2}}\, dw(s),$$

в этом случае $a = 2$,

$$\theta_2(s) = \frac{1}{2s^2 + 3}, \qquad \left| \int_0^{un} \theta_2(s)\, ds \right| \le \frac{\pi}{4\sqrt{6}},$$

условие 2 теоремы будет выполнено, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

Функционал действия имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\int_0^1 \dot{x}^2(t)\, dt, & \text{если } x(\cdot) \in AC_0[0,1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что так как последовательность функций

$$\sqrt{2 + \frac{1}{1 + (nx)^2}}$$

не сходится равномерно на компактах, то результат примера 1 не следует из [7, теорема 3.2.1 и замечание 2 стр. 74].

2. Почти периодический коэффициент диффузии.

$$\eta_n(t) = \int_0^t (1 + \cos(n\eta_n(s)))\, ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \frac{dw(s)}{\sqrt{3 + \sin(n\eta_n(s)) + \sin(\pi n\eta_n(s))}},$$

в этом случае $a = 1/3$, $B = 3$,

$$\theta_1(s) = 3\cos(s) + \cos(s)\sin(s) + \cos(s)\sin(\pi s), \qquad \theta_2(s) = -\frac{1}{3}(\sin(s) + \sin(\pi s)).$$

$$\sup_{u\in\mathbf{R}} \left| \int_0^{un} \theta_1(s)\, ds \right| \le 5, \qquad \sup_{u\in\mathbf{R}} \left| \int_0^{un} \theta_2(s)\, ds \right| \le \frac{8}{9},$$

условие 2 теоремы выполнено, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

функционал действия равен

$$S(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\int_0^1 (\dot{x}(t) - 1)^2\, dt, & \text{если } x(\cdot) \in AC_0[0,1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3.

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \frac{dw(s)}{2 + \cos\bigl(2\pi\sqrt{|n\xi_n(s)|}\,\bigr)},$$

в этом случае $a = 2/9$, $\gamma = 1/2$.

Из леммы 4 следует, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt[4]{n}} = 0,$$

то функционал действия равен

$$S(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}\int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt, & \text{если } x(\cdot) \in AC_0[0,1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4. Разрывный коэффициент диффузии.

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \left(1 + \left\{n^2 \xi_n^2(s)\right\}\right) dw(s),$$

в этом случае $a = 2$, $\gamma = 2$, $\min(\gamma/2, 1/2) = 1/2$.

Из леммы 4 следует, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

то функционал действия равен

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt, & \text{если } x(\cdot) \in AC_0[0,1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Список литературы

1. M. I. Freidlin and R. B. Sowersb, *A comparison of homogenization and large deviations, with applications to wavefront propagation*, Stoch. Proc. App. **82** (1999), 23–52.
2. С. Я. Махно, *О больших уклонениях для решений стохастических уравнений*, Теор. вероятн. и применен. **40** (1995), № 4, 765–785.
3. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, “Наука”, Москва, 1979.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, “Наукова Думка”, Киев, 1982.
5. Р. Ш. Липцер, П. Чиганский, *Умеренные уклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде*, Теор. вероятн. и применен. **54** (2009), № 1, 39–62.
6. А. А. Пухальский, *Большие уклонения стохастических динамических систем*, “ФИЗМАТЛИТ”, Москва, 2005.
7. А. Д. Вентцель, *Предельные теоремы о больших укланениях для марковских случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1986.
8. I. В. Самойленко, *Великі відхилення для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації*, Теор. ймовір. та матем. статист. **85** (2011), 95–102.
9. Д. С. Будков, С. Я. Махно, *Закон повторного логарифма для решений стохастических уравнений*, Теор. ймовір. та матем. статист. **83** (2010), 39–48.

Отдел теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, ул. Р. Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина

Адрес электронной почты: omboldovskaya@mail.ru

Поступила 15/11/2012