Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 135–141

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 135–141

ПРО ОДНОЛІНІЙНУ СИСТЕМУ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВТРАТАМИ

УДК 519.21

І. К. МАЦАК

Анотація. Розглядається однолінійна СМО з втратами загального типу. Знаходяться стаціонарні ймовірності станів і установлюється центральна гранична теорема для часу перебування в станах.

Abstract. A one-line queueing system is considered with refuses of general type. Stationary probabilities are found and the central limit theorem for time of sojourn in states is established.

Аннотация. Рассматривается однолинейная СМО с потерями общего типа. Находятся стационарные вероятности состояний и устанавливается центральная граничная теорема для времени нахождения в состояниях.

Розглянемо систему масового обслуговування (СМО) з втратами на інтервалі $0 \le t < \infty$. Нехай $t_1, t_1, \dots, t_n, \dots$ — випадкові моменти надходження заявок в СМО. Припустимо, що $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n \ge 1$, — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу $F(x) = \mathsf{P}(\tau_n < x)$, $F(0+) = 0$. І нехай час обслуговування заявок η_n, $n \ge 1$, — також н.о.р.в.в., $G(x) = \mathsf{P}(\eta_n < x)$, $G(0+) = 0$.

Для пуассонівського потоку заявок відомі класичні формули Ерланга для стаціонарних ймовірностей станів m — лінійної СМО з втратами ([1]–[3]). У випадку довільного рекурентного потоку заявок і експоненційного розподілу часу обслуговування також знайдені точні формули (Полячек, Такач, див. [3]–[6]).

Для однолінійної СМО з втратами загального типу (рекурентний потік заявок, довільний розподіл часу обслуговування) важливий асимптотичний результат належить Такачу [6]. Результати такого сорту представляють інтерес також і для теорії лічильників Гейгера–Мюллера [6], [12].

Різноманітні загальні методи аналізу систем масового обслуговування та теорії надійності розглядалися Боровковим[4], Коваленком[7], Королюком та Турбіним[8] (див. також роботу Анісімова [9]).

Із останніх робіт відзначимо [10], [11], які присвячені системам обслуговування з пороговими стратегіями функціонування.

В даній замітці для однолінійної СМО з втратами знаходяться стаціонарні ймовірності станів і установлюється центральна гранична теорема для часу перебування в станах. Основна відмінність від традиційного підходу полягає в тому, щоб виділити моменти регенерації і використати елементи теорії відновлення.

Відзначимо також, що ми вивчаємо збіжність майже напевне (м.н.) до стаціонарних ймовірностей.

Автор вдячний академіку І. М. Коваленку за зауваження до першого варіанту цієї замітки і вказівку на роботу [6].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 90B22 .

Ключові слова і фрази. Системи масового обслуговування, стаціонарні ймовірності, центральна гранична теорема.

Далі вважаємо, що СМО має одну лінію обслуговування. Якщо в момент надходження заявки лінія вільна, то негайно починається її обслуговування. А коли лінія зайнята, то заявка губиться.

Будемо казати, що в момент часу t СМО перебуває в стані 0, якщо в цей момент лінія обслуговування вільна, і, відповідно, в стані 1, в противному випадку.

Позначимо через $\nu_i(t)$ число заявок, що надійшли на інтервалі часу $(0,t)$ в моменти, коли СМО перебувала в стані i, $i=0,1$; $N(t)=\nu_0(t)+\nu_1(t)$, $\mathsf{E}\,N(t)=H(t)$ (ясно, що $N(t)=\max(n\colon t_n<t)$ — це лічильний процес відновлення, а $H(t)$- його функція відновлення). Нехай $\alpha_0(t)$ та $\alpha_1(t)$ — час перебування СМО в станах 0 та 1 на інтервалі $(0,t)$, відповідно.

Стаціонарні ймовірності станів СМО можна ввести різними способами. Ми задамо їх такими рівностями:

$$p_k=\lim_{t\to\infty}\frac{\nu_k(t)}{N(t)}\quad \text{м.н.}, \tag{1}$$

$$p_k^*=\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha_k(t)}{t}\quad \text{м.н.}, \tag{2}$$

де $k=0,1$.

Зрозуміло, що ці характеристики представляють основний інтерес для нашої СМО.

Теорема 1. *Якщо* $\mathsf{E}\,\eta_1=b<\infty$, *то*

$$\rho(H)=\int_0^\infty H(s)\,dG(s)<\infty, \tag{3}$$

існують границі (1) *і*

$$p_0=\frac{1}{\rho(H)+1},\qquad p_1=\frac{\rho(H)}{\rho(H)+1}, \tag{4}$$

Відзначимо, що нерівність (3) і рівності (1) та (4) залишаються вірними і у випадку $\mathsf{E}\,\tau_1=\infty$.

Зауваження 1. Результат, близький до теореми 1, міститься на с.293, книги [4]. А саме, там установлена рівність

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\nu_0(t_n)}{n}=\frac{1}{\rho(H)+1}\quad \text{м.н.}$$

Доведення теореми 1. Покладемо $S_1=\tau_1$ — момент надходження першої заявки в систему, S_2 — момент надходження першої заявки, після закінчення першого обслуговування, тобто після моменту $S_1+\eta_1,\dots,$ S_k — момент надходження першої заявки, після закінчення $(k-1)$-го обслуговування, тобто після моменту $S_{k-1}+\eta_{k-1}$. Нехай ζ_k — число заявок, що надійшли в інтервалі часу $(S_k,S_k+\eta_k)$.

Із означення зрозуміло, що розподіл в.в. ζ_k визначається довжиною випадкового інтервалу η_k і не залежить від $S_1,\dots,S_k$, а отже не залежить і від $\zeta_1,\dots,\zeta_{k-1}$. Таким чином, ζ_k, $k\ge 1$, — це послідовність н.о.р.в.в. (фактично послідовність S_k, $k\ge 1$, — це послідовність моментів регенерації деякого випадкового процесу, який описує проходження заявок через СМО).

В наших умовах в.в. ζ_1 має обмежене середнє значення. Дійсно

$$\mathsf{E}\,\zeta_1=\mathsf{E}\,N(\eta_1)=\int_0^\infty \mathsf{E}(N(\eta_1)/\eta_1=s)\,dG(s)=\int_0^\infty H(s)\,dG(s)=\rho(H).$$

Обмеженість останнього інтегралу просто випливає із обмеженості величини $\mathsf{E}\,\eta_1$, бо за елементарною теоремою відновлення [12]

$$\lim_{s\to\infty}\frac{H(s)}{s}=\frac{1}{a}, \tag{5}$$

де $a = \mathsf{E}\,\tau_1$ (при $a = \infty$ права частина в рівності (5) = 0.)

За законом великих чисел Колмогорова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(S_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\zeta_k + n\right) = \mathsf{E}\,\zeta_1 + 1 = \rho(H)+1 \quad \text{м.н.} \tag{6}$$

Очевидно, що $\nu_0(S_{n+1}) = n$ (на кожному циклі регенерації (S_k, S_{k+1}) виконується одна заявка). Тому із рівності (6) маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_0(S_{n+1})}{N(S_{n+1})} = \frac{1}{\rho(H)+1} \quad \text{м.н.} \tag{7}$$

І далі $\forall t \in (S_n, S_{n+1})$

$$\frac{n-1}{N(S_{n+1})} \le \frac{\nu_0(S_n)}{N(S_{n+1})} \le \frac{\nu_0(t)}{N(t)} \le \frac{\nu_0(S_{n+1})}{N(S_n)} = \frac{n}{N(S_n)} \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ м.н., то із останніх нерівностей та рівності (7) випливає

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\nu_0(t)}{N(t)} = \frac{1}{\rho(H)+1} \quad \text{м.н.}$$

Тобто ми установили формулу (4) для p_0. Звідси вже безпосередньо одержуємо і формулу для p_1. □

Теорема 2. *Якщо* $\mathsf{E}\,\tau_1 = a < \infty i \mathsf{E}\,\eta_1 = b < \infty$, *то існують границі* (2) *і*

$$p_1^* = \frac{b}{a(\rho(H)+1)}, \qquad p_0^* = 1 - p_1^* \tag{8}$$

Зауваження 2. Якщо $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, то відомо (див. напр. [12]), що $H(t) = \lambda t$, а отже для довільної функції розподілу $G(x)$

$$\rho(H) = \rho = \lambda b, \qquad p_0 = p_0^* = \frac{1}{\rho+1}, \qquad p_1 = p_1^* = \frac{\rho}{\rho+1},$$

тобто ми маємо добре відомі формули Ерланга.

Зауваження 3. Такач[5], [6] для багатолінійної СМО з втратами вводить стаціонарні ймовірності для моментів надходження заявок

$$P_k = \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(\xi_n = k)$$

та стаціонарні ймовірності для довільних моментів часу

$$P_k^* = \lim_{t\to\infty}\mathsf{P}(\xi(t) = k),$$

де $\xi(t)$ — загальне число зайнятих ліній в момент t, $\xi_n = \xi(t_n - 0)$ — число зайнятих ліній в момент надходження n-ї заявки.

У роботі [6] для однолінійної СМО з втратами загального типу при додатковій умові, що функція розподілу $F(x)$ негратчаста, установлена рівність

$$P_1^* = \frac{b}{a(\rho(H)+1)},$$

(точніше в теоремі 3, гл.6, книги [6] одержаний еквівалентний результат в термінах теорії лічильників Гейгера–Мюллера). Таким чином $p_1^* = P_1^*$.

Зауваження 4. Нехай $F(x)$ довільна функція розподілу, а $G(x) = 1 - \exp(-\mu x)$. Позначимо через $F^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx)\,dF(x)$ — перетворення Лапласа функції $F(x)$. Тоді

$$\rho(H) = \int_0^\infty H(x)\,dG(x) = \int_0^\infty \exp(-\mu x)\,dH(x) = H^*(\mu).$$

Оскільки $H^*(s) = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}$ ([12]), то із теореми 1 маємо

$$p_1 = F^*(\mu), \qquad p_0 = 1 - F^*(\mu).$$

Для випадку експоненційного розподілу часу обслуговування $G(x) = 1-\exp(-\mu x)$ і однолінійної СМО із результатів [5] випливає, що

$$P_1 = F^*(\mu), \qquad P_0 = 1 - F^*(\mu),$$

а отже $p_1 = P_1$.

Доведення теореми 2. Будемо використовувати позначення, введені при доведенні теореми 1. Добре відомо, що при фіксованому t в.в. $\chi = N(t) + 1$ — марковський момент для послідовності (τ_i), а отже за тотожністю Вальда ([12], [14, с. 86])

$$\mathsf{E}\sum_{i=1}^{\chi} \tau_i = \mathsf{E}\,\tau_1\,\mathsf{E}\,\chi = a(H(t) + 1) \tag{9}$$

Нехай $T_k = S_{k+1} - S_k = \sum_{i=N(S_k)+1}^{N(S_{k+1})} \tau_i$ — довжина k-го циклу регенерації. Зрозуміло, що (T_k) — послідовність н.о.р.в.в., причому

$$T_k \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{N(\eta_1)+1} \tau_i. \tag{10}$$

Знову застосуємо закон великих чисел: при $n \to \infty$

$$\frac{S_{n+1}}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k + \tau_1\right) \to \mathsf{E}\,T_1 \quad \text{м.н.} \tag{11}$$

і

$$\frac{\alpha_1(S_{n+1})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k \to \mathsf{E}\,\eta_1 = b \quad \text{м.н.} \tag{12}$$

Із рівностей (9), (10) неважко знайти середню довжину циклу регенерації

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,T_1 &= \int_0^\infty \mathsf{E}(T_1/\eta_1 = t)\,dG(t) = \int_0^\infty \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{N(\eta_1)+1} \tau_i/\eta_1 = t\right) dG(t) \\ &= a\int_0^\infty (H(t) + 1)\,dG(t) = a(\rho(H) + 1). \end{aligned} \tag{13}$$

Збираючи разом співвідношення (11)–(13) маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1(S_{n+1})}{S_{n+1}} = \frac{b}{a(\rho(H) + 1)} \quad \text{м.н.} \tag{14}$$

Залишається для $\forall t \in (S_n, S_{n+1})$ записати оцінки

$$\frac{\alpha_1(S_n)}{S_{n+1}} \le \frac{\alpha_1(t)}{t} \le \frac{\alpha_1(S_{n+1})}{S_n} \quad \text{м.н.} \tag{15}$$

Оскільки в силу (11)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 \quad \text{м.н.},$$

то існування границь в (2) вже безпосередньо випливає із (14), (15). Те саме стосується і рівності (8). □

Кажуть, що функція розподілу $F(x)$ має зростаючу інтенсивність відмов, якщо $\gamma(x) = \frac{F'(x)}{1-F(x)}$ — зростаюча функція. Для таких $F(x)$ виконуються нерівності:

$$\frac{t}{a} - 1 \le H(t) \le \frac{t}{a}, \qquad \frac{b}{a} - 1 \le \rho(H) \le \frac{b}{a},$$

(див. [13, с. 113].) Звідси та теорем 1, 2 маємо

Наслідок 1. *Якщо в умовах теореми 2 функція розподілу $F(x)$ має зростаючу інтенсивність відмов, то*

$$\frac{b-a}{b} \le p_1 \le \frac{b}{b+a}, \qquad \frac{b}{b+a} \le p_1^*.$$

Фактично теореми 1, 2 — це деякі аналоги закону великих чисел для величин $\nu_i(t)$, $\alpha_i(t)$. Далі покажемо, що для них виконується і центральна гранична теорема (ЦГТ).

Як і вище через a та b позначаємо середні значення τ_1 та η_1. І нехай

$$\mathbf{D}\,\tau_1 = \sigma_\tau^2, \qquad \mathbf{D}\,\eta_1 = \sigma_\eta^2, \qquad \mu_T = a(\rho(H)+1),$$

$$\sigma_T^2 = \sigma_\tau^2(\rho(H)+1) + a\left(2\int_0^\infty\int_0^t H(t-s)\,dH(s)\,dG(t) + \rho(H) - \rho(H)^2\right).$$

Теорема 3. *Нехай $\sigma_\tau^2 < \infty$, $\sigma_\eta^2 < \infty$. Тоді $\sigma_T^2 < \infty$ і*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\nu_0(t) - t/\mu_T}{\sigma_T\sqrt{t/\mu_T^3}} < x\right) = \Phi(x), \tag{16}$$

де $\Phi(x)$ стандартна функція нормального розподілу.

Доведення теореми 3. Нехай

$$S_n = \tau_1 + T_1 + \cdots + T_{n-1}, \qquad N_0(t) = \max(n\colon S_n < t),$$

де T_n — це величина n-го циклу регенерації (див. доведення теореми 2).

Із означення зрозуміло, що $\nu_0(t) = N_0(t)$. Таким чином $\nu_0(t)$ — це лічильний процес схеми відновлення загального типу. Добре відомо ([12], с.51), що для нього виконується ЦГТ (тобто рівність (16)) при умові:

$$\sigma_T^2 = \mathbf{D}\,T_1 < \infty, \qquad \mu_T = \mathsf{E}\,T_1 < \infty$$

За формулою (13) $\mu_T = \mathsf{E}\,T_1 = a(\rho(H)+1)$.

Обчислимо дисперсію в.в. T_1. Нехай, як і вище, $N(t)$ — лічильний процес, побудований по послідовності в.в. (t_n). Почнемо з відомої в теорії відновлення рівності ([12, с. 174]):

$$\mathsf{E}\,N(t)^2 = 2\int_0^t H(t-s)\,dH(s) + H(t)$$

Згідно з якою

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,N(\eta_1)^2 &= \int_0^\infty \mathsf{E}\,N(t)^2/\eta_1 = t)\,dG(t)\\ &= 2\int_0^\infty \left(\int_0^t H(t-s)dH(s) + H(t)\right)\,dG(t)\\ &= 2\int_0^\infty\int_0^t H(t-s)\,dH(s)\,dG(t) + \rho(H).\end{aligned} \tag{17}$$

Далі скористаємось формулою для дисперсії суми в.в. до випадкового індексу ([14, с. 90]):

$$\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\xi_k\right) = \mathbf{D}\,\xi_1\,\mathsf{E}\,\nu + \mathsf{E}\,\xi_1\,\mathbf{D}\,\nu,$$

тут (ξ_k) — довільні н.о.р.в.в., ν - марковський момент відносно послідовності (ξ_k).

Із останньої формули одержуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\,T_1 = \mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{N(\eta_1)+1}\tau_k\right) &= \mathbf{D}\,\tau_1\,\mathsf{E}(N(\eta_1)+1) + \mathsf{E}\,\tau_1\,\mathbf{D}\,N(\eta_1)\\ &= \sigma_\tau^2(\rho(H)+1) + a\left(\mathsf{E}\,N(\eta_1)^2 - \rho(H)^2\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Разом (17), (18) і дають рівність $\mathbf{D}\,T_1 = \sigma_T^2$.

Залишається показати, що в умовах теореми 3 $\sigma_T^2 < \infty$. Це зробити неважко. Дійсно, згідно (5)

$$H(t) \le Ct.$$

А отже

$$\int_0^t H(t-s)\,dH(s) \le C\int_0^t (t-s)\,dH(s) \le CtH(t) \le Ct^2.$$

Звідси маємо

$$\int_0^\infty\int_0^t H(t-s)\,dH(s)\,dG(t) \le C\left(\sigma_\eta^2 + b^2\right) < \infty.$$

Зрозуміло, що остання оцінка і забезпечує обмеженість σ_T^2. □

Наслідок 2. *Якщо в умовах теореми 3* $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x > 0$, *то рівність* (16) *вірна з*

$$\mu_T = b + \frac{1}{\lambda}, \qquad \sigma_T^2 = \frac{\lambda b + 1}{\lambda^2} + \lambda\sigma_\eta^2 + b. \tag{19}$$

Перша рівність в (19) просто випливає із наступних співвідношень:

$$a = \frac{1}{\lambda}, \quad H(t) = \lambda t, \quad \rho(H) = \lambda b.$$

А другу одержимо, якщо скористаємось рівністю

$$\mathsf{E}\,N(\eta_1)^2 = \int_0^\infty \left(\lambda t + \lambda^2 t^2\right)\,dG(t) = \lambda b + \lambda^2\left(\sigma_\eta^2 + b^2\right)$$

та підставимо її в (18).

Теорема 4. *Нехай* $\mathsf{E}\,\eta_1 = b < \infty$, $\sigma_\eta^2 < \infty$, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x > 0$. *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left(\frac{\alpha_1(t) - \frac{b}{b+1/\lambda}t}{\sqrt{t(b^2+\sigma_\eta^2)}}\,\lambda\left(b+\frac{1}{\lambda}\right)^{3/2} < x\right) = \Phi(x). \tag{20}$$

Доведення теореми 4. Рівність (20) ми одержимо, як наслідок ЦГТ для альтернуючого процесу.

Нехай (ξ_i', ξ_i'') — альтернуючий процес відновлення (в іншій термінології (див. [13, с. 121]) — процес відновлення із скінченним часом відновлення). Під ξ_i' звичайно розуміють час роботи деякого елемента, а ξ_i'' — час його відновлення. Позначимо через $L(t)$ — сумарну наробку за час t, тобто $L(t)$ — це сума усіх періодів роботи ξ_i' до моменту t, включаючи, можливо, і неповний період, що примикає до моменту t. І нехай

$$\mathsf{E}\,\xi_i' = \mu_1, \qquad \mathsf{E}\,\xi_i'' = \mu_2, \qquad \mathbf{D}\,\xi_i' = \sigma_1^2, \qquad \mathbf{D}\,\xi_i'' = \sigma_2^2,$$

і всі ці величини скінчені. Відомо ([13], с.127 - 130), що при цих умовах $L(t)$ задовольняє ЦГТ:

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{L(t)-\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}t}{\mu_1\mu_2\sqrt{t(\sigma_1^2/\mu_1^2+\sigma_2^2/\mu_2^2)}}\,(\mu_1+\mu_2)^{3/2}<x\right)=\Phi(x) \tag{21}$$

Звідси вже неважко отримати рівність (20). Дійсно, якщо $\zeta_t = t_{N(t)+1} - t$ — величина перескоку процесу відновлення (t_n) через рівень t і в.в. τ_k мають експоненційний розподіл, то

$$\zeta_t \overset{d}{=} \tau_k,$$

а отже і

$$\zeta_{\eta_k} \overset{d}{=} \tau_k,$$

причому ζ_{η_k} і η_k незалежні в.в. Таким чином, в нашому випадку

$$\alpha_1(t) = L(t), \qquad \xi_i' = \eta_i, \qquad \xi_i'' = \zeta_{\eta_i},$$

$$\mu_1 = b, \sigma_1^2 = \sigma_\eta^2, \qquad \mu_2 = \frac{1}{\lambda}, \qquad \sigma_2^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Звідси та рівності (21) негайно одержуємо твердження теореми 4. $\square$

Зауваження 5. Оскільки $\alpha_0(t) + \alpha_1(t) = t$, то в.в. $\alpha_0(t)$ також буде асимптотично нормальною з параметрами

$$\mu = \frac{t}{b\lambda+1}, \qquad \sigma^2 = \frac{t\left(b^2+\sigma_\eta^2\right)}{\lambda^2\left(b+\frac{1}{\lambda}\right)^3}.$$

Література

1. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, *Введение в теорию массового обслуживания*, “Наука”, Москва, 1966.
2. Т. Л. Саати, *Элементы теории массового обслуживания*, “Советское радио”, Москва, 1971.
3. І. К. Риордан, *Вероятностные системы обслуживания*, “Связь”, Москва, 1966.
4. А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, “Наука”, Москва, 1972.
5. Л. Такач, *Некоторые вероятностные задачи в телефонии*, Математика, период. сб. перевод. **4** (1960), № 6, 93–144.
6. L. Takacs, *Introduction to the theory of queues*, Oxford University Press, New York, 1962.
7. И.Н. Коваленко, *Исследования по анализу надежности сложных систем*, “Наукова думка”, Киев, 1975.
8. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, “Наукова думка”, Киев, 1976.
9. В. В. Анисимов, *Асимптотические методы анализа стохастических систем*, Мецниереба, Тбилиси, 1984.
10. К. Ю. Жерновий, *Дослідження системи $M^\theta/G/1/m$ з пороговим перемиканням режимів обслуговування*, Теор. ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 56–68.
11. К. Ю. Жерновий, *Період зайнятості та стаціонарний розподіл для системи $M^\theta/G/1/\infty$ з пороговим перемиканням режимів обслуговування*, Теор. ймовір. та матем. статист. **87** (2012), 46–57.
12. Д. Кокс, В. Смит, *Теория восстановления*, “Советское радио”, Москва, 1967.
13. Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловйов, *Математические методы в теории надежности*, “Наука”, Москва, 1965.
14. А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, “Наука”, Москва, 1976.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127

Адреса електронної пошти: ivanmatsak@univ.kiev.ua

Надійшла 07/06/2013