Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 142–154

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 142–154

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОГЛОТИТЕЛЕМ

УДК 519.21

С. А. МЕЛЬНИК

Аннотация. В работе доказана теорема сравнения обобщённых решений задачи Коши для стохастического квазилинейного уравнения параболического типа. Коэффициенты дрейфа и диффузии не обязаны удовлетворять условию Липшица. Коэффициент дрейфа является поглотителем.

Анотація. В роботі доведена теорема порівняння узагальненого розв'язку задачі Коші для стохастичного квазілінійного рівняння параболічного типу. Коефіцієнти дрейфу та дифузії не зобов'язані задовольняти умові Ліпшиця. Коефіцієнт дрейфа є поглиначем.

Abstract. In this work the comparison theorems for the solutions of Cauchy problem for the stochastic quasi-linear parabolic equation is proved. Drift and diffusion coefficients are not obliged to satisfy Lipschitz's condition. The drift coefficient is an absorber.

1. Вступление

Теория стохастических диффереціальных уравнений в частных параболического типа является одним из основных направлений развития современной теории стохастических уравнений. Выход известных работ Э. Парду [1] и Н. В. Крылова, Б. Л. Розовского [2] дал толчок многочисленным исследованиям свойств решений различных задач для указанных уравнений. Исследования в этой области активно продолжаются и в настоящее время. В работе [3] изложены результаты, касающиеся уравнений с возмущениями типа белого или цветного щума. В серии работ В. Н. Радченко [4]–[6] рассмотрены стохастические параболические уравнения с интегралами по случайным мерам.

Теоремы сравнения широко применяются при изучении свойств решений различных задач для уравнений в частных производных так как они дают возможность описывать свойства классов решений с помощью одного специального решения. Для детерминированных уравнений параболического типа теоремы сравнения доказаны для широкого класса задач и уравнений. Соответствующие формулировки теорем и методика их применения изложены в монографии [7]. Теоремы сравнения решений СДУЧП параболического типа доказывались многими авторами (например, [8, Теорема 5.1], [9, Теорема 5], [10, Теорема 1], [11, Теорема 1]). Одним из ключевых условий, налагаемых авторами работ [8], [9], [10] на коэффициенты уравнения, является условие Липшица. Коэффициенты уравнений, рассматриваемых в данной работе, не обязаны удовлетворять условию Липшица. Эффективность применения доказанной ниже теоремы сравнения продемонстрирована на примерах уравнений со степенными нелинейностями. В работе [11] теорема сравнения доказана для уравнения, у которого коэффициенты дрейфа и диффузии являются степенными функциями от фазовой переменной, причём показатели степеней как коэффициента дрейфа,

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10; Secondary 62F05.

Ключевые слова и фразы. Stochastic partial differential equation, Comparison theorem.

Исследования выполнены при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований. Грант Ф40.1/023.

так и коэффициента диффузии должны быть положительными числами меньшими единицы. Доказанная ниже Теорема 1 позволяют коэффициенту диффузии быть степенной функцией, но её показатель степени должен быть не меньше единицы.

2. Определения, обозначения. основной результат.

На некотором стохастическом базисе $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}\right)$ рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} du^{(j)}(t,x) = a\Delta u^{(j)}(t,x)\,dt + b^{(j)}(t,x,u^{(j)}(t,x))\,dt + c(t,x,u^{(j)}(t,x))\,dw(t), \\ t\in[0,T], \qquad x\in\mathbf{R}^n, \qquad u^{(j)}(0,x) = u_0^{(j)}(x), \qquad j=1,2. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь: $a > 0$, Δ — оператор Лапласа, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, $b^{(j)}(t,x,u)$, $c(t,x,u)$, $u_0^{(j)}(x)$ — неслучайные функции.

В работе будут использоваться следующие обозначения.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \nabla = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad U^{(+)} = \max(0;U), \qquad U^{(-)} = \max(0;-U),$$

$\mathbf{W}_2^1(\mathbf{R}^n)$ — стандартное пространство С.Л. Соболева, $\mathbf{L_p}(M)$ — пространство функций, интегрируемых в степени p на множестве M, $\|u\|_p^p = \int |u(x)|^p\,dx$, $\mathbf{C}(M)$ — стандартное пространство функций, непрерывных на множестве M,

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}\left([0;T];\mathbf{L_2}(\mathbf{H}\times\Omega)\right) \cap \mathbf{L_p}\left([0;T]\times\Omega;\mathbf{V}\right), \qquad p\geq 2.$$

Символом $\mathcal{K}$ с индексами или без индексов будут обозначаться положительные константы. При необходимости, в скобках будут указаны параметры, от которых может зависеть константа.

Задачу (1) будем рассматривать на некоторой тройке пространств $\mathbf{V}\subset\mathbf{H}\equiv\mathbf{H}^*\subset\mathbf{V}^*$, где $\mathbf{V}$ — банахово, а $\mathbf{H}$ — гильбертово пространства функций от $x\in\mathbf{R}^n$. Будем предполагать, что коэффициенты уравнений и начальные функции удовлетворяют требованиям, обеспечивающим существование решений, принадлежащих пространству $\mathbf{L}$. Примеры соответствующих условий и пространств будут приведены ниже. решение будем понимать в соответствии с [2, Определение 2.1, с. 135].

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\lambda > 0$ выполнены следующие условия.*

T1.1. $u_0^{(1)}(x) \leq u_0^{(2)}(x), \forall x\in\mathbf{R}^n$.

T1.2. $b^{(2)}(t,x,u) \geq b^{(1)}(t,x,u), \forall (t,x,u)\in[0;T]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$, $\exists\mathcal{K}>0$: $b^{(1)}(t,x,u) - b^{(1)}(t,x,v) \leq \mathcal{K}\cdot(u-v)$, $\forall u\geq v$, $\forall (t,x)\in[0;T]\times\mathbf{R}^n$.

T1.3. $\mathsf{E}\left(\int_0^T \left(\int |c(t,x,u^{(j)}(t,x))|e^{-\lambda|x|}dx\right)^2 dt\right)^{0.5} \leq \mathcal{K}(T)$, $j=1,2$.

T1.4. *Функция $|c_u(t,x,u)|^2$ нестрого выпукла вниз по переменной u.*

T1.5. $\mathsf{E}\int_0^T\int |c_u(t,x,u^{(j)}(t,x))|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt \leq \mathcal{K}(T)$, $j=1,2$.

T1.6. $\sup_{0\leq t\leq T}\mathsf{E}\int |u^{(j)}(t,x)|e^{-\lambda|x|}dx \leq \mathcal{K}(T)$, $j=1,2$.

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{u^{(1)}(t,x)\leq u^{(2)}(t,x), \forall (t,x)\in[0;T]\times\mathbf{R}^n\right\} = 1.$$

Следствие 1. *Если $u_0(x)\geq 0$, задача (1) имеет нулевое решение и выполнены условия Теоремы 1, то почти все реализации решения $u\in\mathbf{L}$ являются неотрицательными функциями.*

Следствие 2. *Если выполнены условия Теоремы 1, то задача (1) имеет не более одного решения $u\in\mathbf{L}$.*

3. Доказательство теоремы сравнения.

Доказательству Теоремы 1 предпошлём следующую лемму.

Лемма 1. *Определим функцию $\phi(u)$ равенством*

$$\phi(u) = \begin{cases} -u - \frac{\varepsilon}{2}, & u \le -\varepsilon, \\ -\frac{u^4}{2\varepsilon^3} - \frac{u^3}{\varepsilon^2}, & -\varepsilon < u < 0, \\ 0, & u \ge 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$. Функция $\phi(u)$ обладает следующими свойствами.

Ф1. *$\phi(u)$ дважды непрерывно дифференцируема по u при каждом $\varepsilon > 0$.*

Ф2. *$0 \le \phi(u) \le u^{(-)}$, причём, $\phi(u) > 0$ при $u < 0$ и $\phi(u) = 0$ при $u \ge 0$.*

Ф3. *$-1 \le \phi_u(u) < 0$ при $u < 0$, $\phi_u(u) = 0$ при $u \ge 0$, а также $0 \le u\phi_u(u) \le 3\phi(u)$.*

Ф4. *$0 < \phi_{uu}(u) \le \frac{3}{2\varepsilon}$ при $u \in (-\varepsilon; 0)$ и $\phi_{uu}(u) = 0$ при $u \notin (-\varepsilon; 0)$.*

Ф5. *$\phi(u)$ сходится к $u^{(-)}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $u \in \mathbf{R}^1$.*

Доказательство. Чтобы убедиться в наличии свойства Ф1 достаточно дважды продифференцировать функцию $\phi(u)$ по переменной u.

Докажем Ф2. Если $u \le -\varepsilon$, то $\phi(u) = -u - 0.5\varepsilon$. Тогда, $-u - 0.5\varepsilon \ge \varepsilon - 0.5\varepsilon > 0$ и $-u - 0.5\varepsilon < -u = u^{(-)}$. Если $-\varepsilon < u < 0$, то $\phi(u) = -\frac{u^4}{2\varepsilon^3} - \frac{u^3}{\varepsilon^2} = -\frac{u^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{u}{2\varepsilon} + 1\right) > 0$. Найдём $\max_{u \in [-\varepsilon;0]}[\phi(u) - u^{(-)}]$. Находим значения функции на концах отрезка. $\phi(-\varepsilon) - \varepsilon = -0.5\varepsilon$, $\phi(0) - 0 = 0$. Находим критические точки. $(\phi(u) - u^{(-)})_u = -2\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^3 - 3\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^2 + 1 = 0$. $u_1 = -\varepsilon, u_2 = 0.5\varepsilon \notin (-\varepsilon; 0)$. Значит $0 < \phi(u) \le u^{(-)}$ при $-\varepsilon < u < 0$. Если $u \ge 0$, то $\phi(u) = 0$ и справедливость неравенства $0 \le \phi(u) \le u^{(-)}$ очевидна.

Докажем Ф3. Если $u \le -\varepsilon$, то справедливость неравенства $-1 \le \phi_u(u) < 0$ очевидна. Если $u \in (-\varepsilon; 0)$, то $\phi_u(u) = -\frac{2u^3}{\varepsilon^3} - \frac{3u^2}{\varepsilon^2}$. Найдём $\min_{u \in [-\varepsilon;0]} \phi_u(u)$ и $\max_{u \in [-\varepsilon;0]} \phi_u(u)$. Находим значения функции на концах отрезка. $\phi_u(-\varepsilon) = -1$, $\phi_u(0) = 0$. Кроме того, $\phi_{uu}(u) = -\frac{6u}{\varepsilon^2}\left(\frac{u}{\varepsilon} + 1\right) > 0$ при $u \in (-\varepsilon; 0)$. Значит $-1 < \phi_u(u) < 0$ при $u \in (-\varepsilon; 0)$.

Докажем неравенство $u\phi_u(u) \le 3\phi(u)$. Если $u \ge 0$, то обе части неравенства равны нулю и неравенство выполнено. Пусть $u \le -\varepsilon$. Тогда, $u\phi_u(u) = -u$, $3\phi(u) = -3u - 1.5\varepsilon$ и

$$u\phi_u(u) < 3\phi(u) \Leftrightarrow -u < -3u - 1.5\varepsilon \Leftrightarrow u < -0.75\varepsilon.$$

Но в рассматриваемом случае $u \le -\varepsilon < -0.75\varepsilon$. Значит, при $u \le -\varepsilon$ неравенство также выполнено.

Пусть $-\varepsilon < u < 0$. Тогда,

$$u\phi_u(u) = 3\left(-\frac{u^4}{2\varepsilon^3} - \frac{u^3}{\varepsilon^2}\right) - \frac{u^4}{2\varepsilon^3} \le 3\phi(u).$$

Таким образом, свойство Ф3 доказано.

Наличие свойства Ф4 легко устанавливается с помощью элементарных вычислений.

Докажем Ф5.

$$\left|\phi(u) - u^{(-)}\right| = \begin{cases} 0.5\varepsilon, u \le -\varepsilon, \\ \varepsilon\left|-0.5\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^4 - \left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^3 + \frac{u}{\varepsilon}\right|, -\varepsilon < u < 0, \\ 0, u \ge 0, \end{cases}$$

Обозначим $h(z) = -0.5z^4 - z^3 + z$. Тогда, $-0.5 = h(-1) < h(0) = 0$. Функция $h(z)$ возрастает при $z \in (-1; 0)$. Значит $\left|\phi(u) - u^{(-)}\right| \le 0.5\varepsilon$ при любом $u \in \mathbf{R}^1$, то есть $\phi(u)$ сходится к $u^{(-)}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $u \in \mathbf{R}^1$. Лемма 1 доказана. $\square$

Доказательство Теоремы 1. Применим к функции

$$\phi\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)e^{-\lambda|x|}$$

формулу Ито и проинтегрируем полученное равенство по $x \in \mathbf{R}^n$ и по $s \in (0;t)$.

$$\begin{aligned}
&\int \phi\left(u^{(2)}(t,x)-u^{(1)}(t,x)\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\\
&\quad=\int \phi\left(u_0^{(2)}(x)-u_0^{(1)}(x)\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\\
&\quad-a\int_0^t\int\left|\nabla(u^{(2)}-u^{(1)})\right|^2\phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\quad+\lambda a\int_0^t\int\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\cdot x|x|^{-1}\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\quad+\int_0^t\int\left(b^{(2)}\left(s,x,u^{(2)}\right)-b^{(1)}\left(s,x,u^{(1)}\right)\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\quad+0.5\int_0^t\int\left|c\left(s,x,u^{(2)}\right)-c\left(s,x,u^{(1)}\right)\right|^2\phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\quad+\int_0^t\int\left(c\left(s,x,u^{(2)}\right)-c\left(s,x,u^{(1)}\right)\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,dw(s).
\end{aligned}\tag{2}$$

Из свойства Ф3 и условия Т1.3 следует, что

$$\mathsf{E}\int_0^t\int\left(c\left(s,x,u^{(2)}\right)-c\left(s,x,u^{(1)}\right)\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,dw(s)=0.$$

Так как $u_0^{(2)}(x)-u_0^{(1)}(x)\geq 0$ согласно Т1.1, то $\phi\big(u_0^{(2)}-u_0^{(1)}\big)=0$ согласно Ф2. Тогда, из (2) получаем равенство

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\int \phi\left(u^{(2)}(t,x)-u^{(1)}(t,x)\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\\
&\quad=-a\,\mathsf{E}\int_0^t\int\left|\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\right|^2\phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\qquad+\lambda a\,\mathsf{E}\int_0^t\int\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\cdot x|x|^{-1}\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\qquad+\mathsf{E}\int_0^t\int\left(b^{(2)}\left(s,x,u^{(2)}\right)-b^{(1)}\left(s,x,u^{(1)}\right)\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\qquad+0.5\,\mathsf{E}\int_0^t\int\left|c\left(s,x,u^{(2)}\right)-c\left(s,x,u^{(1)}\right)\right|^2\phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds\\
&\quad=-aA+\lambda a\Lambda+B+0.5C.
\end{aligned}\tag{3}$$

Оценим слагаемые в правой части (3).

Оценим A. Из Ф4 следует, что $A\geq 0$ и $-aA\leq 0$.

Оценим Λ. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
&\int\nabla\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)\cdot x|x|^{-1}\phi_u\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)e^{-\lambda|x|}\,dx\\
&\quad=-\int\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)\nabla\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)x|x|^{-1}\\
&\qquad\qquad\times\phi_{uu}\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)e^{-\lambda|x|}\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\sum_{i=1}^{n}\int \left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right) \\
&\qquad\qquad \times \phi_u \left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)\Big|_{x_i=0} dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_n \\
&+ \lambda \int \left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right)\phi_u\left(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x)\right) e^{-\lambda|x|}\, dx \\
&= -\Lambda_1 - \Lambda_2 + \lambda\Lambda_3.
\end{aligned}
$$

Оценим каждое слагаемое. Применив Ф4 получаем $\forall\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_1| &\le \int \left|\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\right| \left(\phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\right)^{0.5} \\
&\qquad\qquad \times \left|u^{(2)}-u^{(1)}\right| \left(\phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\right)^{0.5} dx \\
&\le \varepsilon \int \left|\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\right|^2 \phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx \\
&\quad + \varepsilon^{-1}\int \left|u^{(2)}-u^{(1)}\right|^2 \phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx \\
&\le \varepsilon \int \left|\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\right|^2 \phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx + \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon}\int e^{-\lambda|x|}\, dx.
\end{aligned}
$$

Из Ф3 следует, что $-\Lambda_2 \le 0$.
Также из Ф3 следует неравенство

$$
\Lambda_3 \le 3\int \phi\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx.
$$

В итоге

$$
\begin{aligned}
\Lambda &\le \varepsilon\, \mathsf{E}\int_0^t \int \left|\nabla\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\right|^2 \phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds \\
&\quad + 3\lambda\, \mathsf{E}\int_0^t \int \phi\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds + \mathcal{K}(\lambda,\varepsilon,T)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Оценим интеграл B в равенстве (3). Если $u^{(2)} \ge u^{(1)}$, то $\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right) = 0$ и подынтегральное выражение равно нулю. Если $u^{(2)} \le u^{(1)}$, то согласно условию T1.2

$$
b^{(1)}\left(t,x,u^{(2)}\right) - b^{(1)}\left(t,x,u^{(1)}\right) \ge \mathcal{K}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)
$$

и

$$
\left(b^{(1)}\left(t,x,u^{(2)}\right) - b^{(1)}\left(t,x,u^{(1)}\right)\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right) \le \mathcal{K}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)
$$

поскольку $\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right) < 0$ при $u^{(2)} \le u^{(1)}$. Из условия T1.2 также следует, что

$$
\left(b^{(2)}\left(t,x,u^{(2)}\right) - b^{(1)}\left(t,x,u^{(2)}\right)\right)\phi_u\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right) \le 0
$$

при $u^{(2)} \le u^{(1)}$. Тогда, применив Ф3, получаем

$$
B \le 3\mathcal{K}\, \mathsf{E}\int_0^t \int \phi(u^{(2)}(s,x)-u^{(1)}(s,x))e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds.
$$

Оценим интеграл C в равенстве (3). По формуле конечных приращений Лагранжа получаем

$$
\begin{aligned}
C \le \mathsf{E}\int_0^t \int \int_0^1 &\left|c_u\left(s,x,\theta u^{(2)}+(1-\theta)u^{(1)}\right)\right|^2 d\theta \\
&\times \left|u^{(2)}-u^{(1)}\right|^2 \phi_{uu}\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds.
\end{aligned}
$$

Согласно свойству Ф4:

$$0 < \phi_{uu}\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right) \le \frac{3}{2\varepsilon},$$

если $u^{(2)} - u^{(1)} \in (-\varepsilon; 0)$ и $\phi_{uu}\big(u^{(2)} - u^{(1)}\big) = 0$, если $u^{(2)} - u^{(1)} \notin (-\varepsilon; 0)$. Тогда,

$$\left|u^{(2)} - u^{(1)}\right|^2 \phi_{uu}\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right) \le 1.5\varepsilon$$

и

$$C \le 1.5\varepsilon\, \mathsf{E} \int_0^t \int \int_0^1 \left|c_u\left(s, x, \theta u^{(2)} + (1-\theta)u^{(1)}\right)\right|^2 d\theta e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds.$$

Так как, согласно условию Т1.4 функция $|c_u(t,x,u)|^2$ нестрого выпукла вниз по переменной u, то

$$\left|c_u\left(s, x, \theta u^{(2)} + (1-\theta)u^{(1)}\right)\right|^2 \le \theta \left|c_u\left(s, x, u^{(2)}\right)\right|^2 + (1-\theta)\left|c_u\left(s, x, u^{(1)}\right)\right|^2$$

и

$$C \le 1.5\varepsilon\, \mathsf{E} \int_0^t \int \left[\left|c_u\left(s, x, u^{(2)}\right)\right|^2 + \left|c_u\left(s, x, u^{(1)}\right)\right|^2\right] e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds.$$

Тогда, из условия Т1.5 получаем неравенство $C \le \mathcal{K}(T)\varepsilon$.

Подставив полученные оценки в равенство (3) и выбрав $\varepsilon < \lambda^{-1}$ получаем:

$$\begin{aligned}&\mathsf{E} \int \phi\left(u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\right) e^{-\lambda|x|}\, dx \\ &\quad \le \mathcal{K}_1\, \mathsf{E} \int_0^t \int \phi\left(u^{(2)}(s,x) - u^{(1)}(s,x)\right) e^{-\lambda|x|}\, dx\, ds + \mathcal{K}_2\varepsilon.\end{aligned}$$

Согласно лемме Гронуолла

$$0 \le \mathsf{E} \int \phi\left(u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\right) e^{-\lambda|x|}\, dx \le \mathcal{K}_3(\lambda, \varepsilon, T)\varepsilon.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$. Согласно свойству Ф5 функция $\phi(u)$ сходится к $u^{(-)}$ при $\varepsilon \to 0$. Согласно свойству Ф2: $0 \le \phi(u) \le u^{(-)}$. Согласно условию Т1.6 функция

$$\left(u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\right)^{(-)} e^{-\lambda|x|}$$

интегрируема по $x \in \mathbf{R}^n$ при каждом $t \in [0; T]$. Значит, по теореме Лебега в рассматриваемом интеграле можно перейти к пределу под знаком математического ожидания и знаком интеграла и в результате получить равенство

$$\mathsf{E} \int \left(u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\right)^{(-)} e^{-\lambda|x|}\, dx = 0$$

из которого следует, что $\big(u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\big)^{(-)} = 0$ при всех $(t,x) \in [0;T] \times \mathbf{R}^n$ с вероятностью 1. Это означает, что

$$\mathsf{P}\left\{u^{(1)}(t,x) \le u^{(2)}(t,x), \forall (t,x) \in [0;T] \times \mathbf{R}^n\right\} = 1.$$

Теорема 1 доказана. □

4. Примеры применения теоремы сравнения.

Приведём примеры, демонстрирующие применимость доказанной теоремы сравнения, а также возможность её использования для изучения динамики решений задачи Коши для полулинейных СДУЧП параболического типа. Отметим, что во всех приводимых ниже примерах рассматриваются уравнения, коэффициенты которых не удовлетворяют условию Липшица и, соответственно, результаты [8, Теорема 5.1], [9, Теорема 5], [10, Теорема 1] к ним не применимы.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{gathered} du(t,x) = au_{xx}(t,x)\,dt + b|u(t,x)|^{\beta-1}u(t,x)\,dt + c|u(t,x)|^{\gamma-1}u(t,x)\,dw(t), \\ t\in[0;T], \qquad x\in\mathbf{R}^1, \qquad u(0,x)=u_0(x)\geq 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $a>0$, $b<0$, $c\neq 0$, $\beta>0$, $\gamma\geq 1$. Наряду с задачей (4) рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} du(t) = b|u(t)|^{\beta-1}u(t)\,dt + c|u(t)|^{\gamma-1}u(t)\,dw(t), \\ t\in[0;T], \qquad u(0)=u_0>0. \end{gathered} \tag{5}$$

Процесс $u(t)$, являющийся решением задачи (5), также является пространственно однородным решением задачи (4). Это позволит нам сравнивать динамику пространственно неоднородного решения задачи (4) с динамикой пространственно однородного решения той же задачи.

Докажем, что задача (4) имеет решение, обладающие требуемыми свойствами.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия.*

T2.1. $a>0$, $b<0$, $c\neq 0$, $\beta>2\gamma-1$, $\gamma>1$.

T2.2. $\|u_0\|_2<+\infty$.

Тогда, задача (4) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u\in{} & \mathbf{L_1}\left(\Omega;\mathbf{C}\left([0;T];\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^1\right)\right)\right)\cap\mathbf{L_2}\left(\Omega\times[0;T];\mathbf{W_2^1}\left(\mathbf{R}^1\right)\right)\cap\mathbf{L_{2\gamma}}\left(\Omega\times[0;T]\times\mathbf{R}^1\right) \\ & \cap\mathbf{L_{\beta+1}}\left(\Omega\times[0;T]\times\mathbf{R}^1\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство теоремы заключается в проверке выполнения условий Теоремы 4.1 [1, с.126].

Функциональные пространства выберем следующим образом.

$$\begin{gathered} \mathbf{H}=\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^1), \qquad \mathbf{V_1}=\mathbf{W_2^1}(\mathbf{R}^1), \qquad \mathbf{V_2}=\mathbf{L_{\beta+1}}(\mathbf{R}^1), \qquad \mathbf{V_3}=\mathbf{L_{2\gamma}}(\mathbf{R}^1), \\ \mathbf{V}=\mathbf{V_1}\cap\mathbf{V_2}\cap\mathbf{V_3}. \end{gathered}$$

Так как $\beta>1$ и $\gamma>1$, то согласно теореме вложения Соболева–Кондрашова–Ильина [12, с. 724] пространство $\mathbf{W_2^1}(\mathbf{R}^1)$ вложено в пространства $\mathbf{L_{\beta+1}}(\mathbf{R}^1)$ и $\mathbf{L_{2\gamma}}(\mathbf{R}^1)$. Значит $\mathbf{V}=\mathbf{W_2^1}(\mathbf{R}^1)$. Таким образом, в данном случае

$$\mathbf{L}=\mathbf{L_1}\left(\Omega;\mathbf{C}\left([0;T];\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^1)\right)\right)\cap\mathbf{L_2}\left([0;T]\times\Omega;\mathbf{W_2^1}(\mathbf{R}^1)\right).$$

Операторы определим следующим образом.

$$\begin{gathered} A_1(u)=-au_{xx}, \qquad A_2(u)=-b|u|^{\beta-1}u, \qquad A_3(u)=0, \\ B_1(u)=0, \qquad B_2(u)=0, \qquad B_3(u)=-c|u|^{\gamma-1}u. \end{gathered}$$

Проверка условий Теоремы 4.1 [1, с. 126] выполняется стандартными методами, описанными в Примере 5.2 [1, с. 133], и мы её опускаем. □

Следствие 3. *Если выполнены условия Теоремы 2 и* $\gamma\geq 1.5$, *то для решения задачи (4) выполнены и условия Теоремы 1.*

Доказательство. Выполнение условия T1.1 обеспечивается соответствующим выбором начальных функций. Выберем их неотрицательными. Отметим, что согласно Следствию 1 при таком выборе начальных функций почти все реализации соответствующих решений задачи (4) будут неотрицательными функциями. Это означает, что достаточно проверить выполнение условий Теоремы 1 для $u \geq 0$.

Проверим выполнение условия T1.2. Положим

$$b^{(1)}(t,x,u) = b^{(2)}(t,x,u) = bu^{\beta}.$$

Так как $b < 0$, то

$$b(u) - b(v) = b\left(u^{\beta} - v^{\beta}\right) \leq 0 \leq u - v$$

при $0 \leq v \leq u$. Таким образом, условие T1.2 выполнено.

Выполнение T1.3 следует из того, что $u \in \mathbf{L_{2\gamma}}\left(\Omega \times [0;T] \times \mathbf{R}^1\right)$ по Теореме 2.

Условие T1.4 выполнено, так как

$$|c_u(t,x,u)|^2 = |c|^2 \gamma u^{2(\gamma-1)}$$

выпукла вниз при $\gamma \geq 1.5$.

Проверим выполнение условия T1.5. Применив неравенство Юнга получаем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\int_0^T \int |c_u(t,x,u(t,x))|^2 e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds \\
&= c^2\gamma^2\,\mathsf{E}\int_0^T \int |u(s,x)|^{2(\gamma-1)} e^{-\lambda|x|}\,dx\,ds \\
&\leq c^2\gamma^2\,\mathsf{E}\int_0^T \int |u(s,x)|^{2\gamma}\,dx\,ds + c^2\gamma^2 T \int e^{-\lambda|x|}\,dx \\
&\leq \mathcal{K}(T).
\end{aligned}$$

Справедливость последнего неравенства следует из $u \in \mathbf{L_{2\gamma}}\left(\Omega \times [0;T] \times \mathbf{R}^1\right)$.

Выполнение условия T1.6 следует из того, что $u \in \mathbf{L_1}\left(\Omega; \mathbf{C}\left([0;T]; \mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^1\right)\right)\right)$.

Следствие 3 доказано. □

Докажем, что задача (5) имеет решение, обладающие требуемыми свойствами.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия.*

T3.1. $b < 0$, $c \neq 0$, $\beta > 2\gamma - 1$, $\gamma > 1$.

T3.2. $u_0 > 0$.

Тогда, задача (5) *имеет единственное решение* $u(t)$ *такое, что почти все его реализации непрерывны и*

$$\mathsf{E}\max_{t\in[0;T]} |u(t)|^2 < +\infty, \qquad \mathsf{E}\int_0^T |u(s)|^{\beta+1}\,ds < +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства используем Теорему 2.1 [1, с. 93]. Функциональные пространства выберем следующим образом: $\mathbf{V} = \mathbf{H} = \mathbf{H}^* = \mathbf{V}^* = \mathbf{R}^1$. В данном случае операторы имеют вид:

$$A(t,u) = -b|u|^{\beta-1}u, \qquad B(t,u) = -c|u|^{\gamma-1}u.$$

Проверка выполнения условий указанной теоремы проводится также, как при доказательстве предыдущей теоремы и мы её опускаем. □

Следствие 4. *Если выполнены условия Теоремы 3, то для решения задачи (5) выполнены и условия Теоремы 1.*

Следствие 4 доказывается аналогично Следствию 3.

Изучим динамику процесса $u(t)$, являющегося решением задачи (5) и пространственно однородным решением задачи (4). Обозначим:

$$\tau_0 = \inf\left\{t \geq 0\colon u(t) = 0\right\}, \qquad \tau_\infty = \inf\left\{t \geq 0\colon u(t) = +\infty\right\}, \qquad \tau = \tau_0 \wedge \tau_\infty.$$

Теорема 4. *Если выполнены условия Теоремы 3, то*

$$\mathsf{P}\left\{\tau = +\infty\right\} = 1, \qquad \mathsf{P}\left\{\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0\right\} = 1.$$

Доказательство. Для доказательства используем Теорему 3.1 и Теорему 3.2 [13, с. 351–353]. В нашем случае функции $s(u)$ и $k(u)$ имеют следующий вид:

$$s(u) = \exp\left(Qu_0^{\beta-2\gamma+1}\right)\int_{u_0}^{u}\exp\left(-Qy^{\beta-2\gamma+1}\right)\,dy,$$

$$k(u) = \frac{2}{c^2}\int_{u_0}^{u}\exp\left(-Qy^{\beta-2\gamma+1}\right)\int_{u_0}^{y} z^{-2\gamma}\exp\left(Qz^{\beta-2\gamma+1}\right)\,dz\,dy,$$

где

$$Q = \frac{2b}{c^2(\beta-2\gamma+1)} < 0.$$

Так как $u_0 > 0$, $Q < 0$, то $s(0) \neq -\infty$, $s(+\infty) = +\infty$. Тогда, согласно Теореме 3.1(2) [13, с. 351]

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\uparrow\tau} u(t) = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t<\tau} u(t) < +\infty\right\} = 1.$$

Выясним конечен ли момент τ. Для этого используем функцию $k(u)$.

Так как $Q < 0$ и $\gamma > 1$, то

$$\int_{u_0}^{y} z^{-2\gamma}\exp\left(Qz^{\beta-2\gamma+1}\right)\,dz = O\left(y^{1-2\gamma}\right)$$

при $y \downarrow 0$. Значит, $k(0) = -\infty$.

Так как

$$\int_{u_0}^{y} z^{-2\gamma}\exp\left(Qz^{\beta-2\gamma+1}\right)dz = O(1)$$

при $y \to +\infty$ и

$$\lim_{y\to+\infty}\exp\left(-Qy^{\beta-2\gamma+1}\right) = +\infty,$$

то $k(+\infty) = +\infty$. Тогда, согласно Теореме 3.2(1) [13, с. 353], $\mathsf{P}\left\{\tau = +\infty\right\} = 1$.

Теорема 4 доказана. □

Итак, пространственно однородное решение задачи (4) существует бесконечно долго, почти все его реализации стремятся к нулю при $t \to +\infty$, но значение 0 для него недостижимо. Полученные результаты позволяют с помощью Теоремы 1 изучить динамику пространственно неоднородных решений задачи (4).

Если $a > 0$, $b < 0$, $c \neq 0$, $\beta > 2\gamma - 1$, $\gamma \geq 2$, $0 \leq u_0(x) \leq u_0$, $\|u_0(\cdot)\|_2 < +\infty$, то согласно Теореме 1

$$\mathsf{P}\left\{0 \leq u(t,x) \leq u(t), \forall (t,x) \in [0;T]\times\mathbf{R}^1\right\} = 1, \qquad \forall T > 0.$$

Тогда из Теоремы 4 следует, что при таких условиях почти все реализации любого решения задачи (4) стремятся к нулю $\forall x \in \mathbf{R}^1$ при $t \to +\infty$.

Пример 2. Приведём ещё пример задачи, к решениям которой применима Теорема 1. Этот пример отличается от предыдущего тем, что здесь коэффициент дрейфа содержит два нелинейных слагаемых разного порядка одно из которых является источником, а другое — поглотителем. С помощью Теоремы 1 и в этом случае нам удастся изучить динамику решения.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} du(t,x) = au_{xx}(t,x)\,dt + (b_1u^2(t,x) - b_2u^3(t,x))\,dt + cu^2(t,x)\,dw(t), \\ t \in [0;T], \qquad x \in \mathbf{R}^1, \qquad u(0,x) = u_0(x) \geq 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $a > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c \neq 0$.

Покажем, что Теорема 1 применима к решениям задачи (6). Докажем, что задача (6) имеет решение, обладающие требуемыми свойствами.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия.*

T5.1. $a > 0$, $b_2 > b_1 > 0$, $3(b_2 - b_1) > 2c^2$, $c \neq 0$.

T5.2. $\|u_0\|_2 < +\infty$.

Тогда, задача (6) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u \in \mathbf{L_1}\left(\Omega; \mathbf{C}\left([0;T]; \mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^1\right)\right)\right) \cap \mathbf{L_2}\left(\Omega \times [0;T]; \mathbf{W_2^1}\left(\mathbf{R}^1\right)\right) \cap \mathbf{L_3}\left(\Omega \times [0;T] \times \mathbf{R}^1\right) \\ \cap\, \mathbf{L_4}\left(\Omega \times [0;T] \times \mathbf{R}^1\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся Теоремой 4.1 [1, с.126]. Проверим выполнение условий указанной теоремы.

Функциональные пространства выберем следующим образом.

$$\begin{gathered} \mathbf{V_1} = \mathbf{W_2^1}(\mathbf{R}^1), \qquad \mathbf{V_2} = \mathbf{L_3}(\mathbf{R}^1), \qquad \mathbf{V_3} = \mathbf{L_4}(\mathbf{R}^1), \qquad \mathbf{V} = \mathbf{V_1} \cap \mathbf{V_2} \cap \mathbf{V_3}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{L_2}(\mathbf{R}^1). \end{gathered}$$

Операторы определим следующим образом.

$$\begin{gathered} A_1(u) = -au_{xx}, \qquad A_2(u) = -b_1u, \qquad A_3(u) = b_2u^3, \\ B_1(u) = 0, \qquad B_2(u) = 0, \qquad B_3(u) = -cu^2. \end{gathered}$$

Выполнение условий (4.1)–(4.5) [1, с. 125] очевидно, если $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$.

Проверим выполнение условия коэрцитивности (4.6) [1, с.125]. В нашем случае оно должно выглядеть так:

$$\begin{aligned} 2a\|u_x\|_2^2 - 2b_1\|u\|_3^3 + 2b_2\|u\|_4^4 + \lambda\|u\|_2^2 + \nu \\ \geq \alpha\left(\|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|u\|_3^3 + \|u\|_4^4\right) + c^2\|u\|_4^4, \end{aligned} \tag{7}$$

где α, λ, ν — некоторые положительные числа. Применив неравенство Юнга для любого $\varepsilon > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} &2a\|u_x\|_2^2 - 2b_1\|u\|_3^3 + 2b_2\|u\|_4^4 + \lambda\|u\|_2^2 + \nu \\ &\quad \geq \alpha\left(\|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|u\|_3^3 + \|u\|_4^4\right) + c^2\|u\|_4^4 + (2a - \alpha)\|u_x\|_2^2 + (\lambda - \alpha)\|u\|_2^2 \\ &\qquad + (2b_2 - \alpha - c^2 - \varepsilon(2b_1 + \alpha))\|u\|_4^4 + \nu - \varepsilon^{-3}(2b_1 + \alpha). \end{aligned}$$

Если выбрать:

$$\lambda \geq \alpha, \qquad \alpha < 2a \wedge (2b_2 - c^2), \qquad \varepsilon \leq (2b_2 - c^2 - \alpha)/(2b_1 + \alpha), \qquad \nu \geq \varepsilon^{-3}(2b_1 + \alpha),$$

то из последнего неравенства будет следовать неравенство (7).

Таким образом, условие коэрцитивности (4.6) [1, с. 125] выполнено.

Проверим выполнение условия монотонности (4.7) [1, с. 125]. В данном случае оно должно имеет следующий вид:

$$2a\|u_x - v_x\|_2^2 - 2b_1 \int \left(u^2 - v^2\right)(u - v)\,dx + 2b_2 \int \left(u^3 - v^3\right)(u - v)\,dx \\ - c^2 \int \left(u^2 - v^2\right)^2\,dx + \lambda\|u - v\|_2^2 \geq 0. \tag{8}$$

Докажем, что в условиях Теоремы 5 при всех $u, v \in \mathbf{R}^1$ справедливо неравенство

$$2b_1\left(u^2 - v^2\right)(u - v) - 2b_2\left(u^3 - v^3\right)(u - v) + c^2(u^2 - v^2)^2 \leq \frac{2}{3}b_1(u - v)^2. \tag{9}$$

Если $u - v = 0$, то справедливость этого неравенство очевидна. Пусть $u \neq v$. Тогда неравенство (9) равносильно неравенству

$$2b_1(u + v) - 2b_2\left(u^2 + uv + v^2\right) + c^2(u^2 + 2uv + v^2) \leq \frac{2}{3}b_1. \tag{10}$$

При всех $u, v \in \mathbf{R}^1$ справедливо неравенство

$$u + v \leq u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3}. \tag{11}$$

В этом легко убедиться выделив полные квадраты. Оценив левую часть неравенства (10) с помощью (11) получаем:

$$2b_1(u + v) - 2b_2\left(u^2 + uv + v^2\right) + c^2(u^2 + 2uv + v^2) \\ \leq [2(b_1 - b_2) + c^2]u^2 + 2(b_1 - b_2 + c^2)uv + [2(b_1 - b_2) + c^2]v^2 + \frac{2}{3}b_1. \tag{12}$$

В условиях Теоремы 5 полученная квадратичная форма отрицательно определена. Тогда из (12) и (10) получаем неравенство (9). Выбрав $\lambda = 2b_1/3$ получаем неравенство (8).

Таким образом, условие монотонности (4.7) [1, с. 125] выполнено.

В итоге все условия Теоремы 4.1 [1, с. 126] выполнены и Теорема 5 доказана. □

Докажем применимость Теоремы 1 к решениям задачи (6). Так как уравнение (6) отличается от уравнения (4) лишь коэффициентом дрейфа, то при проверке условий Теоремы 1 достаточно проверить лишь условие T1.2. Остальные условия уже были проверены в Примере 1. Пусть $b^{(1)}(t, x, u) = b^{(2)}(t, x, u) = b_1u^2 - b_2u^3$. Тогда условие T1.2 принимает вид:

$$b_1(u^2 - v^2) - b_2(u^3 - v^3) \leq \mathcal{K}(u - v), \tag{13}$$

где $u \geq v$ и $\mathcal{K}$ — некоторая положительная константа. Докажем, что при $b_2 > b_1$ это условие выполнено. Воспользовавшись неравенством (11) получаем:

$$b_1(u^2 - v^2) - b_2(u^3 - v^3) \leq \frac{b_1}{3}(u - v).$$

Выбрав $\mathcal{K} = b_1/3$ получаем неравенство (13). Итак, если выполнены условия Теоремы 5, то Теорема 1 применима к решениям задачи (6).

Наряду с задачей (6) рассмотрим задачу

$$du(t) = \left(b_1u^2(t) - b_2u^3(t)\right)\,dt + cu^2(t)\,dw(t), \\ t \in [0; T], \qquad u(0) = u_0 > 0. \tag{13}$$

Процесс $u(t)$, являющийся решением задачи (14), также является пространственно однородным решением задачи (6). Это позволит нам сравнивать динамику пространственно неоднородного решения задачи (6) с динамикой пространственно однородного решения той же задачи.

Докажем, что задача (14) имеет решение, обладающие требуемыми свойствами.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия.*

T6.1. $b_2 > b_1 > 0$, $3(b_2 - b_1) > 2c^2$, $c \neq 0$.

T6.2. $u_0 > 0$.

Тогда, задача (14) *имеет единственное решение* $u(t)$ *такое, что почти все его реализации непрерывны и*

$$\mathsf{E} \max_{t\in[0;T]} |u(t)|^2 < +\infty,$$

$$\mathsf{E} \int_0^T |u(s)|^4\, ds < +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся Теоремой 4.1 [1, с. 126]. Проверим выполнение её условий.

Функциональные пространства выберем следующим образом:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V} = \mathbf{H} = \mathbf{H}^* = \mathbf{V}^* = \mathbf{R}^1.$$

В данном случае операторы имеют вид:

$$A_1(t,u) = -b_1u^2, \qquad A_2 = b_2u^3, \qquad B_1 = 0, \qquad B_2(t,u) = -cu^2.$$

Теперь проверка условий Теоремы 4.1 [1, с. 126] может быть выполнена так же, как при доказательстве Теоремы 5. Теорема 6 доказана. □

Применимость Теоремы 1 к решениям задачи (14) устанавливается также, как это было сделано выше для решений задачи (6).

Изучим динамику решения задачи (14). Для этого используем Теорему 3.1 [13, с. 351]. В нашем случае функция $s(u)$ имеет следующий вид:

$$s(u) = \mathcal{K} \int_{u_0}^{u} y^{2b_2c^{-2}} \exp\left(2b_1c^{-2}y^{-1}\right)\, dy.$$

Так как $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c \neq 0$, $u_0 > 0$, то $s(0) = -\infty$, $s(+\infty) = +\infty$ и согласно Теореме 3.1(1) [13, с. 351] процесс $u(t)$ является возвратным. Это означает, что $\mathsf{P}\{\tau = +\infty\} = 1$ и пространственно однородное решение задачи (6) с вероятностью 1 не имеет предела при $t \to +\infty$.

Теперь мы можем исследовать динамику пространственно неоднородных решений задачи (6). Пусть $0 < \check{u}_0 \le u_0(x) \le \hat{u}_0$ и процессы $\check{u}(t)$ и $\hat{u}(t)$ являются соответствующими решениями задачи (14). Применив Теорему 1, получаем:

$$\mathsf{P}\left\{0 \le \check{u}(t) \le u(t,x) \le \hat{u}(t), \forall t \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}^1\right\} = 1.$$

Как показано выше, процессы $\check{u}(t)$ и $\hat{u}(t)$ являются возвратными и принимают только положительные значения. Значит, пространственно неоднородное решение $u(t,x)$ также возвратно и строго положительно при всех $x \in \mathbf{R}^1$ и не имеет тренда. Отметим, что мы рассмотрели случай, когда начальная функция $u_0(x)$ отделена от нуля. Если отказаться от этого требования, из Теоремы 1 будет следовать лишь неотрицательность пространственно неоднородного решения $u(t,x)$ и его тотальная консервативность (то есть отсутствие взрыва и бесконечно долгое существование). Утверждать возвратность решения в этом случае мы, вообще говоря, не можем. Так же, в этом случае мы не можем сказать ничего определенного о достижимости значения 0.

5. Выводы

Рассмотренные примеры показывают, что наиболее ограничительными условиями Теоремы 1 являются условия T1.2 и T1.4. Условие T1.2 фактически требует, чтобы в основном уравнении коэффициент дрейфа содержал сильный поглотитель. Это видно из доказательства неравенства (13). Условие T1.4, в свою очередь, требует, чтобы коэффициент диффузии был достаточно хорошим. Так в Примере 1 это условие запрещает показателю степени коэффициента диффузии быть меньшим единицы. Это естественно, так как прямым следствием теоремы сравнения является вывод о единственности решения задачи. А, как известно, проблемы с единственностью решения задач (4) и (5) возникают именно при показателях степени меньших единицы. Однако, существенным достоинством Теоремы 1 является отсутствие условия Липшица. Это позволяет использовать доказанную теорему при изучении свойств решений такого важного типа задач как задачи Коши для стохастических уравнений параболического типа со степенными нелинейностями.

Список литературы

1. E. Pardoux, *Equations aux derivees partielles stochastiques non lineaires monotones*, These doct. math., Univ. Paris. Sud., 1975.
2. Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский, *Об эволюционных стохастических уравнениях*, Итоги науки и техники, т. 14, "ВИНИТИ", Москва, 1979, с. 71–147.
3. C. Prevot and M. Rockner, *A coincise course on stochastic partial differential equations*, Springer, 2007.
4. В. М. Радченко, *Властивості інтегралів з загальною вмпадковою мірою с стохастичних рівняннях теплопровідності*, Теор. ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 104–115.
5. В. М. Радченко, *Кабельне рівняння із загальною стохастичною мірою*, Теор. ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 126–133.
6. V. Radchenko, *Riemann integral of a random function and the parabolic equations with a general stochastic measure*, Theor. Imovir. ta Matem. Statyst. **87** (2012), 163–185.
7. А. А. Самарский, С. П. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, "Наука", Москва, 1987.
8. R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, C. Mueller, D. Nualart, and Y. Xiao, *A minicourse of SPDE*, Utah., Salt Lake City, 2006.
9. L. Denis, A. Matoussi, and L. Stoica, *Maximum principle and comparison theorem for quasilinear SPDE's*, Electronic Journal of Probability **14** (2009), no. 19, 500–530.
10. S. Assing, *Comparison of systems of stochastic partial differential equations*, Stoch. Proc. Appl **82** (1999), 259–282.
11. С. А. Мельник, *Теорема сравнения решений квазилинейных СДУЧП параболического типа со слабыми источниками*, Доповіді НАН України **1** (2011), 13–17.
12. *Математическая энциклопедия*, т. 1, "Сов. энциклопедия", Москва, 1977.
13. С. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, "Наука", Москва, 1986.

Отдел теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и механики НАНУ, ул. Розы Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина

Адрес электронной почты: s.a.melnik@yandex.ua

Поступила 23/11/2012