Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 161–176

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 161–176

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ МОДЕЛІ ГАУССОВОГО ОДНОРІДНОГО ТА ІЗОТРОПНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ У ПРОСТОРІ $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$

УДК 519.21

Н. В. ТРОШКІ

Анотація. Побудовано модель гауссового однорідного та ізотропного випадкового поля, яка наближає його з заданою надійністю та точністю в просторі $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$. Для знаходження моделі з заданою точністю та надійністю використовується теорія просторів $\mathrm{Sub}(\Omega)$.

Abstract. The model of some Gaussian homogenous izotropic random field which approximates it with a given accuracy and reliability in $L_p(T)$, $p \geq 1$, is constructed in this paper. The Sub-Gaussian theory of random variables is used for finding the model with given accuracy and reliability.

Аннотация. Построена модель гауссовых однородных и изотропных случайных полей, которая приближает его с заданной надежностью и точностью в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$. Для нахождения модели с заданной точностью и надежностью используется теория пространств $\mathrm{Sub}(\Omega)$.

1. Вступ

Існує багато методів моделювання випадкових полів. Ознайомитись з цими методами можна в книгах [1, 2] та роботах [3, 4]. Методи моделювання випадкових полів, які дозволяють будувати моделі, що наближають випадкові поля з заданою надійністю та точністю в певних функціональних просторах, зокрема, в просторах Орлича $L_U(\mathbb{T})$ та просторах $C(\mathbb{T})$ розглядались в книзі [5] та роботах [6]–[11]. В роботах [12] та [13] побудовано моделі випадкових процесів з простору $D_{V,W}$, а моделі процесів з простору $F_\psi(\Omega)$ отримані в роботі [14].

Дана робота присвячена побудові моделі гауссового однорідного та ізотропного випадкового поля, яка наближає його з заданою надійністю та точністю в просторі $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$. Запропоновано побудову моделі гауссового неперервного в середньому квадратичному, однорідного та ізотропного випадкового поля.

Робота складається з вступу, чотирьох розділів та висновків. У другому розділі наведено основні означення та теореми, які використовуються у роботі. Третій розділ присвячений побудові моделі однорідного та ізотропного випадкового поля. У четвертому розділі знайдено нові оцінки для функцій Бесселя. Питання точності та надійності моделювання випадкових полів розглянуто в п'ятому розділі.

2. Необхідні означення та властивості.

2.1. Субгауссові випадкові величини та їх властивості. Нехай $\{\Omega, \mathbf{B}, \mathsf{P}\}$ — стандартний ймовірнісний простір.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15; Secondary 60G07.

Ключові слова і фрази. Гауссові випадкові поля, однорідні та ізотропні поля, моделювання, точність та надійність.

Означення 2.1 ([15])**.** Випадкову величину ξ будемо називати субгаусовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Простір усіх субгаусових випадкових величин, заданих на стандартному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathbf{B}, \mathsf{P}\}$, будемо позначати $\mathrm{Sub}(\Omega)$. Простір $\mathrm{Sub}(\Omega)$ — простір Банаха з нормою $\tau(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0}\left[\frac{2\ln \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}}{\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Лема 2.1 ([15])**.** *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні субгаусові випадкові величини. Тоді*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\tau^2(\xi_k).$$

Лема 2.2 ([15])**.** *Нехай ξ — центрована випадкова величина, така що $\mathsf{E}\xi^{2k+1} = 0$ і $\theta(\xi) = \sup_{k\geq 1}\left[\frac{2^k k!}{(2k)!}\mathsf{E}\xi^{2k}\right]^{\frac{1}{2k}} < \infty$. Тоді $\xi \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ і $\tau(\xi) \leq \theta(\xi)$.*

2.2. **Однорідні та ізотропні випадкові поля.**

Означення 2.2 ([16])**.** Випадкове поле $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}^2\}$ називається однорідним в широкому розумінні в $\mathbf{R}^2$, якщо $\mathsf{E}X(t) = \mathrm{const}$, $t \in \mathbf{R}^2$, та

$$\mathsf{E}X(t)X(s) = B(t-s) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\lambda, t-s)}\,dF(\lambda), \qquad t, s \in \mathbf{R}^2.$$

Означення 2.3 ([16])**.** Нехай $SO(2)$ група обертань $\mathbf{R}^2$ навколо початку координат. Однорідне випадкове поле $X(t)$, $t \in \mathbf{R}^2$, називається ізотропним, якщо для кожного елемента g з групи $SO(2)$ для будь-яких $t, s \in \mathbf{R}^2$ виконується співвідношення

$$\mathsf{E}X(t)X(s) = \mathsf{E}X(gt)X(gs).$$

3. Побудова моделі однорідного та ізотропного випадкового поля

Нехай $X = \{X(t,x), t \in \mathbf{R}, x \in [0, 2\pi]\}$ — неперервне в середньому квадратичному, дійсне, гауссове, однорідне та ізотропне випадкове поле на $\mathbf{R}^2$. Тоді легко отримати, подібно до того як це робилось для комплексного поля в [16], таке зображення

$$X(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{2,k}(\lambda), \qquad (1)$$

де $\eta_{i,k}(\lambda)$, $i = 1, 2$, $k = 1, \ldots, \infty$, — незалежні гауссові процеси з незалежними приростами, $\mathsf{E}\eta_{i,k}(\lambda) = 0$, $\mathsf{E}(\eta_{i,k}(b) - \eta_{i,k}(c))^2 = F(b) - F(c)$, $b > c$, $F(\lambda)$ — спектральна функція поля, а $J_k(u)$ — функція Бесселя. З [17] відомо, що $J_k(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\varphi - u\sin\varphi)\,d\varphi$.

Побудуємо деяке розбиття $L = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_l < \lambda_{l+1}$, $\lambda_{N-1} = \Lambda$, $\lambda_N = \infty$ та $C = \max_{0<l\leq N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l} < \infty$.

За модель поля $X(t,x)$ будемо брати

$$\hat{X}(t,x) = \sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\eta_{1,k,l}J_k(t\zeta_l) + \sum_{k=1}^{M}\sin(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\eta_{2,k,l}J_k(t\zeta_l),$$

де $\eta_{i,k,l}$, $i = 1, 2$ — незалежні гауссові випадкові величини, $\eta_{i,k,l} = \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} d\eta_{i,k}(\lambda)$ такі, що $\mathsf{E}\eta_{i,k,l} = 0$, $\mathsf{E}\eta_{i,k,l}^2 = F(\lambda_{l+1}) - F(\lambda_l) = b_l^2$, ζ_l — незалежні випадкові величини,

що незалежать від $\eta_{i,k,l}$ та приймають значення на відрізках $[\lambda_l, \lambda_{l+1}]$, $b_l^2 > 0$ такі, що
$$F_l(\lambda) = P\{\zeta_l < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_l)}{F(\lambda_{l+1}) - F(\lambda_l)}.$$

Якщо $b_l^2 = 0$, тоді $\zeta_l = 0$ з ймовірністю одиниця. Для простоти вважатимемо, що $b_l^2 > 0$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$.

Отже $\hat{X}(t,x)$ матиме вигляд
$$\hat{X}(t,x) = \sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\zeta_l)\, d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\zeta_l)\, d\eta_{2,k}(\lambda). \tag{2}$$

Зауважимо, що $X(t,x)$ можна зобразити у вигляді
$$X(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\lambda)\, d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\lambda)\, d\eta_{2,k}(\lambda).$$

4. Попередні результати.

Позначимо
$$\begin{aligned}
\chi_M(t,x) &= X(t,x) - \hat{X}(t,x) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l))\, d\eta_{1,k}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{k=M+1}^{\infty} \cos(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda)\, d\eta_{1,k}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l))\, d\eta_{2,k}(\lambda) \\
&\quad + \sum_{k=M+1}^{\infty} \sin(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda)\, d\eta_{2,k}(\lambda) \\
&=: \chi_{M,1}(t,x) + \chi_{M,2}(t,x).
\end{aligned} \tag{3}$$

Тоді
$$\tau(\chi_M(t,x)) \le \tau(\chi_{M,1}(t,x)) + \tau(\chi_{M,2}(t,x)), \tag{4}$$
а
$$\begin{aligned}
\tau^2(\chi_{M,1}(t,x)) &\le \tau^2\left(\sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l))\, d\eta_{1,k}(\lambda)\right) \\
&\quad + \tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \cos(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda)\, d\eta_{1,k}(\lambda)\right), \\
\tau^2(\chi_{M,2}(t,x)) &\le \tau^2\left(\sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l))\, d\eta_{2,k}(\lambda)\right) \\
&\quad + \tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \sin(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda)\, d\eta_{2,k}(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Лема 4.1. *Для будь-яких $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ має місце наступне співвідношення*
$$|J_k(u)| \le 2^{1-\alpha} |u|^{\alpha} \pi^{\alpha} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Доведення.

$$
\begin{aligned}
|J_k(u)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \cos(k\varphi - u\sin\varphi)\,d\varphi\right| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \cos(k\varphi)\cos(u\sin\varphi)\,d\varphi + \int_0^\pi \sin(k\varphi)\sin(u\sin\varphi)\,d\varphi\right| \\
&= \frac{1}{\pi}|I_1+I_2| \le \frac{1}{\pi}(|I_1|+|I_2|).
\end{aligned}
$$

Оскільки в I_1 підінтегральна функція парна та періодична з періодом 2π, то можна здійснити наступні перетворення

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi \cos(k\varphi)\cos(u\sin\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi)\cos(u\sin\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \cos\left(k\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\cos\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi+\pi)\cos\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi)\cos\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi.
\end{aligned}
$$

Тоді інтеграл I_1 можна записати у вигляді

$$
I_1 = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi)\cos\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi)\cos(u\sin\varphi)\,d\varphi
$$

Знайдемо оцінку для інтегралу $|I_1|$.

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left|-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi)\cos\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \cos(k\varphi)\cos(u\sin\varphi)d\varphi\right| \\
&\le \frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \left|\cos(k\varphi)\left(\cos(u\sin\varphi)-\cos\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\right)\right|\,d\varphi \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \left|\cos(k\varphi)\cdot 2\sin\left(\frac{u\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)-\sin\varphi\right)}{2}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\times\sin\left(\frac{u\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)+\sin\varphi\right)}{2}\right)\right|d\varphi \\
&\le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \left|\sin\left(\frac{u(\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})-\sin\varphi)}{2}\right)\right|\,d\varphi \le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \left|\frac{u}{2}\right|^\alpha \left|\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)-\sin\varphi\right|^\alpha d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \left|\frac{u}{2}\right|^\alpha \left|2\cos\left(\frac{2\varphi+\frac{\pi}{k}}{2}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2k}\right|^\alpha d\varphi \\
&\le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |u|^\alpha \left|\sin\frac{\pi}{2k}\right|^\alpha d\varphi = |u|^\alpha\cdot\pi\left|\sin\frac{\pi}{2k}\right|^\alpha \le \pi\cdot|u|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha.
\end{aligned}
$$

Для інтегралу I_2 справджуватимуться наступні рівності

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\pi \sin(k\varphi)\sin(u\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin(k\varphi)\sin(u\sin\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin\left(k\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\sin\left(u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi - \pi))\sin\left(u\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin\left(u\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi.$$

Аналогічно як і в першому випадку, I_2 матиме наступний вигляд

$$I_2 = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin\left(u\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin(u\sin\varphi)\,d\varphi,$$

тоді для $|I_2|$ буде справедлива наступна нерівність

$$|I_2| \le \pi \cdot |u|^\alpha \left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha.$$

Звідси

$$|J_k(u)| = \frac{1}{\pi}|I_1 + I_2| \le \frac{1}{\pi}\left(\pi \cdot |u|^\alpha \left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha + \pi \cdot |u|^\alpha \left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha\right) = 2^{1-\alpha} \cdot |u|^\alpha \pi^\alpha \cdot \frac{1}{k^\alpha},$$

де $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$. □

Лема 4.2. *Для будь-яких* $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ *справедлива наступна нерівність*

$$|J_k(t\lambda) - J_k(tu)| \le 4^{1-\alpha} t^\alpha |\lambda - u|^\alpha \pi^\alpha \cdot \frac{1}{k^\alpha}\left(1 + \frac{t^\alpha|\lambda + u|^\alpha}{2^\alpha}\right).$$

Доведення. Використовуючи значення інтегралів I_1 та I_2 (див. доведення леми 4.1) отримаємо

$$\begin{aligned}
|J_k(t\lambda) - J_k(tu)| = \frac{1}{\pi}\Bigg|&\Bigg(-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi)\cos\left(t\lambda\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&+ \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi)\cos(t\lambda\sin\varphi)\,d\varphi \\
&+ \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi)\cos\left(tu\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&- \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi)\cos(tu\sin\varphi)\,d\varphi\Bigg) \\
&+ \Bigg(-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin\left(t\lambda\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&+ \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin(t\lambda\sin\varphi)\,d\varphi \\
&+ \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin\left(tu\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&- \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\sin(tu\sin\varphi)\,d\varphi\Bigg)\Bigg| \\
= \frac{1}{\pi}|S_1 + S_2| \le \frac{1}{\pi}\left(|S_1| + |S_2|\right).&
\end{aligned}$$

Знайдемо оцінку для виразу $|S_1|$:

$$\begin{aligned}
|S_1| = \Bigg|&-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\cos\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\cos(t\lambda\sin\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\cos\left(tu\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi \\
&\qquad -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\cos(tu\sin\varphi)\,d\varphi\Bigg| \\
\le{}& \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(k\varphi)|\,\Bigg|\cos(t\lambda\sin\varphi)-\cos(tu\sin\varphi) \\
&\qquad -\left(\cos\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)-\cos\left(tu\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\right)\Bigg|\,d\varphi \\
={}& \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(k\varphi)|\,\Bigg|\sin\frac{t(u+\lambda)\sin\varphi}{2}\sin\frac{t(u-\lambda)\sin\varphi}{2} \\
&\qquad -\sin\frac{t(u+\lambda)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)}{2}\sin\frac{t(u-\lambda)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\Bigg|\,d\varphi \\
={}& \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(k\varphi)|\,\Bigg|\sin\frac{t(u+\lambda)\sin\varphi}{2}\left(\sin\frac{t(u-\lambda)\sin\varphi}{2}-\sin\frac{t(u-\lambda)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)}{2}\right) \\
&\qquad +\sin\frac{t(u-\lambda)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)}{2} \\
&\qquad\qquad \times\left(\sin\frac{t(u+\lambda)\sin\varphi}{2}-\sin\frac{t(u+\lambda)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)}{2}\right)\Bigg|\,d\varphi \\
={}& \int_{-\pi}^{\pi}|\cos(k\varphi)|\,\Bigg|\sin\frac{t(u+\lambda)\sin\varphi}{2}\cdot\cos\frac{t(u-\lambda)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4} \\
&\qquad \times\sin\frac{t(u-\lambda)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4} \\
&\qquad +\sin\frac{t(u-\lambda)\sin(\varphi+\frac{w\pi}{k})}{2}\cdot\cos\frac{t(u+\lambda)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4} \\
&\qquad\qquad \times\sin\frac{t(u+\lambda)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\Bigg|\,d\varphi \\
\le{}& \int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\left|\sin\frac{t(u-\lambda)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\right| \\
&\qquad +\left|\sin\frac{t(u-\lambda)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\sin\frac{t(u+\lambda)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\right|\Bigg)\,d\varphi \\
\le{}& 2\pi\left(\frac{t^\alpha|\lambda-u|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha}+\frac{t^\alpha|\lambda-u|^\alpha t^\alpha|\lambda+u|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha\cdot 2^\alpha}\right) \\
={}& 2\pi\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha|\lambda-u|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{2^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Аналогічно, як і в першому випадку, знайдемо оцінку для $|S_2|$

$$\begin{aligned}
|S_2| = \Bigg|&-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\sin\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\sin(t\lambda\sin\varphi)\,d\varphi \\
&+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\sin\left(tu\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\,d\varphi-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\sin(tu\sin\varphi)\,d\varphi\Bigg|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(k\varphi)| \Big|(\sin(t\lambda\sin\varphi) - \sin(tu\sin\varphi)) - \left(\sin\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right) - \sin\left(tu\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\right)\Big|\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(k\varphi)| \Big|\cos\frac{t(\lambda+u)\sin\varphi}{2}\sin\frac{t(\lambda-u)\sin\varphi}{2} - \cos\frac{t(\lambda+u)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\sin\frac{t(\lambda-u)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\Big|\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(k\varphi)| \Big|\cos\frac{t(\lambda+u)\sin\varphi}{2}\left(\sin\frac{t(\lambda-u)\sin\varphi}{2} - \sin\frac{t(\lambda-u)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\right) + \sin\frac{t(\lambda-u)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2} \times \left(\cos\frac{t(\lambda+u)\sin\varphi}{2} - \cos\frac{t(\lambda+u)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\right)\Big|\,d\varphi$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(k\varphi)| \left(\left|\cos\frac{t(\lambda+u)\sin\varphi}{2}\cos\frac{t(\lambda-u)\left(\sin\varphi+\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)}{4} \times \sin\frac{t(\lambda-u)\left(\sin\varphi-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)}{4}\right| + \left|\sin\frac{t(\lambda-u)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)}{2}\sin\frac{t(\lambda+u)\left(\sin\varphi+\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)}{4} \times \sin\frac{t(\lambda+u)\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)-\sin\varphi\right)}{4}\right|\right) d\varphi$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left|\sin\frac{t(\lambda-u)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\right| + \left|\sin\frac{t(\lambda-u)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\sin\frac{t(\lambda+u)(\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})-\sin\varphi)}{4}\right|\right) d\varphi$$

$$\leq 2\pi\left(\frac{t^\alpha|\lambda-u|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha} + \frac{t^\alpha|\lambda-u|^\alpha t^\alpha|\lambda+u|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha\cdot 2^\alpha}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha |\lambda-u|^\alpha \left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{2^\alpha}\right).$$

Тоді матимемо

$$|J_k(t\lambda) - J_k(tu)| \leq 2\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha |\lambda-u|^\alpha \left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{2^\alpha}\right) + 2\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha |\lambda-u|^\alpha \left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{2^\alpha}\right) = 4^{1-\alpha}t^\alpha|\lambda-u|^\alpha\pi^\alpha\cdot\frac{1}{k^\alpha}\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{2^\alpha}\right). \qquad \square$$

Лема 4.3. *Для будь-яких $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ мають місце співвідношення*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l))\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}t^{2\alpha}\\
&\quad\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)\\
&\quad+4M(F(+\infty)-F(\Lambda)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\sin(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))\,d\eta_{2,k}(\lambda)\right)\\
&\quad\le \frac{1}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}t^{2\alpha}\\
&\quad\quad\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)\\
&\quad\quad+4M(F(+\infty)-F(\Lambda)),
\end{aligned}
$$

де $C=\max_{0<l\le N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}$.

Доведення.

$$
\begin{aligned}
&\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=0}^{N-1}\tau^2\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=0}^{N-1}\theta^2(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda))\\
&\quad=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=0}^{N-1}\sup_{m\ge1}\left[\frac{2^m\cdot m!}{(2m)!}E\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}
$$

Використовуючи те, що для центрованої гауссової випадкової величини ξ $\mathsf{E}\,\xi=0$, $\mathsf{E}\,\xi^{2k+1}=0$, $\mathsf{E}\,\xi^{2k}=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\sigma^{2k}$ та те, що випадкові величини ζ_l не залежать від $\eta_{i,k}(\lambda)$, $i=1,2$, тоді з теореми Фубіні (E_{ζ_l} — умовне математичне сподівання відносно ζ_l) та леми 4.2, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}=\mathsf{E}\,E_{\zeta_l}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\\
&\quad\le\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\,\mathsf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}|J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)|^2\,dF(\lambda)\right)^m\\
&\quad\le\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\,\mathsf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\left(4^{1-\alpha}t^\alpha|\lambda-\zeta_l|^\alpha\pi^\alpha\cdot\frac{1}{k^\alpha}\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+\zeta_l|^\alpha}{2^\alpha}\right)\right)^2dF(\lambda)\right)^m\\
&\quad=\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}4^{2m(1-\alpha)}t^{2m\alpha}\pi^{2m\alpha}\left(\frac{1}{k}\right)^{2m\alpha}\\
&\quad\quad\times\mathsf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}|\lambda-\zeta_l|^{2\alpha}\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+\zeta_l|^\alpha}{2^\alpha}\right)^2dF(\lambda)\right)^m
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \cdot 4^{2m(1-\alpha)} t^{2m\alpha} \pi^{2m\alpha} \left(\frac{1}{k}\right)^{2m\alpha}$$
$$\times \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} |\lambda - u|^{2\alpha} \left(1 + \frac{t^\alpha |\lambda + u|^\alpha}{2^\alpha}\right)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_l(u)$$
$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \cdot 4^{2m(1-\alpha)} t^{2m\alpha} \pi^{2m\alpha} \left(\frac{1}{k}\right)^{2m\alpha} |\lambda_{l+1} - \lambda_l|^{2m\alpha}$$
$$\times \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(1 + \frac{t^\alpha \lambda^\alpha |1 + \frac{u}{\lambda}|^\alpha}{2^\alpha}\right)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_l(u)$$
$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \cdot 4^{2m(1-\alpha)} t^{2m\alpha} \pi^{2m\alpha} \left(\frac{1}{k}\right)^{2m\alpha} |\lambda_{l+1} - \lambda_l|^{2m\alpha}$$
$$\times \left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(1 + \frac{t^\alpha \lambda^\alpha |1 + \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}|^\alpha}{2^\alpha}\right)^2 dF(\lambda) \right)^m$$
$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \cdot 4^{2m(1-\alpha)} t^{2m\alpha} \pi^{2m\alpha} \left(\frac{1}{k}\right)^{2m\alpha} |\lambda_{l+1} - \lambda_l|^{2m\alpha}$$
$$\times \left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(2 + 2 \cdot \frac{t^{2\alpha} \lambda^{2\alpha} (1 + C)^{2\alpha}}{2^{2\alpha}}\right) dF(\lambda) \right)^m$$
$$= \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \cdot 4^{2m(1-\alpha)} t^{2m\alpha} \pi^{2m\alpha} \left(\frac{1}{k}\right)^{2m\alpha} |\lambda_{l+1} - \lambda_l|^{2m\alpha}$$
$$\times \left(2b_l^2 + 2 \cdot \left(\frac{t(1 + C)}{2}\right)^{2\alpha} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right)^m .$$

Зауважимо, що

$$\left(\int_\Lambda^\infty \left(\int_\Lambda^\infty |J_k(t\lambda) - J_k(tu)|^2 \, dF(\lambda) \right)^m dF_l(u) \right)^{\frac{1}{m}}$$
$$= \left(\int_\Lambda^\infty \left(\int_\Lambda^\infty \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos(k\varphi - t\lambda \sin\varphi) \, d\varphi \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. - \int_0^\pi \cos(k\varphi - tu \sin\varphi) \, d\varphi \right) \right|^2 dF(\lambda) \right)^m dF_l(u) \right)^{\frac{1}{m}}$$
$$\leq \left(\int_\Lambda^\infty \left(\int_\Lambda^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big| \cos(k\varphi - t\lambda \sin\varphi) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \cos(k\varphi - tu \sin\varphi) \big| \, d\varphi \right)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_l(u) \right)^{\frac{1}{m}}$$
$$= \left(\int_\Lambda^\infty \left(\int_\Lambda^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| 2 \sin\left(k\varphi - \frac{t(\lambda + u) \sin\varphi}{2}\right) \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. \times \sin\left(\frac{t(\lambda - u) \sin\varphi}{2}\right) \right| d\varphi \right)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_l(u) \right)^{\frac{1}{m}}$$
$$\leq 4 \left(\int_\Lambda^\infty \left(\int_\Lambda^\infty dF(\lambda) \right)^m dF_l(u) \right)^{\frac{1}{m}} = 4(F(+\infty) - F(\Lambda)).$$

Звідси

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)$$
$$\le 4^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}$$
$$\times\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{1}{k^{2\alpha}}$$
$$\times\sup_{m\ge 1}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}|\lambda-u|^{2\alpha}\left(1+\frac{t^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{2^\alpha}\right)^2 dF(\lambda)\right)^m dF_l(u)\right)^{\frac{1}{m}}$$
$$\le\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^{2\alpha}}\cdot 2\cdot 4^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}$$
$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)$$
$$+4\sum_{k=1}^{M}(F(+\infty)-F(\Lambda)).$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^{2\alpha}}$, де $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$, можна оцінити наступним чином

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^{2\alpha}}\le 1+\sum_{k=2}^{M}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=1+\int_1^M\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=1+\left.\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right|_1^M$$
$$=\frac{2\alpha}{2\alpha-1}-\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}},$$

тоді

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)$$
$$\le\frac{1}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot 4^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}$$
$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)$$
$$+4M(F(+\infty)-F(\Lambda)).$$

Друга нерівність доводиться аналогічно. □

Лема 4.4. *Нехай при $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ збігається інтеграл $\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)<\infty$, тоді мають місце наступні нерівності*

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^\infty J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)$$
$$\le 2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right),$$
$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^\infty J_k(t\lambda)\,d\eta_{2,k}(\lambda)\right)$$
$$\le 2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right).$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
&\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\\
&\quad\le\sum_{k=M+1}^{\infty}\tau^2\left(\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\le\sum_{k=M+1}^{\infty}\theta^2\left(\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\\
&\quad=\sum_{k=M+1}^{\infty}\sup_{m\ge1}\left[\frac{2^m\cdot m!}{(2m)!}\mathsf{E}\left(\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}$$

Використавши лему 4.1, ми отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}&\le\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\left(\int_0^{\infty}|J_k(t\lambda)|^2\,dF(\lambda)\right)^m\\
&\le\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\left(\int_0^{\infty}\left(2^{1-\alpha}|t\lambda|^{\alpha}\pi^{\alpha}\cdot\frac{1}{k^{\alpha}}\right)^2dF(\lambda)\right)^m\\
&=\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\cdot\frac{2^{2m(1-\alpha)}t^{2m\alpha}\pi^{2m\alpha}}{k^{2m\alpha}}\left(\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)^m.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\le2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}}\left(\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right).$$

Оскільки ряд $\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}}$, де $\frac12<\alpha\le1$, можна оцінити наступним чином

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}}\le\sum_{k=M+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=\int_M^{\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\bigg|_M^{\infty}=\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}},$$

то

$$\begin{aligned}
&\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)\,d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\\
&\quad\le2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Друга нерівність доводиться аналогічно. □

Теорема 4.1. *Нехай $X(t,x)$ та $\hat{X}(t,x)$ визначені в (1) та (2) відповідно і нехай при $\frac12<\alpha\le1$ збігається інтеграл $\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)<\infty$. Тоді виконується*

$$\begin{aligned}
\tau^2(X(t,x)-\hat{X}(t,x))\le{}&\frac{4}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot4^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\\
&\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)\\
&+16M(F(+\infty)-F(\Lambda))\\
&+2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right),
\end{aligned}$$

де $C=\max_{0<l\le N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}$.

Доведення. Доведення теореми 4.1 випливає з (3) та (4), а також з лем 4.3 та 4.4. □

5. Точність та надійність моделювання випадкових полів.

Означення 5.1. ([5]) Нехай $\{\mathbb{T}, \mathfrak{B}, \mu\}$ — вимірний простір. Випадкове поле $\hat{X}(t)$ наближає поле $X(t)$ з надійністю $(1-\delta)$, $0<\delta<1$, та точністю $\varepsilon>0$ в $L_p(\mathbb{T})$, якщо має місце наступна нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\left(\int_{\mathbb{T}} |X(t)-\hat{X}(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon\right\} \le \delta.$$

Теорема 5.1. *Нехай $X=\{X(t), t\in\mathbb{T}\}$ — субгауссове випадкове поле, $\mathsf{E}\,X(t)=0$, $\tau^2(t)=\tau^2(X(t))=\mathsf{E}(X(t))^2$. Нехай існує інтеграл $\int_{\mathbb{T}}\left(\mathsf{E}(X(t))^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t)<\infty$, $p\ge 1$. Тоді з ймовірністю 1 існує $\int_{\mathbb{T}}|X(t)|^p\,d\mu(t)<\infty$, та для всіх ε таких, що $\varepsilon > c_p^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}}$, де $c_p=\int_{\mathbb{T}}(\tau(t))^p\,d\mu(t)$ має місце така нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|X(t)\|_{L_p}>\varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2c_p^{\frac{2}{p}}}\right\}.$$

Теорема 5.1 є частинним випадком теореми 2.1 з [18].

Теорема 5.2. *Нехай при $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ збігається інтеграл $\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)<\infty$ і нехай в моделі $\hat{X}(t,x)$, $t\in[0,T]$, $x\in[0,2\pi]$, що визначена в (2), розбиття L таке, що має місце наступна нерівність*

$$I \le \frac{\varepsilon^p}{\max\left(\left(2\ln\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{p}{2}}, p^{\frac{p}{2}}\right)},$$

де

$$\begin{aligned}
I = \frac{T^{p\alpha+1}}{p\alpha+1}\Bigg(&\frac{2^p D_p^3}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}+1}\cdot 4^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha+1}\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha} b_l^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&+ D_p 2^{p(1-\alpha)+1}\pi^{p\alpha+1}\left(\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg) \\
&+ \frac{T^{2p\alpha+1}}{2p\alpha+1}\frac{2^p D_p^3}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}+1}\cdot 4^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha+1}\left(\frac{1+C}{2}\right)^{p\alpha} \\
&\times\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\cdot\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}} \\
&+ T\cdot 2^{2p+1}\pi D_p^2 M^{\frac{p}{2}}(F(+\infty)-F(\Lambda))^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}$$

$$C=\max_{0<l\le N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}, \qquad D_p=\begin{cases}1, & \text{при } 0<\frac{p}{2}\le 1,\\ 2^{\frac{p}{2}-1}, & \text{при } \frac{p}{2}>1.\end{cases}$$

Тоді ця модель наближається до гауссового поля $X(t,x)$ з надійністю $1-\delta$, $0<\delta<1$, та точністю $\varepsilon>0$ у просторі $L_p(\mathbb{T})$, $p\ge 1$.

Доведення. Якщо

$$\varepsilon > \left(\int_0^T\int_0^{2\pi}\left(\tau(X(t,x)-\hat{X}(t,x))\right)^p dx\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot p^{\frac{1}{2}},$$

то за теоремою 5.1 та означенням 5.1 маємо

$$\mathsf{P}\left\{\| X(t,x)-\hat{X}(t,x) \|_{L_p} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2c_p^{\frac{2}{p}}}\right\} \le \delta,$$

де $c_p = \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(\tau(X(t,x)-\hat{X}(t,x))\big)^p \, dx\, dt$.

Остання нерівність справедлива тоді, коли виконується наступна умова

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(\tau(X(t,x)-\hat{X}(t,x))\Big)^p \, dx\, dt \le \frac{\varepsilon^p}{\left(2\ln\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{p}{2}}}.$$

Оскільки має місце $(a+b)^{\frac{p}{2}} \le D_p(a^{\frac{p}{2}} + b^{\frac{p}{2}})$, де

$$D_p = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{p}{2} \le 1, \\ 2^{\frac{p}{2}-1}, & \text{при} \frac{p}{2} > 1, \end{cases}$$

то за теоремою 4.1

$$\begin{aligned}
&\Big(\tau(X(t,x)-\hat{X}(t,x))\Big)^p \\
&\quad\le \Bigg[\frac{4}{2\alpha-1}\left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right) 2\cdot 4^{2(1-\alpha)} t^{2\alpha}\pi^{2\alpha} \\
&\qquad\quad \times \sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2 + \left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right) \\
&\qquad + 16M(F(+\infty)-F(\Lambda)) \\
&\qquad\qquad + 2^{2(1-\alpha)} t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right)\Bigg]^{\frac{p}{2}} \\
&\quad\le D_p\Bigg(\frac{4}{2\alpha-1}\left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right) 2\cdot 4^{2(1-\alpha)} t^{2\alpha}\pi^{2\alpha} \\
&\qquad\quad \times \sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2 + \left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right) \\
&\qquad\qquad + 16M(F(+\infty)-F(\Lambda))\Bigg)^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad + D_p 2^{p(1-\alpha)} t^{p\alpha}\pi^{p\alpha}\left(\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad\le D_p^2\Bigg(\left(\frac{4}{2\alpha-1}\right)^{\frac{p}{2}}\left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}}\cdot 4^{p(1-\alpha)} t^{p\alpha}\pi^{p\alpha} \\
&\qquad\quad \times \left(\sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2 + \left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right)\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad\qquad + 4^p M^{\frac{p}{2}}(F(+\infty)-F(\Lambda))^{\frac{p}{2}}\Bigg) \\
&\qquad + D_p 2^{p(1-\alpha)} t^{p\alpha}\pi^{p\alpha}\left(\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le D_p^2\Bigg(\frac{2^p D_p}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}}\cdot 4^{p(1-\alpha)}t^{p\alpha}\pi^{p\alpha}\\
&\qquad\times\Bigg(\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}b_l^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\qquad\qquad+t^{p\alpha}\left(\frac{1+C}{2}\right)^{p\alpha}\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg)\\
&\qquad\qquad\qquad+4^pM^{\frac{p}{2}}(F(+\infty)-F(\Lambda))^{\frac{p}{2}}\Bigg)\\
&\quad+D_p2^{p(1-\alpha)}t^{p\alpha}\pi^{p\alpha}\left(\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\\
&=\Bigg(\frac{2^pD_p^3}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{p}{2}}\cdot 4^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha}\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}b_l^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\qquad\qquad+D_p2^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha}\left(\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg)t^{p\alpha}\\
&\quad+\frac{2^pD_p^3}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{p}{2}}\cdot4^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha}\left(\frac{1+C}{2}\right)^{p\alpha}\\
&\quad\times\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}t^{2p\alpha}\\
&\quad+4^pD_p^2M^{\frac{p}{2}}(F(+\infty)-F(\Lambda))^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^{2\pi}\left(\tau(X(t,x)-\hat{X}(t,x))\right)^p\,dx\,dt\\
&\quad\le\frac{T^{p\alpha+1}}{p\alpha+1}\Bigg(\frac{2^pD_p^3}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\qquad\qquad\times2^{\frac{p}{2}+1}\cdot4^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha+1}\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}b_l^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\qquad\qquad+D_p2^{p(1-\alpha)+1}\pi^{p\alpha+1}\left(\frac{4}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg)\\
&\qquad+\frac{T^{2p\alpha+1}}{2p\alpha+1}\frac{2^pD_p^3}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{p}{2}+1}\cdot4^{p(1-\alpha)}\pi^{p\alpha+1}\left(\frac{1+C}{2}\right)^{p\alpha}\\
&\qquad\times\left(\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\cdot\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}\,dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\qquad+T\cdot2^{2p+1}\pi D_p^2M^{\frac{p}{2}}(F(+\infty)-F(\Lambda))^{\frac{p}{2}}\\
&\quad=I. \qquad\square
\end{aligned}
$$

Наслідок 5.1. *Нехай розбиття* $L = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$ *множини* $[0, \infty)$ *таке, що* $\lambda_l < \lambda_{l+1}$ *та* $\lambda_{l+1} - \lambda_l = \frac{\Lambda}{N-1}$. *Тоді теорема 5.2 виконуватиметься для*

$$I = \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{p\alpha} \cdot A + \left(\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot B + (F(+\infty) - F(\Lambda))^{\frac{p}{2}} \cdot H,$$

де

$$A = 2^p D_p^3 \left(\frac{2\alpha}{2\alpha-1}\right)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}+1} \cdot 4^{p(1-\alpha)} \pi^{p\alpha+1}$$
$$\times \left(\frac{T^{p\alpha+1}}{p\alpha+1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p\alpha} \left(\int_0^{\Lambda} \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}} \frac{T^{2p\alpha+1}}{2p\alpha+1}\right),$$

$$B = \frac{2^p D_p}{(2\alpha-1)^{\frac{p}{2}}} 2^{p(1-\alpha)+1} \pi^{p\alpha+1} \left(\int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}} \cdot \frac{T^{p\alpha+1}}{p\alpha+1},$$
$$H = 2^{2p+1} \cdot D_p^2 \cdot \pi \cdot M^{\frac{p}{2}} \cdot T.$$

6. Висновки

В даній роботі побудовано модель гауссового однорідного та ізотропного випадкового поля. Також знайдено оцінки за якими ця модель наближає поле з заданою надійністю та точністю в просторі $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$.

Література

1. С. М. Єрмаков, Г. А. Михайлов, *Курс статистического моделирования*, "Наука", Москва, 1982.
2. V. A. Ogorodnikov and S. M. Prigarin, *Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications*, VSP, Utrecht, 1996.
3. Yu. Kozachenko, T. Sottinen, and O. Vasylyk, *Simulation of weakly self-similar stationary increment* $Sub_\varphi(\Omega)$*-processes: a serias expansion approach*, Methodology and Computing in Applied Probability **7** (2005), no. 3, 379–400.
4. K. K. Sabelfeld and O. A. Kurbanmuradov, *Numerical statistical model of classical incompressible isotropic turbulence*, Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling **5** (1990), 251–263.
5. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, І. В. Розора, *Моделювання випадкових процесів та полів*, ВПЦ "Задруга", Київ, 2007.
6. А. М. Тегза, Н. В. Федорянич, *Точність та надійність моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля у просторі* $C(T)$ *з обмеженим спектром*, Науковий вісник Ужгородського університету **22** (2011), № 2, 142–147.
7. Yu. Kozachenko and I. Rozora, *Simulation of Gaussian stochastic processes*, Random Oper. Stoch. Eq. **11** (2003), no. 3, 275–296.
8. Yu. V. Kozachenko, I. V. Rozora, and Ye. V. Turchyn, *On an expansion of random processes in series*, Random Oper. Stoch. Eq. **15** (2007), no. 1, 15–33.
9. Ю. В. Козаченко, А. М. Тегза, *Застосування теорії* $Sub_\varphi(\Omega)$ *просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів*, Теор. ймовір. та матем. статист. **67** (2002), 71–87.
10. Н. В. Трошкі, *Побудова моделей гауссових випадкових полів з заданою надійністю та точністю в* $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика (2013), № 1–2, 149–156.
11. Yu. V. Kozachenko and O. O. Pogoriliak, *Simulation of Cox processes driven by random Gaussian field*, Methodology and Computing in Applied Probability **13** (2011), no. 3, 511–521.
12. Ю. В. Козаченко, О. М. Моклячук, *Випадкові процеси у просторах* $D_{V,W}$, Теор. ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 56–66.
13. Ю. В. Козаченко, О. М. Моклячук, *Вибіркова неперервність та моделювання випадкових процесів з просторів* $D_{V,W}$, Теор. ймовір. та матем. статист. **83** (2010), 80–91.
14. Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець, *Простори Банаха випадкових величин* $F_\psi(\Omega)$, Теор. ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 92–107.

15. В. В. Булдигін, Ю. В. Козаченко, *Метричні характеристики випадкових величин і процесів*, "ТВіМС", Київ, 1998.
16. М. Й. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1980.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: функции бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, "Наука", Москва, 1966.
18. Ю. В. Козаченко, О. Є. Каменщикова, *Апроксимація $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкових процесів у просторі $L_p(\mathbb{T})$*, Теор. ймовір. та матем. статист. **79** (2008), 73–78.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: FedoryanichNatali@ukr.net

Надійшла 11/03/2014