Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 90, 2014, стор. 177–181

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 90, 2014, pp. 177–181

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЧТИ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ИММИГРАЦИЕЙ

УДК 519.21

Я. М. ХУСАНБАЕВ

Аннотация. В данной работе рассматривается последовательность почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда среднее число потомков одной частицы стремится к единице со скоростью медленнее, чем n^{-1}. Приведены условия, при которых рассматриваемые процессы сходятся по вероятности к детерменированному процессу, а также доказана предельная теорема для флуктуации таких процессов.

Анотація. В даній роботі розглядається послідовність майже критичних гіллястих процесів з імміграцією у випадку, коли середнє число потомків однієї частинки прямує до одиниці із швидкістю, повільнішою за n^{-1}. Наведено умови, за яких вказані процеси збігаються за ймовірністю до детермінованого процесу, а також доведено теорему для флуктуацій таких процесів.

Abstract. In the present paper we investigate a sequence of nearly critical branching process with immigration in the case when the mean of offsprings number tends to 1 with the rate slowly than n^{-1}. We give conditions under which considered processes converge in probability to a determined process, and also prove limit theorems for the fluctuation of such processes.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\{\xi_{k,j}^{(n)}, k, j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varepsilon_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ — две независимые совокупности независимых, неотрицательных, целозначных и одинаково распределенных случайных величин. Рассмотрим последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией $\{X_k^{(n)}, k \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, определенных рекуррентными соотношениями

$$X_0^{(n)} = 0, \qquad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Пусть величины $\xi_{1,1}^{(n)}$ и $\varepsilon_1^{(n)}$ имеют конечные вторые моменты для всех $n \in \mathbb{N}$. Примем следующие обозначения

$$m_n = \mathsf{E}\,\xi_{1,1}^{(n)}, \qquad \sigma_n^2 = \mathbf{D}\,\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = \mathsf{E}\,\varepsilon_1^{(n)}, \quad b_n^2 = \mathbf{D}\,\varepsilon_1^{(n)},$$

$I(A)$ — индикатор события A, $\mathcal{F}_k^{(n)}$ будет обозначать σ-алгебру, порожденную величинами $X_0^{(n)}, X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}$. Далее знаки $\xrightarrow{\mathsf{P}}$ и $\Rightarrow$ будут обозначать сходимость по вероятности и слабую сходимость случайных величин, сооответственно.

Последовательность процессов $\{X_k^{(n)}, k \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ называют почти критической, если $m_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Введем в рассмотрение случайную ступенчатую функцию $X_n(t)$, $t \geq 0$, определенную соотношением $X_n(t) = X_{[nt]}^{(n)}$, $t \geq 0$, где знак $[a]$ означает целую часть числа a. Ясно, что траектории процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, принадлежат пространству Скорохода $D[0, \infty)$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J80; Secondary 62F12.

Ключевые слова и фразы. Branching process with immigration, week convergence.

В работах [1, 2] были исследованы условия слабой сходимости конечномерных распределений последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией к соответствующим распределениям процесса Иржины.

В случае, когда $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$ при $n \to \infty$, T. N. Sriram [3] установил условия, при которых процесс $n^{-1}X_n(t)$, $t \geq 0$ при $n \to \infty$ слабо сходится в $D[0,\infty)$ к диффузионному процессу $X(t)$, $t \geq 0$, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t)(\lambda + \alpha X(t))\,dt + \sigma\sqrt{X(t)}\,dW(t), \qquad t \geq 0,$$

с начальным условием $X(0) = 0$, где $W(t)$, $t \geq 0$ — стандартный винеровский процесс.

В работе [4] показано, что результат T. N. Sriram верен и в случае, когда $\sigma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а также при определенных условиях доказано, что при $n \to \infty$ флуктуация процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, слабо сходится в $D[0,\infty)$ к процессу Орнстейна–Уленбека.

В работе [5] также получена диффузионная аппроксимация для случайного процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, которая обобщает результат T. N. Sriram.

Целью данной работы является исследование асимптотического поведения процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, в случае, когда выполнено следующее условие:

A: $m_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o(d_n^{-1})$ при $n \to \infty$, для некоторого $\alpha < 0$, где d_n — последовательность положительных чисел такая, что $d_n \to \infty$ и $nd_n^{-1} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Сравнение результатов из работ [3]–[5] со сформулированными ниже результатами показывает, что асимптотика процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, при выполнении условия A существенно отличается от асимптотики процесса $X_n(t)$, $t \geq 0$, в случае, когда $m_n = 1 + O(n^{-\gamma})$, $\gamma \geq 1$, при $n \to \infty$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие A и $\sigma_n^2 \to 0$, $\lambda_n \to \lambda \geq 0$, $d_n^{-1}b_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $t > 0$ имеет место сходимость*

$$d_n^{-1}X_n(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} |\alpha|^{-1}\lambda \quad \text{при } n \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие A и следующие условия*

1) $d_n\sigma_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$*;*
2) $\lambda_n \to \lambda \geq 0$, $b_n^2 \to b^2 \geq 0$ *при* $n \to \infty$*;*
3) $\mathsf{E}\big(\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\big)^2 I\big(\big|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\big| > \varepsilon d_n^{1/2}\big) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Тогда для любого $t > 0$ случайная величина $d_n^{-1/2}(X_n(t) - \mathsf{E}\,X_n(t))$ слабо сходится при $n \to \infty$ к стандартной нормальной случайной величине с дисперсией $(2|\alpha|)^{-1}b^2$.

Доказательство теоремы 1. Соотношение (1) запишем в виде

$$X_k^{(n)} = m_n X_{k-1}^{(n)} + \lambda_n + M_k^{(n)}, \tag{2}$$

где $M_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}}\big(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\big) + \varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n$. Усредняя (2) получаем

$$\mathsf{E}\,X_k^{(n)} = m_n\,\mathsf{E}\,X_{k-1}^{(n)} + \lambda_n.$$

Отсюда имеем

$$\mathsf{E}\,X_k^{(n)} = \frac{1 - m_n^k}{1 - m_n}\,\lambda_n. \tag{3}$$

Так как, в силу условия A, $m_n^n \to 0$ при $n \to \infty$, то из (3) следует, что для любого $t > 0$

$$d_n^{-1}\,\mathsf{E}\,X_n(t) \to |\alpha|^{-1}\lambda \quad \text{при } n \to \infty. \tag{4}$$

Далее, нетрудно видеть, что решение уравнения (2) имеет вид

$$X_k^{(n)} = \frac{1-m_n^k}{1-m_n}\lambda_n + \sum_{j=1}^{k} m_n^{k-j} M_j^{(n)}. \tag{5}$$

Ясно, что последовательность $\left(M_k^{(n)}, \mathcal{F}_k^{(n)}\right)$, $k \geq 1$, образует квадратично интегрируемую мартингал-разность. Имеем

$$\mathsf{E}\left(\left(M_k^{(n)}\right)^2 \Big/ \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) = \sigma_n^2 X_{k-1}^{(n)} + b_n^2. \tag{6}$$

Поэтому из (5), учитывая (3), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\left(d_n^{-1} X_n(t)\right) &= d_n^{-2}\,\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{[nt]-j} M_j^{(n)}\right)^2 \\ &= \frac{\left(1-m_n^{[nt]}\right)\left(1-m_n^{[nt]-1}\right)}{(1-m_n)(1-m_n^2)} d_n^{-2}\lambda_n\sigma_n^2 + \frac{1-m_n^{2[nt]}}{1-m_n^2} d_n^{-2} b_n^2.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу условий теоремы, имеем

$$\mathbf{D}\left(d_n^{-1} X_n(t)\right) = \left(2\alpha^2\right)^{-1}\lambda_n\sigma_n^2 + (2\alpha)^{-1} d_n^{-1} b_n^2 + o(1) \to 0 \quad \text{при } n\to\infty \tag{7}$$

для любого $t > 0$. Теперь из (4), (7) и неравенства Чебышева приходим к выводу, что

$$d_n^{-1} X_n(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} |\alpha|^{-1}\lambda \quad \text{при } n\to\infty$$

для любого $t > 0$, что и завершает доказательство теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. Из соотношений (3) и (5) следует, что

$$X_n(t) - \mathsf{E}\,X_n(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} m^{[nt]-j} M_j^{(n)}.$$

Значит, $X_n(t) - \mathsf{E}\,X_n(t)$ является суммой мартингал-разностей. Тогда согласно теореме 7.1.11 [6] для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что для $t > 0$

$$C_n(t) = d_n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m^{2([nt]-j)}\,\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2 \Big/ \mathcal{F}_{j-1}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} (2\,|\alpha|)^{-1} b^2, \tag{8}$$

$$L_n(\varepsilon, t) = d_n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m^{2([nt]-j)}\,\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2 I\left(m_n^{[nt]-j}\left|M_j^{(n)}\right| > \varepsilon d_n^{1/2}\right)\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \tag{9}$$

при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Сначала докажем (8). Учитывая (6) имеем

$$C_n(t) = \sigma_n^2 d_n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m^{2([nt]-j)} X_{j-1}^{(n)} + d_n^{-1}\frac{1-m_n^{2[nt]}}{1-m_n^2} b_n^2. \tag{10}$$

Применяя (3), условие A и условия 1), 2) теоремы получаем

$$\sigma_n^2 d_n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-j)}\,\mathsf{E}\,X_{j-1}^{(n)} \leq \frac{\lambda_n\sigma_n^2}{d_n\,(1-m_n)\,(1-m_n^2)} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Отсюда и из неравенства Маркова следует, что

$$\sigma_n^2 d_n^{-1} \sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-j)} X_{j-1}^{(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{11}$$

Далее, в силу условий А и 2) имеем

$$d_n^{-1} \frac{1 - m_n^{2[nt]}}{1 - m_n^2} b_n^2 = -\frac{b_n^2}{2\alpha} + o(1) \to (2\,|\alpha|)^{-1}\, b^2 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отсюда и из (11) следует (8).

Теперь докажем (9). Положим

$$N_{n,j}^{(1)} = m_n^{[nt]-j} \sum_{k=1}^{X_{j-1}^{(n)}} \left(\xi_{j,k}^{(n)} - m_n\right), \qquad N_{n,j}^{(2)} = m_n^{[nt]-j} \left(\varepsilon_j^{(n)} - \lambda_n\right).$$

Тогда

$$m_n^{[nt]-j} M_j^{(n)} = N_{n,j}^{(1)} + N_{n,j}^{(2)}.$$

Применяя элементарное неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ и известное неравенство

$$I(|X+Y| > 2\varepsilon) \le I(|X| > \varepsilon) + I(|Y| > \varepsilon),$$

справедливое для любых двух случайных величин X, Y и для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$L_n(2\varepsilon, t) \le 2 \sum_{i,l=1}^{2} L_{i,l}^{(n)}(\varepsilon, t),$$

где

$$L_{i,l}^{(n)}(\varepsilon, t) = d_n^{-1} \sum_{j=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(\left(N_{n,j}^{(i)}\right)^2 I\left(\left|N_{n,j}^{(l)}\right| > \varepsilon d_n^{1/2}\right) \Big/ \mathcal{F}_{j-1}^{(n)}\right).$$

Следовательно, для доказательства (9) достаточно показать, что

$$L_{i,l}^{(n)}(\varepsilon, t) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty \tag{12}$$

для $i, l = 1, 2$. Рассмотрим случай $i = 1$.

Нетрудно видеть, что

$$L_{1,l}^{(n)}(\varepsilon, t) \le d_n^{-1} \sum_{j=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(\left(N_{n,j}^{(1)}\right)^2 \Big/ \mathcal{F}_{j-1}^{(n)}\right) = \sigma_n^2 d_n^{-1} \sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-j)} X_{j-1}^{(n)}.$$

Значит, (12) для случаев $i = l = 1$ и $i = 1$, $l = 2$ следует из (11).

Теперь рассмотрим случай $i = 2$, $l = 1$. Учитывая независимость величин $N_{n,j}^{(1)}$ и $N_{n,j}^{(2)}$, применяя условный вариант неравенства Чебышева [7] получаем

$$\mathsf{E}\left(\left(N_{n,j}^{(2)}\right)^2 I\left(\left|N_{n,j}^{(1)}\right| > \varepsilon d_n^{1/2}\right) \Big/ \mathcal{F}_{j-1}^{(n)}\right) \le \varepsilon^{-2} \sigma_n^2 b_n^2 d_n^{-1} m_n^{2([nt]-j)} X_{j-1}^{(n)}.$$

Отсюда, из (11) и условий 1), 2) следует справедливость (12) для случая $i = 2$, $l = 1$. Осталось рассмотреть случай $i = l = 2$. Учитывая одинаковую распределенность величин $\varepsilon_k^{(n)}$, $k \ge 1$, условия A и 3 имеем

$$L_{2,2}^{(n)}(\varepsilon, t) = d_n^{-1} \cdot \frac{1 - m_n^{2[nt]}}{1 - m_n^2} \mathsf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right)^2 I\left(\left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right| > \varepsilon d_n^{1/2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Список литературы

1. K. Kawazu and S. Watanabe, *Branching processes with immigration and related limit theorems*, Теория вероятн. и применен. **XVI** (1971), № 2, 34–51.
2. С. Алиев, *Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона с иммиграцией*, Укр. мат. ж. **37** (1985), 656–659.
3. T. N. Sriram, *Invalidity of bootstrap for critical branching process with immigration*, Ann. Statist. **22** (1994), 1013–1023.
4. M. Ispany, G. Pap, and M. C. A. Van Zuijlen, *Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean* Adv. Appl. Probab. **37** (2005), 523–528.
5. Я. М. Хусанбаев, *О сходимости ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона с иммиграцией к диффузионному*, Теор. ймовір. матем. статист. **79** (2008), 183–189.
6. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*, Москва, “Наука”, 1986.
7. А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, “Наука”, Москва, 1986.
8. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, “Наука”, Москва, 1977.

Институт математики при Национальном Университете Узбекистана, Ташкент
Адрес электронной почты: yakubjank@mail.ru

Поступила 07/01/2012