Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 182–195

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 182–195

ЗБІЖНІСТЬ СТОХАСТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО НЕПЕРЕРВНОГО ЛОКАЛЬНОГО МАРТИНГАЛА З УМОВНО НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ

УДК 519.21

АНДРІЙ ЮРАЧКІВСЬКИЙ

Анотація. Нехай при кожному $T>0$ тензорнозначний випадковий процес Y_T задається рівністю $Y_T(t)=\int_0^t dZ_T(s)\otimes\vartheta_T(s)$, де Z_T — $\mathbf{R}^d$-значний локально квадратично інтегровний мартингал відносно деякої фільтрації $\mathbb{F}_T$, а ϑ_T — $\mathbf{R}^d$-значний $\mathbb{F}_T$-передбачуваний випадковий процес такий, що при всіх t $\int_0^t|\vartheta_T(s)|^2\,d\operatorname{tr}\langle Z_T\rangle(s)<\infty$. Знайдено умови, за яких $(Y_T,\langle Y_T\rangle)\xrightarrow{\text{law}}(Y,\langle Y\rangle)$, де Y — неперервний локальний мартингал з умовно незалежними відносно $\langle Y\rangle$ приростами.

Abstract. Let, for each $T>0$, a tensor-valued stochastic process Y_T be defined by

$$Y_T(t)=\int_0^t dZ_T(s)\otimes\vartheta_T(s),$$

where Z_T is an $\mathbf{R}^d$-valued locally square integrable martingale with respect to some filtration $\mathbb{F}_T$, and ϑ_T is an $\mathbf{R}^d$-valued $\mathbb{F}_T$-predictable stochastic process such that $\int_0^t|\vartheta_T(s)|^2\,d\operatorname{tr}\langle Z_T\rangle(s)<\infty$ for all t. Found are conditions under which $(Y_T,\langle Y_T\rangle)\xrightarrow{\text{law}}(Y,\langle Y\rangle)$, where Y is a continuous local martingale with conditionally independent given $\langle Y\rangle$ increments.

Аннотация. Пусть при каждом$T>0$ тензорнозначный случайный процесс Y_T задается равенством $Y_T(t)=\int_0^t dZ_T(s)\otimes\vartheta_T(s)$, где Z_T — $\mathbf{R}^d$-значный локально квадратично интегрируемый мартингал относительно некоторой фильтрации $\mathbb{F}_T$, а ϑ_T — $\mathbf{R}^d$-значный $\mathbb{F}_T$-предсказуемый случайный процесс такой, что при всех t $\int_0^t|\vartheta_T(s)|^2\,d\operatorname{tr}\langle Z_T\rangle(s)<\infty$. Найдены условия, при которых $(Y_T,\langle Y_T\rangle)\xrightarrow{\text{law}}(Y,\langle Y\rangle)$, где Y — непрерывный локальный мартингал з условно независимыми относительно $\langle Y\rangle$ приращениями.

Вступ

Теореми про збіжність за розподілом послідовності семімартингалів до процесу з умовно незалежними приростами — класика стохастичного аналізу [1, 2]. У названих монографіях, а також у статтях на цю тему (див., наприклад, [3]) накладається умова збіжності передбачуваних характеристик за імовірністю. Це припущення не просто обмежливе, а навіть неприродне при дослідженні збіжності випадкових процесів за розподілом, коли спільного для всіх них імовірнісного простору в постановці задачі немає, а передбачувані характеристики граничного процесу випадкові. У роботі [4] знайдено достатню умову асимптотичної незалежності приростів допграничних процесів (за припущення асимптотичної малості їхніх стрибків), у якій не фігурує спільний для всіх процесів імовірнісний простір. У загальному випадку перевірити ту умову складно, але приклад 4.8 там же ілюструє ситуацію, коли перевірка не становить труднощів. Мета даної статті — знайти для одного класу локально квадратично інтегровних мартингалів загальніші ніж у тому прикладі і водночас ефективно перевірні́ достатні умови асимптотичної незалежності приростів. Ця властивість допграничних процесів дозволить, спираючись на результати роботи [4], замінити

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F17; Secondary 60G44.
Ключові слова і фрази. Мартингал, збіжність, тензор.

вимогу збіжності квадратичних характеристик за імовірністю вимогою збіжності за розподілом.

Скрізь нижче $\mathbb{T}$ означає одну з двох множин — додатних дійсних чисел або натуральних чисел. Пригадаймо, що довільна функція на напрямленій множині (у ролі якої в нас виступатиме $\mathbb{T}$) називається *напрямленістю* (net). Окремим випадком напрямленості є послідовність (функція на $\mathbf{N}$). Розглядаючи напрямленість $(X_T, T \in \mathbb{T})$ випадкових процесів, вважаємо імовірнісні простори взагалі кажучи різними при різних T. Таким чином, у виразах, де фігурує X_T або Y_T, під P і E слід розуміти P_T і E_T відповідно.

Усі вектори вважаємо, якщо не застережено супротивне, стовпчиками. Усі матриці за умовчанням квадратні. Норма вектора, позначувана як і модуль числа, — евклідова, норма матриці — операторна. Через $\mathbf{R}^d$ і $\mathbf{R}^{d*}$ позначаємо простори d-мірних вектор-стовпчиків і вектор-рядків відповідно, а через $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}_+$ клас усіх симетричних квадратних матриць фіксованого, визначеного контекстом, розміру з дійсними елементами і його підклас невід'ємних (у спектральному розумінні) матриць. Компоненти вектор-рядків нумеруємо нижнім індексом, а вектор-стовпчиків — верхнім. Оскільки матриці фіксованого розміру є елементами скінченновимірного простору, то в разі потреби розглядаємо їх як вектори, заміняючи знак норми знаком модуля. Те саме стосується і розгляданих нижче тензорів.

У статті використовується апарат тензорної алгебри в обсязі § 24 [5] або § 23 і § 24 [6]. Операція тензорного множення тензорів позначається $\otimes$. Зокрема, для $(0,1)$-тензорів, або, що те саме, вектор-стовпчиків, $a \otimes b = ab^\top$. Читач, бажаючий зосередитись на суто імовірнісних аспектах міркувань і висновків, може обійтись без тензорів, як і взагалі без лінійної алгебри, якщо вважатиме розмірності d і p нижче рівними одиниці (тоді тензорне множення перетвориться на звичайне множення чисел). Однак слід мати на увазі, що оцінка матричного параметра випадкового процесу це випадковий тензор, а як функція від змінної тривалості спостерігання — тензорнозначний випадковий процес. Отже, якщо ми хочемо, щоб функціональні граничні теореми були придатними для дослідження асимптотичних властивостей оцінок параметрів (у тому числі матричних) випадкових процесів, то обмежуватися скалярним випадком не можна.

Нехай X_T, $T \in \mathbb{T}$, і X — $\mathbf{R}^p$-значні або $\mathfrak{S}$-значні випадкові процеси з траєкторіями в скороходовому просторі D (тобто неперервні справа процеси на $\mathbf{R}_+$ без розривів другого роду). Пишемо $X_T \xrightarrow{D} X$, якщо породжені процесами X_T міри на борелевій σ-алгебрі в D слабко збігаються при $T \to \infty$ до міри, породженої процесом X. Якщо при цьому X неперервний, то пишемо $X_T \xrightarrow{C} X$. Напрямленість (X_T) називається *відносно компактною* (в. к.) *в* D (*в* C), якщо кожна її конфінальна піднапрямленість містить, у свою чергу, збіжну у відповідному розумінні конфінальну піднапрямленість. Збіжність за розподілом в $\mathbf{R}^p$ позначаємо $\xrightarrow{\mathrm{d}}$.

Для $f \in D$ позначаємо $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$; $\int_{t_1}^{t_2}$ розуміємо як $\int_{]t_1,t_2]}$. Параметр T служить для розрізнення випадкових процесів і ніколи не означає часову змінну. Останню записуємо в дужках після символа процесу, як, наприклад, у формулі (1) нижче. У записуваних за допомогою знака $\to$ асимптотичних співвідношеннях T за умовчанням прямує до нескінченності.

Словосполуку "локально квадратично інтегровний" скорочуємо до "л. к. і.". Усі л. к. і. мартингали вважаємо за умовчанням неперервними справа і маючими границі зліва. Зважаючи на теорему 1.3.2 [7] це припущення не зменшує загальності.

Напрямленість (Y_T) тензорнозначних випадкових процесів, для якої ми знайдемо умови збіжності до процесу Y з умовно незалежними приростами, задається рівністю

$$Y_T(t) = \int_0^t dZ_T(s) \otimes \vartheta_T(s), \tag{1}$$

де при кожному T Z_T — $\mathbf{R}^d$-значний л. к. і. мартингал відносно деякого потоку (фільтрації) $\mathbb{F}_T$ на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а ϑ_T — $\mathbf{R}^d$-значний $\mathbb{F}_T$-передбачуваний випадковий процес такий, що

$$\int_0^t |\vartheta_T(s)|^2 \, d\operatorname{tr}\langle Z_T\rangle(s) < \infty, \qquad t \in \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

Основні результати — теореми 4–6 — стверджують не тільки співвідношення $Y_T \xrightarrow{C} Y$. Для дослідження асимптотичних властивостей оцінок параметрів випадкових процесів істотна вся сукупність висновків теорем. Висновки не спираються на вищезгадане неприродне припущення, а σ-алгебра, відносно якої прирости граничного процесу умовно незалежні, виникає так само в результаті граничного переходу і є узагальненням σ-алгебри інваріантних множин в ергодичній теоремі.

1. Підготовчі результати

Лема 1. *Для всякої $d \times d$-матриці $B \in \mathfrak{S}_+$*

$$\|B\| \leqslant \operatorname{tr} B \leqslant d \cdot \|B\|.$$

Доведення. Норма дійсної симетричної матриці дорівнює, як відомо, найбільшому з модулів її власних чисел. □

Наслідок 1. *Для всякої $d \times d$-матриці A*

$$\operatorname{tr} AA^\top \leqslant d \cdot \|A\|^2.$$

Введемо в просторі чотиривалентних тензорів норму так, щоб для довільних квадратних матриць матриць A і B було $\|A \otimes B\| = \|A\| \, \|B\|$. Із цього задання і леми 1 випливає

Наслідок 2. *Нехай A і B — матриці однакового розміру, $B \in \mathfrak{S}_+$. Тоді $\|A \otimes B\| \leqslant \|A\| \operatorname{tr} B$.*

Для матриць A і B пишемо $A \leqslant B$, якщо $B - A \in \mathfrak{S}_+$.

Лема 2. *Нехай $D_1(\cdot)$ і $D_2(\cdot)$ — вимірні матричнозначні функції на $]t_1, t_2]$, із яких друга зростаюча і неперервна справа. Тоді*

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} dD_2(s) \otimes D_1(s) \right\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|D_1(s)\| \, d\operatorname{tr} D_2(s)$$

за умови скінченності правої частини нерівності.

Доведення. Для кусково сталої $D_2(\cdot)$ (тоді інтеграли перетворюються на суми) це випливає з наслідку 2. Перехід до загального випадку стандартний. □

Для довільної матриці A через $\underline{A}$ позначаємо вектор, утворений записаними один під одним стовпчиками її.

Лема 3. *Для всякої $d \times d$-матриці A $|\underline{A}| \leqslant \sqrt{d}\, \|A\|$.*

Доведення. Позначивши i-й стопчик матриці через a_i, напишемо очевидну нерівність $\sum |a_i|^2 = \operatorname{tr} AA^\top$. Залишається скористатися наслідком 1. □

Замість $\underline{Y_T}$ пишемо $\underline{Y}_T$. Наступне твердження очевидне.

Лема 4. *Нехай при кожному $T > 0$ Y_T — $(0,2)$-тензорнозначний л. к. і. мартингал. Припустимо, що існує векторнозначний л. к. і. мартингал X такий, що $(\underline{Y}_T, \langle \underline{Y}_T \rangle) \xrightarrow{D} (X, \langle X \rangle)$. Тоді $(Y_T, \langle Y_T \rangle) \xrightarrow{D} (Y, \langle Y \rangle)$, де Y – $(0,2)$-тензорнозначний л. к. і. мартингал такий, що $\underline{Y} = X$.*

Позначимо $\sharp$ лінійну операцію в просторі чотиривалентних тензорів, діючу за правилом
$$(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4)^\sharp = a_1 \otimes a_3 \otimes a_2 \otimes a_4.$$
Якщо Z_1 і Z_2 — тензорнозначні л. к. і. мартингали, то компенсатор процесу $Z_1 \otimes Z_2$ позначаємо $\langle Z_1, Z_2 \rangle$. Замість $\langle Z, Z \rangle$ пишемо $\langle Z \rangle$.

Лема 5. *Нехай Z — $\mathbf{R}^d$-значний л. к. і. мартингал відносно потоку σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \in \mathbf{R}_+)$, а ϑ — $\mathbf{R}^d$-значний $\mathbb{F}$-передбачуваний випадковий процес такий, що для кожного t $\int_0^t |\vartheta(s)|^2 \, d \operatorname{tr}\langle Z \rangle(s) < \infty$. Тоді:*

1) *для кожного t існує стохастичний інтеграл $Y(t) \equiv \int_0^t dZ(s) \otimes \vartheta(s)$;*
2) *Y — л. к. і. мартингал із квадратичною характеристикою*
$$\langle Y \rangle(t) = \left(\int_0^t d\langle Z \rangle(s) \otimes \vartheta(s)^{\otimes 2} \right)^\sharp; \tag{3}$$
3) *$\operatorname{tr} \langle \underline{Y} \rangle (t) = \int_0^t |\vartheta(s)|^2 \, d \operatorname{tr}\langle Z \rangle(s)$.*

Доведення. У випадку $d = 1$ перші два твердження є складовими частинами теореми I.4.40 [2]. Очевидно, перше твердження залишається в силі і в загальному випадку. Так само очевидно, що й при $d > 1$ процес Y буде л. к. і. мартингалом, раз це справджується при $d = 1$.

При довільному d друге твердження справджується для інтеграндів виду
$$\upsilon(t) = \alpha_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i I_{]s_{i-1}, s_i]}(t),$$
де $0 = s_0 < \cdots < s_m$ і при кожному $i \in \{0, \ldots, m\}$ α_i — $\mathbf{R}^d$-значна $\mathcal{F}(s_{(i-1)+})$-вимірна випадкова величина. Справді, в цьому випадку
$$Y(t) = \sum_{i=1}^m (Z(s_i \wedge t) - Z(s_{i-1} \wedge t)) \otimes \alpha_i,$$
$$Y^{\otimes 2}(t) = \left(\sum_{i,j=1}^m ((Z(s_i \wedge t) - Z(s_{i-1} \wedge t)) \otimes (Z(s_j \wedge t) - Z(s_{j-1} \wedge t))) \otimes \alpha_i \otimes \alpha_j \right)^\sharp,$$
звідки
$$\langle \Upsilon \rangle(t) = \left(\sum_{i=1}^m (\langle Z \rangle(s_i \wedge t) - \langle Z \rangle(s_{i-1} \wedge t)) \otimes \alpha_i^{\otimes 2} \right)^\sharp.$$
А це не що інше, як рівність (3) для такого ϑ. Перехід до загального випадку стандартний.

За побудовою вектор $\underline{Y}(t)$ складається із записаних один під одним стовпчиків $\int_0^t \vartheta(s) \, dZ_1(s), \ldots, \int_0^t \vartheta(s) \, dZ_d(s)$, де Z_i — i-та компонента векторного процесу Z. Тому $d^2 \times d^2$-матриця $\langle \underline{Y} \rangle (t)$ складається з d^2 блоків $\int_0^t \vartheta(s)^{\otimes 2} \, d\langle Z_i, Z_j \rangle(s)$ розміру $d \times d$. Отже,
$$\operatorname{tr} \langle \underline{Y} \rangle (t) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \operatorname{tr} \upsilon(s)^{\otimes 2} \;\; d\langle Z_i \rangle(s).$$
Щоб вивести звідси третє твердження леми, достатньо зауважити, що для довільного $x \in \mathbf{R}^d$ $\operatorname{tr} x^{\otimes 2} = |x|^2$. $\square$

Записавши для довільних $a, b \in \mathbf{R}^d$ і $u, v \in \mathbf{R}^{d*}$ очевидні рівності

$$(ua)(vb) = uab^\top v^\top = u(a \otimes b)v^\top$$

і повторивши з очевидними змінами доведення леми 5, доходимо такого висновку.

Лема 6. *Нехай ζ — $\mathbf{R}^d$-значний л. к. і. мартингал відносно потоку σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \in \mathbf{R}_+)$, а ψ — $\mathbf{R}^{d*}$-значний $\mathbb{F}$-передбачуваний випадковий процес такий, що для кожного t $\int_0^t |\psi(s)|^2 \, d \operatorname{tr}\langle\zeta\rangle(s) < \infty$. Тоді:*

1) *для кожного t існує стохастичний інтеграл $\Psi(t) \equiv \int_0^t \psi(s) \, d\zeta(s)$;*
2) *Ψ — л. к. і. мартингал відносно $\mathbb{F}$ із квадратичною характеристикою*

$$\langle\Psi\rangle(t) = \int_0^t \psi(s) \, d\langle\zeta\rangle(s)\psi(s)^\top.$$

Наслідок 3. *Нехай ζ, ψ, Ψ такі, як у лемі 6, і нехай $\eta(t) = \int_0^t \chi(s)\psi(s) \, d\zeta(s)$, де χ – $\mathbb{F}$-передбачуваний $[0, 1]$-значний випадковий процес. Тоді для будь-яких $t_2 > t_1 \geqslant 0$*

$$\langle\eta\rangle(t_2) - \langle\eta\rangle(t_1) \leqslant \langle\Psi\rangle(t_2) - \langle\Psi\rangle(t_1).$$

Позначимо $\Pi(t, c) = \{(t_1, t_2) \colon (t_2 - c)_+ \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t\}$ і пригадаємо відомий критерій відносної компактності в C (див., наприклад, реченець (Proposition) VI.3.26 у [2] разом із поясненнями VI.3.25 і VI.3.9 там же).

Теорема 1. *Для того щоб напрямленість $(\xi_T, T \in \mathbb{T})$ випадкових процесів із траєкторіями в D була в. к. в C, необхідно і достатньо, щоб для всіх додатних t і ε справджувалися співвідношення*

$$\lim_{L\to\infty} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t} |\xi_T(s)| > L\right\} = 0,$$

$$\lim_{c\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{(t_1,t_2)\in\Pi(t,c)} |\xi_T(t_2) - \xi_T(t_1)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

(У літературі цю теорему формулюють і доводять для випадку $\mathbb{T} = \mathbf{N}$, до якого випадок $\mathbb{T} = \{T \in \mathbf{R} \colon T > 0\}$ зводиться очевидним чином).

Наслідок 4 (з теореми 1 і леми 1)**.** *Відносна компактність у C напрямленості (V_T) зростаючих неперервних справа $\mathfrak{S}$-значних випадкових процесів рівносильна цій же властивості напрямленості* $(\operatorname{tr} V_T)$.

Із теореми 1, леми 2 і очевидної рівності $|\varphi_T(s)|^2 \leqslant N^2 + |\varphi_T(s)|^2 I\{|\varphi_T(s)| > N\}$ одержуємо

Наслідок 5. *Нехай при кожному $T \in \mathbb{T}$ випадковий процес U_T задається рівністю*

$$U_T(t) = \int_0^t dH_T(s) \otimes \varphi_T(s)^{\otimes 2}, \tag{4}$$

де H_T — зростаючий неперервний справа $\mathfrak{S}$-значний випадковий процес, а φ_T — $\mathbf{R}^d$-значний вимірний випадковий процес. Припустимо, що напрямленість $(\operatorname{tr} H_T)$ *в. к. в C і для всіх додатних ε, t*

$$\lim_{N\to\infty} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left\{\int_0^t |\varphi_T(s)|^2 I\{|\varphi_T(s)| > N\} \, d \operatorname{tr} H_T(s) > \varepsilon\right\} = 0. \tag{5}$$

Тоді напрямленість (U_T) теж в. к. в C.

Позначимо $S = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < s < t\}$. Нехай $(\Theta, \mathcal{E})$ — вимірний простір, а $\mathbb{H} \equiv (\mathcal{H}(t), t \in \mathbf{R}_+)$ — фільтрація на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ (який може залежати від T). Назвемо Θ-значну випадкову функцію $\varkappa$ на $S \times \Theta$ *рівномірно* $(\mathbb{H}, \mathcal{E})$-*узгодженою*, якщо для будь-яких $t > s > 0$ випадкова функція $\varkappa(s,t,\cdot)$ змінної $\theta \in \Theta$ $\mathcal{H}(s) \otimes \mathcal{E}$-вимірна по $(\omega, \theta) \in \Omega \times \Theta$.

Борелеву σ-алгебру в метричному просторі $\mathfrak{X}$ позначаємо $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$.

Лема 7. *Нехай при кожному $T \in \mathbb{T}$ Q_T — $\mathbb{F}_T$-узгоджений випадковий процес зі значеннями в деякому метричному просторі $(\mathfrak{X}, \varrho)$. Припустимо, що існує сім'я $\{\varkappa_T^r, r > 0, T \in \mathbb{T}\}$ $\mathfrak{X}$-значних випадкових функцій на $S \times \mathfrak{X}$ така, що кожна $\varkappa_T^r$ рівномірно $(\mathbb{F}_T, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$-узгоджена і для будь-яких $t > s > 0$, $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left\{\varrho\big(Q_T(t), \varkappa_T^r(s,t,Q_T(s))\big) > \varepsilon\right\} = 0. \tag{6}$$

Тоді для будь-яких $t > s > 0$ і обмеженої рівномірно неперервної функції $f \colon \mathfrak{X} \to \mathbf{R}$

$$\mathsf{E}(f(Q_T(t)) \mid \mathcal{F}_T(s)) - f(Q_T(t)) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{7}$$

Доведення. Зафіксувавши $t > s > 0$ і обмежену рівномірно неперервну функцію на $\mathfrak{X}$, позначимо $q_T^r = \varkappa_T^r(s,t,Q_T(s)), \gamma_T^r = f(Q_T(t)) - f(q_T^r)$. Із (6) і очевидної нерівності

$$\mathsf{E}\gamma_T^r \leqslant 2\|f\|_\infty \mathsf{P}\{\varrho(Q_T(t), q_T^r) > \varepsilon\} + \sup_{\varrho(x,y)\leqslant\varepsilon} |f(x) - f(y)|$$

маємо

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{E}\,|\gamma_T^r| = 0 \tag{8}$$

і тим більше для будь-яких σ-алгебр $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{F}_T$

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{E}\,|\mathsf{E}\,(\gamma_T^r \mid \mathcal{G}_T)| = 0.$$

Зважаючи на $\mathbb{F}_T$-узгодженість Q_T і рівномірну $(\mathbb{F}_T, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$-узгодженість $\varkappa_T^r$ випадкова величина q_T^r $\mathcal{F}_T(s)$-вимірна, тож при $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T(s)$ останнє співвідношення перетворюється на

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{E}|\mathsf{E}(f(Q_T(t)) \mid \mathcal{F}_T(s)) - f(q_T^r)| = 0.$$

Зіставивши це з (8), одержимо

$$\lim_{T\to\infty} \mathsf{E}|\mathsf{E}(f(Q_T(t)) \mid \mathcal{F}_T(s)) - f(Q_T(t))| = 0,$$

що є еквівалентною формою (7). □

Позначимо $g_r(x) = (|x| \vee r)\operatorname{sgn} x$, $h_r(x) = (|x| \vee r)^{-1} \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbf{R}$, $r > 0$.

Лема 8. *Нехай (R_T) і (U_T) — напрямленості $\mathbf{R}$-значних і, відповідно, $\mathbf{R}^p$-значних випадкових процесів, а (Ξ_T) – напрямленість $\mathbf{R}^p$-значних випадкових величин такі, що при всіх $t > 0$*

$$\lim_{L\to\infty} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{|R_T(t)| > L\} = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{|R_T(t)| \leqslant r\} = 0, \tag{10}$$

$$U_T(t) - \Xi_T R_T(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{11}$$

Тоді для будь-яких $t > s > 0$ і $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{|U_T(t) - g_r(R_T(t))h_r(R_T(s))U_T(s)| > \varepsilon\} = 0. \tag{12}$$

Доведення. Позначимо $J_T(t) = U_T(t)/R_T(t)$ (якщо $R_T(t) \neq 0$). Очевидно,

$$U_T(t) - g_r(R_T(t))h_r(R_T(s))U_T(s) = R_T(t)(J_T(t) - J_T(s)) \quad \text{при } |R_T(t)| \wedge |R_T(s)| \geqslant r.$$

Тому

$$\begin{aligned}&\{|U_T(t) - g_r(R_T(t))h_r(R_T(s))U_T(s)| > \varepsilon\}\\ &\qquad \subset \{|R_T(t)| \leqslant r\} \cup \{|R_T(s)| \leqslant r\} \cup \{|R_T(t)|\ |J_T(t) - J_T(s)| > \varepsilon\} \cap \{|R_T(t)| > r\}\\ &\qquad\quad \cap \{|R_T(s)| > r\}.\end{aligned}$$

При цьому, очевидно, для будь-якого $L > 0$

$$\{|R_T(t)|\ |J_T(t) - J_T(s)| > \varepsilon\} \subset \{|R_T(t)| > L\} \cup \{|J_T(t) - J_T(s)| > \varepsilon/L\}.$$

Отже, для будь-яких $t > s > 0$ і додатних ε, r, L

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{|U_T(t) - g_r(R_T(t))h_r(R_T(s))U_T(s)| > \varepsilon\}\\ &\quad \leqslant \mathsf{P}\{|R_T(t)| \leqslant r\} + \{|R_T(s)| \leqslant r\} + \mathsf{P}\{|R_T(t)| > L\}\\ &\quad\quad + \mathsf{P}\{|J_T(t) - \Xi_T| > \varepsilon/2L, |R_T(t)| > r\}\\ &\quad\quad + \mathsf{P}\{|J_T(s) - \Xi_T| > \varepsilon/2L, |R_T(s)| > r\},\end{aligned}$$

відтак, з огляду на (9) і (10), достатньо показати, що для будь-яких додатних t, δ і r

$$\lim_{T\to\infty} \mathsf{P}\{|J_T(t) - \Xi_T| > \delta,\ |R_T(t)| > r\} = 0.$$

А це випливає з (11) і очевидного включення $\{|R_T(t)| > r\} \cap \{|J_T(t) - \Xi_T| > \delta\} \subset \{|U_T(t) - \Xi_T R_T(t)| > r\delta\}$. □

Аналогічно і значно простіше доводиться

Лема 9. *Нехай (R_T) і (U_T) — напрямленості $\mathbf{R}$-значних і, відповідно, $\mathbf{R}^p$-значних випадкових процесів, а (Ξ_T) – напрямленість $\mathbf{R}^p$-значних випадкових величин такі, що при всіх $t > 0$ справджуються співвідношення (9) і (11). Припустимо також, що $R_T(t) \neq 0$ при всіх $t > 0$ і достатньо великих $T \in \mathbb{T}$. Тоді для будь-яких $t > s > 0$ і $\varepsilon > 0$*

$$U_T(t) - R_T(t)R_T(s)^{-1}U_T(s) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

2. Загальні теореми про асимптотичну умовну незалежність приростів л. к. і. мартингалів

У цьому розділі дві теореми роботи [4] переформульовано в зручнішій для застосування формі. У доведенні основних результатів використовується тільки друга, а перша допомагає краще зрозуміти смисл ключового припущення, яке формулюється так:

A. Існує сім'я $\{\phi_T^r, r > 0, T \in \mathbb{T}\}$ $\mathfrak{S}_+$-значних випадкових функцій на $S \times \mathfrak{S}_+$ така, що кожна ϕ_T^r рівномірно $(\mathbb{F}_T, \mathcal{B}(\mathfrak{S}_+))$-узгоджена і для будь-яких $t > s > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\|\langle X_T\rangle(t) - \phi_T^r(s,t,\langle X_T\rangle(s))\| > \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 2. *Нехай при кожному $T \in \mathbb{T}$ $X_T, X_T^1, X_T^2, \dots$ — $\mathbf{R}^p$-значні л. к. і. мартингали відносно потоку $\mathbb{F}_T = (\mathcal{F}_T(t), t \in \mathbf{R}_+)$. Припустимо таке: виконано умову* **A**; *напрямленість $(\mathrm{tr}\langle X_T\rangle, T \in \mathbb{T})$ в. к. в C; для всіх $t_2 > t_1 \geqslant 0$, $m \in \mathbf{N}$, $z \in \mathbf{R}^{p*}$*

$$\langle zX_T^m\rangle(t_2) - \langle zX_T^m\rangle(t_1) \leq \langle zX_T\rangle(t_2) - \langle zX_T\rangle(t_1); \tag{13}$$

для будь-яких $t > 0$, $\varepsilon > 0$ і $m \in \mathbf{N}$

$$\lim_{T\to\infty} \mathsf{E}\max_{s\leqslant t} |\Delta X_T^m(s)|^2 = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\operatorname{tr}\left\langle X_T^l - X_T\right\rangle(t) > \varepsilon\right\} = 0. \tag{15}$$

Тоді для всіх $n \in \mathbf{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{R}^{p*}$ *і* $t_n > \cdots > t_1 > t_0 \geqslant s > 0$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^n z_j\left(X_T(t_j) - X_T(t_{j-1})\right)\right\}\,\middle|\,\mathcal{F}_T(s)\right)&\\ - \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n z_j\left(\langle X_T\rangle(t_j) - \langle X_T\rangle(t_{j-1})\right)z_j^\top\right\} &\xrightarrow{\mathsf{P}} 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Доведення. За наслідком 4 напрямленість $(\langle X_T\rangle, T \in \mathbb{T})$ в. к. в C, раз цю властивість має $(\operatorname{tr}\langle X_T\rangle, T \in \mathbb{T})$. Лема 7 стверджує, що $\mathbf{A}$ тягне за собою співвідношення

$$\mathsf{E}(F(\langle zX_T\rangle(t))|\mathcal{F}_T(s)) - F(\langle zX_T\rangle(t)) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \tag{17}$$

для довільних $t > s > 0$, $z \in \mathbf{R}^{d*}$ і обмеженої рівномірно неперервної функції F, відтак висновок теореми для випадку $\mathbb{T} = \mathbf{N}$ випливає з теореми 4.6 [4].

За вже доведеним для всякої необмежено зростаючої послідовності $(T_k,\, k \in \mathbf{N})$ додатних дійсних чисел і всіх $n \in \mathbf{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{R}^{p*}$, $t_n > \cdots > t_1 > t_0 \geqslant s > 0$ справджується співвідношення (16), в якому T прямує до нескінченності, пробігаючи множину $\{T_k\}$ замість $\mathbf{N}$. Звідси очевидним чином випливає твердження теореми для випадку $\mathbb{T} = \{T \in \mathbf{R}\colon T > 0\}$. □

Теорема 3. *Нехай при кожному* $T \in \mathbb{T}$ $X_T, X_T^1, X_T^2, \ldots$ — $\mathbf{R}^p$*-значні л. к. і. мартингали відносно потоку* $\mathbb{F}_T$. *Припустимо таке: виконано умови* $\mathbf{A}$, (13)–(15);

$$\lim_{L\to\infty}\sup_l\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\left|X_T^l(0)\right| > L\right\} = 0;$$

для будь-яких $\varepsilon > 0$, $t > 0$

$$\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\left|X_T^l(0) - X_T(0)\right| > \varepsilon\right\} = 0;$$

існують задані на спільному імовірнісному просторі $\mathbf{R}^p$*-значна випадкова величина* $\mathring{X}$ *і* $\mathfrak{S}_+$*-значний випадковий процес* H *такі, що*

$$(X_T(0), \langle X_T\rangle) \xrightarrow{C} \left(\mathring{X}, H\right). \tag{18}$$

Тоді $(X_T, \langle X_T\rangle) \xrightarrow{C} (X, H)$, *де* X — *неперервний локальний мартингал із початковим значенням* $\mathring{X}$ *і квадратичною характеристикою* H *такий, що для всіх* $n \in \mathbf{N}$, $t_n > \cdots > t_0 \geqslant 0$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{R}^{p*}$

$$\mathsf{E}\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^n z_j(X(t_j) - X(t_{j-1}))\right\}\,\middle|\,\mathring{X}, H(\cdot)\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n z_j(H(t_j) - H(t_{j-1}))z_j^\top\right\}. \tag{19}$$

Доведення. Записавши нерівність (13) у вигляді

$$z\left(\langle X_T^m\rangle(t_2) - \langle X_T^m\rangle(t_1)\right)z^\top \leqslant z(\langle X_T\rangle(t_2) - \langle X_T\rangle(t_1))z^\top,$$

зафіксувавши ортонормований базис $e^1, \ldots, e^p$ в $\mathbf{R}^{p*}$, поклавши по черзі $z = e^1$, …, $z = e^p$ і просумувавши ці p нерівностей, дістанемо

$$\operatorname{tr}\left(\langle X_T^m\rangle(t_2) - \langle X_T^m\rangle(t_1)\right) \leqslant \operatorname{tr}(\langle X_T\rangle(t_2) - \langle X_T\rangle(t_1)). \tag{20}$$

Далі міркуємо для $\mathbb{T} = \mathbf{N}$ (випадок $\mathbb{T} = \{T \in \mathbf{R}\colon T > 0\}$ зводиться до цього так само, як у доведенні теореми 2).

Згідно з лемою 7 умова $\mathbf{A}$ тягне за собою (17).

Послідовність $(\langle X_T\rangle, T \in \mathbf{N})$ в. к. в C внаслідок (18). Звідси і з (20) маємо за теоремою 1

$$\lim_{L\to\infty}\sup_l \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left\{\operatorname{tr}\left\langle X_T^l\right\rangle(t) > L\right\} = 0,$$

$$\lim_{c\to 0}\sup_l \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{(t_1,t_2)\in\Pi(t,c)} \operatorname{tr}\left(\left\langle X_T^l\right\rangle(t_2) - \left\langle X_T^l\right\rangle(t_1)\right) > \varepsilon\right\} = 0$$

для всіх додатних t і ε. Отже, виконано всі умови теореми 5.6 [4] (три ми щойно перевірили, а інші шість постулювали), а значить справджується й висновок її, співпадаючий з висновком теореми, яку ми доводимо. □

Зауваження 1. Очевидно, властивість (19) $\mathbf{R}^p$-значного процесу X рівносильна такій парі властивостей:

(i) X має умовно незалежні, відносно $\mathring{X}$, $H(\cdot)$ прирости;
(ii) для будь-яких $t > s \geqslant 0$ і $z \in \mathbf{R}^{p*}$

$$\mathsf{E}\left(e^{iz(X(t)-X(s))}\,\middle|\,\mathring{X}, H(\cdot)\right) = e^{-z(\langle X\rangle(t)-\langle X\rangle(s))z^\top/2}.$$

3. Основні результати

У теоремі 4 використовується позначення

$$U_T(t) = \int_0^t d\langle Z_T\rangle(s)\otimes\vartheta_T(s)^{\otimes 2}, \tag{21}$$

а припущення **A** видозмінюється так:

B. Існує сім'я $\{\varkappa_T^r, r > 0, T \in \mathbb{T}\}$ $\mathbf{R}^{d^4}$-значних випадкових функцій така, що кожна $\varkappa_T^r$ рівномірно $(\mathbb{F}_T, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d^4}))$-узгоджена і будь-яких $t > s > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to 0}\varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{|U_T(t) - \varkappa_T^r(s,t,U_T(s))| > \varepsilon\} = 0. \tag{22}$$

Теорема 4. *Нехай при кожному $T > 0$ випадковий процес Y_T задається рівністю* (1)*, де Z_T — $\mathbf{R}^d$-значний л. к. і. мартингал відносно потоку $\mathbb{F}_T$, а ϑ_T — задовольняючий умову* (2) *$\mathbf{R}^d$-значний $\mathbb{F}_T$-передбачуваний випадковий процес. Припустимо таке: для будь-яких додатних t і ε*

$$\lim_{T\to\infty}\mathsf{E}\max_{s\leqslant t}|\Delta Z_T(s)|^2 = 0, \tag{23}$$

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{T\to\infty}\mathsf{P}\left\{\int_0^t |\vartheta_T(s)|^2 I\{|\vartheta_T(s)| > N\}\, d\operatorname{tr}\langle Z_T\rangle(s) > \varepsilon\right\} = 0; \tag{24}$$

задані рівністю (21) *випадкові процеси U_T задовольняють умову* **B***; існує $\mathbf{R}^{d^4}$-значний випадковий процес G такий, що*

$$\langle Y_T\rangle \xrightarrow{C} G. \tag{25}$$

Тоді: $(Y_T, \langle Y_T\rangle) \xrightarrow{C} (Y, \langle Y\rangle)$, де Y — неперервний локальний мартингал із початковим значенням O (нульовий тензор) і квадратичною характеристикою $\langle Y\rangle = G$; процес Y має умовно незалежні відносно G прирости; для будь-яких $t > s \geqslant 0$, $z \in \mathbf{R}^{d^2*}$

$$\mathsf{E}\left(e^{iz(\underline{Y}(t)-\underline{Y}(s))}\,\middle|\,\langle Y\rangle(\cdot)\right) = e^{-z(\langle\underline{Y}\rangle(t)-\langle\underline{Y}\rangle(s))z^\top/2}.$$

Доведення. Позначимо

$$Y_T^m(t) = \int_0^t dZ_T(s) \otimes \vartheta_T(s) I\{|\vartheta_T(s)| \leqslant m\},$$

$X_T = \underline{Y}_T$, $X_T^m = \underline{Y}_T^m$. За лемою 5 $\langle Y_T \rangle = U_T^\sharp$, тож **B** тягне за собою **A**. Покажемо, що процеси $X_T, X_T^1, X_T^2, \dots$ задовольняють і решту умов теореми 3.

Дві стосовні початкових значень умови в даному разі тривіальні, оскільки всі процеси стартують із нуля.

За побудовою

$$\Delta Y_T^m(s) = \Delta Z_T(s) \otimes \vartheta_T(s) I\{|\vartheta_T(s)| \leqslant m\},$$

звідки за лемою 3 $|\Delta Y_(^m s)|^2 \leqslant m^2 d \cdot |\Delta Z_T(s)|^2$, що разом із (23) дає (14).

Так само за побудовою

$$Y_T^l(t) - Y_T(t) = \int_0^t dZ_T(s) \otimes \vartheta_T(s) I\{|\vartheta_T(s)| > l\},$$

звідки за лемою 5

$$\operatorname{tr} \left\langle X_T^l - X_T \right\rangle (t) = \int_0^t |\vartheta_T(s)|^2 I\{|\vartheta_T(s)| > l\} \, d \operatorname{tr}\langle Z_T \rangle(s),$$

відтак (24) спричинюється до (15).

Щоб перевірити (13), подамо $z \in \mathbf{R}^{d^2 *}$ у вигляді $z = (\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_d)$, де

$$\mathfrak{z}_k = (z_{k1} \dots z_{kd}) \in \mathbf{R}^{d*}.$$

За побудовою вектор $X_T(t)$ складається із записаних один під одним стовпців

$$\int_0^t dZ_1(s)\vartheta(s), \quad \dots, \quad \int_0^t dZ_d(s)\vartheta(s),$$

де Z_i — i-та компонента Z. Тому

$$zX_T(t) = \int_0^t d(\mathfrak{z}_1 Z_1 + \dots + \mathfrak{z}_d Z_d)\vartheta(s),$$

або, рівносильно, $zX_T(t) = \int_0^t \psi(s) \, d\zeta(s)$, де $\psi = \vartheta^\top$, $\zeta = \mathfrak{z}_1^\top Z_1 + \dots + \mathfrak{z}_d^\top Z_d$. Із таких же міркувань $zX_T^m(t) = \int_0^t \psi(s) I\{|\vartheta_T(s)| \leqslant m\} \, d\zeta(s)$. Тепер (13) випливає з (2) за наслідком 3.

Оскільки $X_T = \underline{Y}_T$, то, зважаючи на (25), існує $\mathfrak{S}_+$-значний випадковий процес H такий, що $\langle X_T \rangle \xrightarrow{C} H$ (у координатному записі $G(t)$ і $H(t)$ мають однакові за складом, але по-різному згруповані набори координат). Тоді за теоремою 3, умови якої ми перевірили, $(X_T, \langle X_T \rangle) \xrightarrow{C} (X, H)$, де X — неперервний локальний мартингал із $\langle X \rangle = H$. Звідси маємо за лемою 4 $(Y_T, \langle Y_T \rangle) \xrightarrow{C} (Y, G)$, де Y — $\mathbf{R}^{d^2}$-значний неперервний локальний мартингал такий, що $\underline{Y} = X$ і $\langle Y \rangle = G$. Цим доведено перше твердження теореми. Друге й третє випливають із теореми 3 і зауваження 1. $\square$

Щоб полегшити читачеві розуміння власне імовірнісного змісту теореми 4, сформулюю не потребуючу окремого доведення видозміну її, в якій процеси ϑ_T скалярні, так що тензорні конструкції не виникають.

Теорема 5. *Нехай при кожному $T > 0$ випадковий процес Y_T задається рівністю $Y_T(t) = \int_0^t \vartheta_T(s) \, dZ_T(s)$, де Z_T — $\mathbf{R}^d$-значний л. к. і. мартингал відносно потоку $\mathbb{F}_T$, а ϑ_T — задовольняючий умову (2) $\mathbf{R}$-значний $\mathbb{F}_T$-передбачуваний випадковий* *процес. Припустимо таке: для будь-яких додатних t і ε виконано умови* (23) *і* (24)*; задані рівністю*

$$U_T(t) = \int_0^t \vartheta_T(s)^2\, d\langle Z_T\rangle(s)$$

випадкові процеси U_T задовольняють умову $\mathbf{B}$*; існує $\mathbf{R}^{d^2}$-значний випадковий процес U такий, що $U_T \xrightarrow{C} U$.*

Тоді: $(Y_T, \langle Y_T\rangle) \xrightarrow{C} (Y, \langle Y\rangle)$, де Y — неперервний локальний мартингал із початковим значенням 0 і квадратичною характеристикою $\langle Y\rangle = U$; процес Y має умовно незалежні відносно U прирости; для будь-яких $t > s \geqslant 0$, $z \in \mathbf{R}^{d*}$

$$\mathsf{E}\left(e^{iz(Y(t)-Y(s))}\,\Big|\, U(\cdot)\right) = e^{-z(U(t)-U(s))z^\top/2}.$$

Далі до самого кінця імовірнісний простір не залежить від T.

Лема 10. *Нехай при кожному $T \in \mathbb{T}$ випадковий процес U_T задається рівностями*

$$U_T(t) = \frac{1}{T}\int_0^{Tt} \rho_T\left(\frac{s}{T}\right) d\Phi(s), \tag{26}$$

$$\Phi(t) = \int_0^t dH(s) \otimes \varphi(s)^{\otimes 2}, \tag{27}$$

де ρ_T і φ — вимірні випадкові процеси ($\mathbf{R}$-значний і $\mathbf{R}^d$-значний), а H — зростаючий неперервний справа $\mathfrak{S}$-значний випадковий процес. Припустимо таке:

$$\lim_{L\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\int_0^T |\varphi(s)|^2\, d\operatorname{tr} H(s) > TL\right\} = 0; \tag{28}$$

процеси ρ_T неперервні справа і мають границі зліва; для будь-яких $t > 0$ і $\varepsilon > 0$

$$\lim_{L\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t}|\rho_T(s)| > L\right\} = 0, \tag{29}$$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\sup_{(t',t'')\in\Pi(t,c)}|\rho_T(t') - \rho_T(t'')| > \varepsilon\right\} = 0; \tag{30}$$

існує напрямленість (Ξ_T) випадкових тензорів така, що при всіх $t > 0$

$$T^{-1}\Phi(Tt) - \Xi_T t \xrightarrow{\mathsf{P}} O. \tag{31}$$

Тоді при всіх t справджується співвідношення (11)*, де $R_T(t) = \int_0^t \rho_T(\tau)\, d\tau$.*

Доведення. Для довільного розбиття $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ відрізка $[0,\, t]$ позначимо

$$\psi_{T,m}(t_1,\ldots,t_m) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^m \int_{Tt_{k-1}}^{Tt_k}\left(\rho_T\left(\frac{s}{T}\right) - \rho_T(t_k)\right) d\Phi(s),$$

$$\chi_{T,m}(t_1,\ldots,t_m) = \sum_{k=1}^m \rho_T(t_k)\left(T^{-1}\Phi(Tt_k) - \Xi_T t_k - \left(T^{-1}\Phi(Tt_{k-1}) - \Xi_T t_{k-1}\right)\right),$$

$$\alpha_{T,m}(t_1,\ldots,t_m) = \max_{0<k\leqslant m}\ \sup_{t_{k-1}\leqslant\tau<t_k}|\rho_T(\tau) - \rho_T(t_k)|,$$

$$\beta_{T,m}(t_1,\ldots,t_m) = \sum_{k=1}^m \rho_T(t_k)(t_k - t_{k-1}) - R_T(t)$$

і запишемо на підставі (26) і (27)

$$U_T(t) - \Xi_T R_T(t) = \psi_{T,m}(t_1,\ldots,t_m) + \chi_{T,m}(t_1,\ldots,t_m) + \Xi_T\beta_{T,m}(t_1,\ldots,t_m). \tag{32}$$

Зважаючи на (31) і (29)

$$\chi_{T,m}(t_1,\dots,t_m) \xrightarrow{\mathsf{P}} O. \tag{33}$$

За лемою 2

$$\left\| \int_{Tt_{k-1}}^{Tt_k} \left(\rho_T\left(\frac{s}{T}\right) - \rho_T(t_k) \right) dH(s) \otimes \varphi(s)^{\otimes 2} \right\| \leqslant \int_{Tt_{k-1}}^{Tt_k} \left| \rho_T\left(\frac{s}{T}\right) - \rho_T(t_k) \right| |\varphi(s)|^2 \, d\operatorname{tr} H(s),$$

тож

$$|\psi_{T,m}(t_1,\dots,t_m)| \leqslant \alpha_{T,m}(t_1,\dots,t_m) V(Tt)/T, \tag{34}$$

де $V(t) = \int_0^t |\varphi(s)|^2 \, d\operatorname{tr} H(s)$. За тією ж лемою $\|\Phi(t)\| \leqslant V(t)$, звідки з урахуванням (28) і (31) одержуємо

$$\lim_{N\to\infty} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\|\Xi_T\| > N\} = 0. \tag{35}$$

Із (32)–(34) і очевидних включень

$$\{\alpha_{T,m}(t_1,\dots,t_m)V(Tt)/T \geqslant c\} \subset \{V(Tt) > TN\} \cup \{\alpha_{T,m}(t_1,\dots,t_m) \geqslant c/N\},$$

$$\{\|\beta_{T,m}(t_1,\dots,t_m)\Xi_T\| \geqslant c\} \subset \{\|\Xi_T\| > N\} \cup \{/\beta_{T,m}(t_1,\dots,t_m)/ \geqslant c/N\}$$

маємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\|U_T(t) - \Xi_T R_T(t)\| \geqslant \varepsilon\} \\ &\quad \leqslant \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{V(Tt) > TN\} + \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\|\Xi_T\| > N\} \\ &\qquad + \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\alpha_{T,m}(t_1,\dots,t_m) \geqslant \varepsilon/3N\} + \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\beta_{T,m}(t_1,\dots,t_m) \geqslant \varepsilon/3N\}, \end{aligned}$$

що спільно з (28)–(30) і (35) очевидним чином зумовлює (11). □

Наслідок 6 (із лем 8 і 10)**.** *Нехай виконано умови леми 10 і, для будь-якого $t > 0$, умову* (10)*, де $R_T(t) = \int_0^t \rho_T(\tau)\, d\tau$. Тоді для будь-яких $t > s > 0$ і $\varepsilon > 0$ справджується рівність* (12)*.*

Випадковий процес, значення якого в усі моменти часу – $\mathcal{F}(0)$-вимірні випадкові величини, назвемо $\mathbb{F}^0$-узгодженим.

Теорема 6. *Нехай випадкові процеси Y_T і R_T задаються рівностями*

$$Y_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{Tt} \sigma_T\left(\frac{s}{T}\right) dM(s) \otimes \varphi(s) \tag{36}$$

і

$$R_T(t) = \int_0^t \sigma_T(s)^2 \, ds,$$

де σ_T – $\mathbb{F}^0$-узгоджений $\mathbf{R}$-значний випадковий процес з траєкторіями в D, M — $\mathbf{R}^d$-значний л. к. і. мартингал відносно потоку $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \in \mathbf{R}_+)$, а φ – $\mathbf{R}^d$-значний $\mathbb{F}$-передбачуваний випадковий процес такий, що

$$\int_0^t |\varphi(s)|^2 \, d\operatorname{tr}\langle M\rangle(s) < \infty, \qquad t \in \mathbf{R}_+. \tag{37}$$

Припустимо таке:

$$\lim_{L\to\infty} \varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\{\operatorname{tr}\langle M\rangle(T) > TL\} = 0, \tag{38}$$

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \mathsf{E} \max_{s\leqslant T} |\Delta M(s)|^2 = 0; \tag{39}$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} \mathsf{P}\left\{\int_0^T |\varphi(s)|^2 I\{|\varphi(s)| > N\}\, d\,\mathrm{tr}\langle M\rangle(s) > T\varepsilon\right\} = 0; \tag{40}$$

напрямленість (σ_T^2) *в. к. в* C*; існує напрямленість* (Ξ_T) *випадкових тензорів така, що при всіх* $t > 0$

$$\frac{1}{T}\int_0^{Tt} d\langle M\rangle(s) \otimes \varphi(s)^{\otimes 2} - \Xi_T t \xrightarrow{\mathsf{P}} O; \tag{41}$$

існують задані на спільному імовірнісному просторі випадковий тензор Ξ *і числовий випадковий процес* R *такі, що для будь-яких* $l \in \mathbf{N}$, $t_1, \ldots, t_l \in \mathbf{R}_+$

$$(\Xi_T, R_T(t_1), \ldots, R_T(t_l)) \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Xi, R(t_1), \ldots, R(t_l)) \tag{42}$$

і для кожного $t > 0$

$$\mathsf{P}\{R(t) = 0\} = 0. \tag{43}$$

Тоді: $(Y_T, \langle Y_T\rangle) \xrightarrow{C} (Y, \langle Y\rangle)$*, де* Y *— неперервний локальний мартингал із початковим значенням* O *і квадратичною характеристикою* $\langle Y\rangle(t) = \Xi^\sharp R(t)$*; процес* Y *має умовно незалежні відносно* $(\Xi, R(\cdot))$ *(а значить і відносно* $\langle Y\rangle(\cdot)$*) прирости; для будь-яких* $t > s \geqslant 0$, $z \in \mathbf{R}^{d^2*}$

$$\mathsf{E}\left(e^{iz(\underline{Y}(t)-\underline{Y}(s))} \,\Big|\, \langle Y\rangle(\cdot)\right) = e^{-z(\langle \underline{Y}\rangle(t)-\langle \underline{Y}\rangle(s))z^\top/2}.$$

Доведення. Рівність (36) це окремий випадок (1) ($Z_T(s) = M(Ts)/\sqrt{T}$, $\vartheta_T(s) = \rho_T(s)\varphi(Ts)$), тому достатньо перевірити умови теореми 4 для таких Z_T, ϑ_T і для $\mathcal{F}_T(t) = \mathcal{F}(Tt)$.

Очевидно, умова (23) в даному разі рівносильна (39).

Позначимо $\rho_T = \sigma_T^2$, $S_T^N(t) = \int_0^t |\vartheta_T(s)|^2 I\{|\vartheta_T(s)| > N\}\, d\,\mathrm{tr}\langle Z_T\rangle(s)$. За припущенням процеси σ_T не мають розривів другого роду, а значить обмежені на кожному скінченному проміжку. Тому (37) зумовлює (2). Напрямленість (ρ_T), будучи відносно компактною в C, задовольняє за теоремою 1 умови (29) і (30). Підставивши в останню рівність наведені вище вирази $\vartheta_T(s)$ і $Z_T(s)$, перетворимо її до вигляду

$$S_T^N(t) = \frac{1}{T}\int_0^{Tt} \left|\rho_T\left(\frac{\tau}{T}\right)\right| |\varphi(s)|^2 I\left\{\left|\sigma_T\left(\frac{\tau}{T}\right)\right| |\varphi(s)| > N\right\} d\,\mathrm{tr}\langle M\rangle(s).$$

Звідси маємо

$$\left\{\left|S_T^N(t)\right| > \varepsilon\right\} \subset \left\{\sup_{s\leqslant t}|\rho_T(s)| > L\right\} \cup \left\{\int_0^{Tt} |\varphi(s)|^2 I\left\{|\varphi(s)| > \frac{N}{\sqrt{L}}\right\} d\,\mathrm{tr}\langle M\rangle(s) > T\varepsilon\right\},$$

після чого (24) випливає з (40) і (29)

Із (36) маємо за лемою 5 $\langle Y_T\rangle = U_T^\sharp$, де

$$U_T(t) = \frac{1}{T}\int_0^{Tt} \rho_T\left(\frac{s}{T}\right)\, d\langle M\rangle(s) \otimes \varphi(s)^{\otimes 2}. \tag{44}$$

Покажемо, що $U_T \xrightarrow{C} \Xi R$ (і, таким чином, виконано умову (25) із $G = \Xi^\sharp R$).

Відносна компактність (ρ_T) в C зумовлює, очевидно, таку ж властивість напрямленості (R_T). Таким чином, щоб вивести стверджуване співвідношення з (42), достатньо встановити (11).

Очевидно, для будь-якого $N > 0$ $|\varphi(s)|^2 \leqslant |\varphi(s)|^2 I\{|\varphi(s)| > N\} + N^2$. Тому при $L > 1$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathsf{P}\left\{\int_0^T |\varphi(s)|^2 \, d\,\mathrm{tr}\langle M\rangle(s) > TL\right\}$$
$$\leqslant \mathsf{P}\{\mathrm{tr}\langle M\rangle(T) > TL/N^2\} + \overline{\lim_{T\to\infty}} \mathsf{P}\left\{\int_0^T |\varphi(s)|^2 I\{|\varphi(s)| > N\} \, d\,\mathrm{tr}\langle M\rangle(s) > T\right\},$$

що спільно з (38) і (40) зумовлює (28) для $H = \langle M\rangle$. Умови (29) і (30) перевірено вище, а умова (31) в даному разі рівносильна (41), оскільки (44) це те саме, що (26) & (27) з $H = \langle M\rangle$. Тепер (11) випливає з леми 10, всі умови якої ми перевірили.

За теоремою Александрова співвідношення $R_T(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} R(t)$ (складова частина умови (42)) тягне за собою $\overline{\lim}_{T\to\infty} \mathsf{P}\{R_T(t) \leqslant r\} \leqslant \mathsf{P}\{R(t) \leqslant r\}$. Звідси

$$\lim_{r\to 0} \overline{\lim_{T\to\infty}} \mathsf{P}\{R_T(t) \leqslant r\} \leqslant \mathsf{P}\{R(t) = 0\},$$

що спільно з (43) зумовлює (10). Тепер наслідок 6, усі умови якого ми перевірили, стверджує співвідношення (12), або, що те саме, (22) із

$$\varkappa_T^r(s,t,x) = g_r(R_T(t))h_r(R_T(s))x, \qquad x \in \mathbf{R}^{d^4}.$$

Зважаючи на $\mathbb{F}^0$-вимірність σ_T (а значить і R_T), кожна з випадкових функцій $\varkappa_T^r$ рівномірно $(\mathbb{F}_T, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d^4}))$-узгоджена. Отже, виконано і умову **B**, відтак теорема 4 приводить до потрібного висновку. □

Література

1. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*, “Наука”, Москва, 1986.
2. Ж. Жакод, А. Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, “Физматлит”, Москва, 1994.
3. A. Touati, *Sur la convergence en loi fonctionelle de suites de semimartingales vers un mélange de mouvements Browniens*, Теор. вероятн. и примен. **36** (1991), № 4, 744–763.
4. A. Yurachkivsky, *Convergence of locally square integrable martingales to a continuous local martingale*, J. Prob. and Stat. (2011). (doi:10.1155/2011/580292)
5. Б. Л. ван дер Варден, *Алгебра*, “Наука”, Москва, 1986.
6. И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, “Наука”, Москва, 1971.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, “Наукова думка”, Киев, 1982.

Кафедра дослідження операцій, факультет кібернетики, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Володимирська 64, Київ, 01601

Адреса електронної пошти: andriy.yurachkivsky@gmail.com

Надійшла 12/06/2012