Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 90, 2014, стор. 13–21

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 90, 2014, pp. 13–21

НАБЛИЖЕННЯ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ІНТЕГРАЛАМИ ВІД СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ ЗІ СТАЛИМ ПОКАЗНИКОМ ЗА ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ

УДК 519.21

О. Л. БАННА, Ю. С. МІШУРА І С. В. ШКЛЯР

Анотація. Знайдено найкраще рівномірне наближення вінерівського процесу в просторі

$$L_\infty([0,T];L_2(\Omega))$$

інтегралами від невипадкових функцій $\int_0^t f(s)\,dB_s^H$, де $\{B_t^H, t\in[0,T]\}$ — дробовий броунівський рух, f — функція виду $f(s)=k\cdot s^\alpha$, $k>0$, $s\in[0,T]$, $\alpha=H-1/2$, H — індекс Хюрста дробового броунівського руху.

Abstract. The best uniform approximation of Wiener process in the space $L_\infty([0,T];L_2(\Omega))$ by integrals of the form $\int_0^t f(s)\,dB_s^H$, where $\{B_t^H, t\in[0,T]\}$ is fractional Brownian motion, f is a function $f(s)=k\cdot s^\alpha$, $k>0$, $s\in[0,T]$, $\alpha=H-1/2$, H is Hurst index of fractional Brownian motion, is established.

Аннотация. Найдено наилучшее равномерное приближение винеровского процесса в пространстве $L_\infty([0,T];L_2(\Omega))$ интегралами от неслучайных функций $\int_0^t f(s)\,dB_s^H$, где $\{B_t^H, t\in[0,T]\}$ — дробное броуновское движение, f – функция вида $f(s)=k\cdot s^\alpha$, $k>0$, $s\in[0,T]$, $\alpha=H-1/2$, H — индекс Хюрста дробного броуновского движения.

1. Вступ

Розглянемо дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H\in(0,1)$.

Означення 1.1. Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $H\in(0,1)$ називається гауссів процес $\{B_t^H, t\ge 0\}$ з середнім $\mathsf{E}\,B_t^H=0$ і коваріацією $\mathsf{E}\,B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H})$.

При $H=1/2$ дробовий броунівський рух є вінерівським процесом, при інших H він не є ні семімартингалом, ні марківським процесом (див. наприклад [10]). Ми будемо розглядати лише випадок, коли індекс Хюрста $H\in(\frac{1}{2},1)$.

Виникає природне питання: чи можна наблизити ДБР в деякій метриці за допомогою інтегралів за вінерівським процесом з невипадковими підінтегральними функціями і навпаки, чи можна наблизити вінерівський процес інтегралами за дробовим броунівським рухом з невипадковими підінтегральними функціями. Задачу наближення дробового броунівського руху розв'язано в роботах [1–8] та [12, 13]. В даній роботі, навпаки, розглянуто наближення вінерівського процесу інтегралами від невипадкових функцій за дробовим броунівським рухом.

У статті [11] доведено, що на скінченному інтервалі ДБР $\{B_t^H, t\in[0,T]\}$ допускає зображення

$$B_t^H=\int_0^t z(t,s)\,dW_s, \tag{1.1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15; Secondary 60G44.

Ключові слова і фрази. Вінерівський процес, дробовий броунівський рух, інтеграл за дробовим броунівським рухом, наближення у класі функцій.

де $\{W_t, t \in [0,T]\}$ – вінерівський процес,

$$z(t,s) = \left(H - \frac{1}{2}\right) \cdot c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}\, du$$

— ядро Вольтерра, стала

$$c_H^{(1)} = \left(\frac{2H \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2},$$

$\Gamma(x)$, $x > 0$ — гамма-функція.

Розглянемо простір функцій

$$f \in L_2^H([0,T]) := \left\{ f\colon [0,T] \to \mathbf{R} \;\middle|\; \int_0^T \int_0^T |f(s)| \cdot |f(u)| \cdot |u-s|^{2H-2}\, du\, ds < \infty \right\}$$

з нормою

$$\left(H(2H-1)\int_0^T \int_0^T |f(s)| \cdot |f(u)| \cdot |u-s|^{2H-2}\, du\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Це клас функцій, які можна інтегрувати за дробовим броунівським рухом з показником Хюрста H. Поставимо задачу наступним чином: нехай $f \in L_2^H([0,T])$, причому $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Треба знайти $\inf_{f \in L_2^H([0,T])} \sup_{0 \le t \le T} \mathsf{E}(\int_0^t f(s)\, dB_s^H - W_t)^2$, де W — той самий вінерівський процес, що фігурує в зображенні (1.1).

Позначимо $\alpha = H - \frac{1}{2}$ і розглянемо ядро

$$K_H^f(t,s) := c_\alpha^{(2)} \int_s^t f(u) \cdot u^\alpha (u-s)^{\alpha-1}\, du,$$

де $c_\alpha^{(2)} = \left(\frac{(2\alpha+1)\alpha}{(1-2\alpha)B(1-2\alpha,\alpha)}\right)^{1/2}$. Згідно зі статтею [9], має місце рівність

$$\int_0^t f(s)\, dB_s^H = (1-2\alpha)^{1/2} \int_0^t K_H^f(t,s) s^{-\alpha}\, dW_s.$$

Поставлена задача в загальному вигляді є досить складною, тому будемо розглядати частковий випадок, коли замість всього класу $L_2^H[0,T]$ інфімум береться по всіх степеневих функціях вигляду$f(u) = ku^\alpha$, $k > 0$. Знайдено ту функцію, на якій інфімум досягається, та значення самого інфімуму. Зауважимо, що це значення ненульове.

2. Наближення вінерівського процесу інтегралом від функції виду $f(u) = ku^\alpha$, $k > 0$

З метою технічного спрощення покладемо $T = 1$.

Теорема 2.1. *Нехай $f(u)$ – функція виду $f(u) = ku^\alpha$, $k > 0$.*

1) Якщо $H \in [H_0, 1)$, де $H_0 \approx 0.849278$, то мінімум функції

$$\max_{t \in [0,1]} \mathsf{E}\left(\int_0^t f(s)\, dB_s^H - W_t\right)^2$$

досягається при $k = k_{\min} = \frac{(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}} c_\alpha^{(2)} B(1-\alpha,\alpha)\cdot(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^2 \cdot B(\alpha+1,2\alpha)}$ та дорівнює

$$1 - \frac{(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2 B\left(1-\alpha,\alpha\right)^2(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^3 B(\alpha+1,2\alpha)}.$$

2) Якщо $H \in (\frac{1}{2}, H_0)$, де $H_0 \approx 0.849278$, то

$$\min_k \max_{t \in [0,1]} \left(\int_0^t f(s) dB_s^H - W_t\right)^2 = \min_k \max\{f(\alpha,k,1), f(\alpha,k,t_1)\},$$

де

$$t_1 = \left(\frac{3\Gamma(3\alpha)}{2k\Gamma(2\alpha)} \cdot \frac{\sqrt{(\Gamma(1-\alpha))^3} - \sqrt{\Gamma(1-2\alpha) \cdot \left(\frac{(\Gamma(1-\alpha))^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - \frac{2\Gamma(2\alpha)}{3\Gamma(3\alpha)} \right)}}{\sqrt{\alpha(2\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}} \right)^{\frac{1}{2\alpha}},$$

$$\begin{aligned} f(\alpha,k,t) &= 2\alpha(2\alpha+1)k^2 \cdot B(\alpha+1,2\alpha)\frac{t^{4\alpha+1}}{4\alpha+1} \\ &\quad - 2(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}} c_\alpha^{(2)} B(1-\alpha,\alpha)\, k \cdot \frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + t. \end{aligned}$$

Доведення. Розглянемо відстань в кожній точці $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left(\int_0^t f(s)\,dB_s^H - W_t\right)^2 &= \mathsf{E}\left(\int_0^t f(s)\,dB_s^H\right)^2 - 2\,\mathsf{E}\int_0^t f(s)\,dB_s^H \cdot W_t + t \\ &= H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(s)f(u)|u-s|^{2H-2}\,du\,ds \\ &\quad - 2(1-2\alpha)^{1/2}\int_0^t K_H^f(t,s)\cdot s^{-\alpha}\,ds + t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Другий інтеграл в правій частині (2.1) дорівнює

$$\begin{aligned} \int_0^t K_H^f(t,s)\cdot s^{-\alpha}\,ds &= c_\alpha^{(2)}\int_0^t\int_s^t f(u)\cdot u^\alpha (u-s)^{\alpha-1}\,du\cdot s^{-\alpha}\,ds \\ &= c_\alpha^{(2)}\int_0^t\int_0^u (u-s)^{\alpha-1}\cdot s^{-\alpha}\,ds\cdot f(u)\cdot u^\alpha\,du \\ &= c_\alpha^{(2)} B(1-\alpha,\alpha)\int_0^t f(u)u^\alpha\,du, \end{aligned}$$

де $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція.

Нехай $f(u) = k\cdot u^\alpha$, тоді

$$\int_0^t f(u)u^\alpha\,du = \int_0^t k\cdot u^{2\alpha}\,du = k\cdot\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

Перший інтеграл в правій частині (2.1) можна перетворити наступним чином

$$\begin{aligned} &\int_0^t\int_0^t f(s)f(u)|u-s|^{2H-2}\,du\,ds \\ &\quad = \int_0^t\int_0^s f(s)f(u)(s-u)^{2H-2}\,du\,ds + \int_0^t\int_s^t f(s)f(u)(u-s)^{2H-2}\,du\,ds \\ &\quad = 2\int_0^t\int_0^s f(u)(s-u)^{2H-2}\,du\cdot f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Тому при $f(u) = k\cdot u^\alpha$, $k>0$, мають місце рівності

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_0^t f(s)f(u)|u-s|^{2H-2}\,du\,ds &= 2\int_0^t\int_0^s ku^\alpha(s-u)^{2H-2}\,du\cdot ks^\alpha\,ds \\ &= 2k^2\int_0^t\int_0^s u^\alpha(s-u)^{2\alpha-1}\,du\cdot s^\alpha\,ds \\ &= 2k^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha)\int_0^t s^{4\alpha}\,ds \\ &= 2k^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha)\frac{t^{4\alpha+1}}{4\alpha+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отже, враховуючи (2.2), відстань можна подати в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(\int_0^t f(s)\,dB_s^H - W_t\right)^2 \\
&\quad = 2\alpha(2\alpha+1)k^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha)\frac{t^{4\alpha+1}}{4\alpha+1} - 2(1-2\alpha)^{\frac12}c_\alpha^{(2)}B\left(1-\alpha,\alpha\right)k\cdot\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+t \\
&\quad =: f(\alpha,k,t).
\end{aligned}$$

Нашою метою є знаходження значення $\min_{k\in\mathbf{R}}\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t)$ при кожному фіксованому $H\in(\frac12,1)$, або що те саме, при кожному фіксованому $\alpha\in(0,1/2)$. Щоб з'ясувати, в якій точці $t\in[0,1]$ досягається максимум, продиференціюємо функцію $f(\alpha,k,t)$ по t:

$$\frac{\partial f(\alpha,k,t)}{\partial t} = 2\alpha(2\alpha+1)k^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha)t^{4\alpha} - 2(1-2\alpha)^{\frac12}c_\alpha^{(2)}B\left(1-\alpha,\alpha\right)k\cdot t^{2\alpha}+1,$$

зробимо заміну $x:=t^{2\alpha}$ і отримаємо квадратне рівняння

$$2\alpha(2\alpha+1)k^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha)x^2 - 2(1-2\alpha)^{\frac12}c_\alpha^{(2)}B\left(1-\alpha,\alpha\right)k\cdot x+1=0. \tag{2.3}$$

Знайдемо його дискримінант:

$$\begin{aligned}
D^{(0)}(\alpha) &= 4(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2\left(B\left(1-\alpha,\alpha\right)\right)^2k^2 - 8\alpha(2\alpha+1)k^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha) \\
&= 4k^2\left(\frac{2H\alpha\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3\left(\Gamma(\alpha)\right)^2}{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(\alpha)} - 2\alpha(2\alpha+1)\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(3\alpha+1)}\right) \\
&= 4k^2(2\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - \frac{2\Gamma(2\alpha)}{3\Gamma(3\alpha)}\right).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Дослідимо знак дискримінанту $D^{(0)}(\alpha)$ з (2.4). Для цього розглянемо окремо множник

$$D^{(1)}(\alpha) = \frac{\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - \frac{2\Gamma(2\alpha)}{3\Gamma(3\alpha)} = \frac{\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)},$$

що стоїть в дужках в правій частині (2.4). Його знак збігається зі знаком дискримінанту. Оскільки $\lim_{\alpha\to0}D^{(1)}(\alpha)=0$, то поведінку біля нуля треба вивчати додатково. При $\alpha\to1/2$ очевидно $D^{(1)}(\alpha)\to-\frac{2}{3\Gamma(3/2)}$, тобто при значеннях параметра Хюрста, близьких до 1, дискримінант від'ємний.

Вирази $D^{(0)}(\alpha)$ та $D^{(1)}(\alpha)$ мають такий самий знак, як і

$$D^{(4)}(\alpha) = 3\ln\Gamma(1-\alpha) - \ln\Gamma(1-2\alpha) - \ln\Gamma(2\alpha+1) + \ln\Gamma(3\alpha+1).$$

Скористаємось розкладом в ряд Тейлора

$$\ln\Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{k}(-z)^k = -\gamma z + \frac{\pi^2}{12}z^2 + o\left(z^2\right)$$

при $z\to0$. Отримаємо

$$D^{(4)}(\alpha) = \frac{\pi^2}{3}\alpha^2 + o(\alpha^2)$$

при $\alpha\to0$. Отже, при α близьких до 0 дискримінант $D^{(0)}(\alpha)$ додатний.

Для того, щоб довести, що існує таке $\alpha_0\in(0,\frac12)$, що дискримінант $D^{(0)}(\alpha)$ додатний на інтервалі $(0,\alpha_0)$ та від'ємний на інтервалі $(\alpha_0,\frac12)$, достатньо показати, що $D^{(4)}(\alpha)/\alpha^2$ спадає на $(0,\frac12)$.

В наступних викладках скористаємось формулою Ньютона–Лейбніца, формулою інтегрування частинами, а також тим, що $\ln\Gamma(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{D^{(4)}(\alpha)}{\alpha^2}\right) &= \frac{2\psi(1-2\alpha) - 3\psi(1-\alpha) - 2\psi(2\alpha+1) + 3\psi(3\alpha+1)}{\alpha^2} \\
&\quad + 2\Bigg(\frac{\ln\Gamma(1-2\alpha) - 3\ln\Gamma(1-\alpha)}{\alpha^3} \\
&\qquad\quad + \frac{2\ln\Gamma(1) + \ln\Gamma(2\alpha+1) - \ln\Gamma(3\alpha+1)}{\alpha^3}\Bigg) \\
&= \frac{2\psi(1-2\alpha) + 3\psi(1-\alpha) - 2\psi(2\alpha+1) + 3\psi(3\alpha+1)}{\alpha^2} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^3}\int_{-2\alpha}^{3\alpha} \psi(1+z) g_1\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\int_{-2\alpha}^{3\alpha} \psi'(1+z) g_2\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz = \frac{1}{\alpha}\int_{-2\alpha}^{3\alpha} \psi''(1+z) g_3\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_{-2\alpha}^{3\alpha} \psi''(1+z)\left(g_3^+\left(\frac{z}{\alpha}\right) - g_3^-\left(\frac{z}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha/2}^{0}\left(\psi''\left(1+z-\frac{\alpha}{2}\right) - \psi''(1+z)\right) g_3^-\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz < 0,
\end{aligned}$$

де $\psi(x) = \frac{d}{dx}(\ln\Gamma(x)) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — дигамма-функція,

$$g_3(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & -2 < x < -1, \\ 2x^2 + x, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 2, \\ -x^2 + 3x, & 2 < x < 3, \\ 0, & x > 3, \end{cases}$$

$g_2(x) = -g_3'(x)$ (графік на рис. 2), $g_1(x) = -g_2'(x)$ (рис. 1), $g_3^+(x) = \max\{g_3(x), 0\}$, $g_3^-(x) = |\min\{g_3(x), 0\}|$, бо на інтервалі $(0, +\infty)$ тетрагамма-функція $\psi''(x)$ зростає та набуває лише від'ємних значень та

$$g_3^+(x) - g_3^-(x + \tfrac{1}{2}) \geq 0 \quad \text{при } x \in (-2, 3).$$

Графіки функцій $g_3(x)$ та $g_3^+(x) - g_3^-(x + \frac{1}{2})$ наведені на рис. 3.

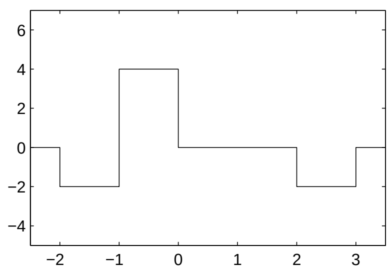

Рис. 1. Графік функції $g_1(x)$.

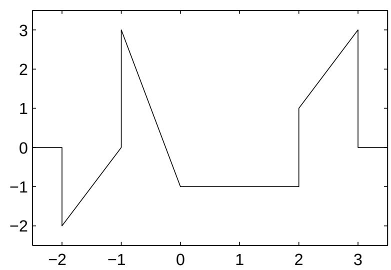

Рис. 2. Графік функції $g_2(x)$.

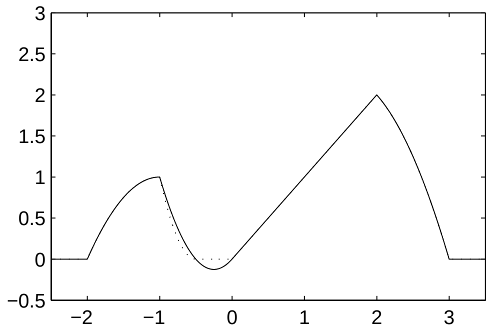

Рис. 3. Графіки функцій $g_3(x)$ (суцільна лінія) та $g_3^+(x) - g_3^-(x+\frac{1}{2})$ (пунктир, співпадає з $g_3(x)$ при $x \notin (-1,0)$).

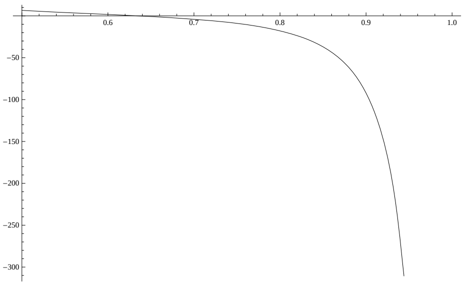

Рис. 4

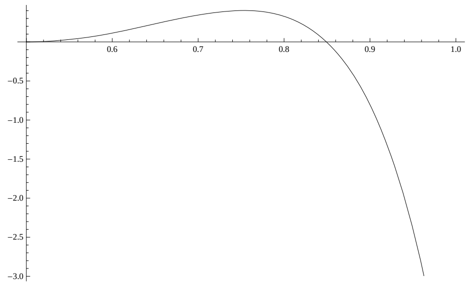

Рис. 5

Отже, $D^{(4)}(\alpha)/\alpha^2$ спадає на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$. Рівняння $D^{(0)}(\alpha) = 0$ має єдиний корінь α_0 на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$. Чисельно пораховано, що $\alpha_0 \approx 0.349278$. При $\alpha \in (0, \alpha_0)$ виконується нерівність $D^{(0)}(\alpha) > 0$. При $\alpha \in (\alpha_0, \frac{1}{2})$ маємо $D^{(0)}(\alpha) < 0$.

Наведемо графік другої похідної $D^{(4)}(\alpha)$ як функції індекса Хюрста $H = \alpha + \frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, побудований у пакеті Математика (рис. 4). З цього графіка видно, що існує значення $H = H_2 \in (0.6, 0.7)$ таке, що при $H \in (\frac{1}{2}, H_2)$ друга похідна додатна, а при $H \in (H_2, 1)$ вона від'ємна. Чисельно $H_2 \approx 0.635256317$. Звідси робимо висновок, що перша логарифмічна похідна зростає в деякому інтервалі $(\frac{1}{2}, H_1)$ і спадає при $H \in (H_1, 1)$. Це, в свою чергу, означає, що дискримінант є додатним на деякому інтервалі $(\frac{1}{2}, H_0)$ і від'ємний на інтервалі $(H_0, 1)$.

Наведемо графік дискримінанту $D^{(0)}$ з (2.4) як функції від $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, побудований у пакеті Математика (рис. 5). З цього графіка видно, що існує значення $H = H_0 \in (0.8, 0.9)$ таке, що для $H \in (\frac{1}{2}, H_0)$ $D^{(0)} > 0$, а для $H \in (H_0, 1)$ дискримінант $D^{(0)} \le 0$. Чисельно $H_0 \approx 0.849278$.

У випадку, коли $D^{(0)} \le 0$, маємо $\frac{\partial f(\alpha,k,t)}{\partial t} \ge 0$ та $f(\alpha, k, t)$ строго зростає по t; отже $\max_{t\in[0,1]} f(\alpha, k, t) = f(\alpha, k, 1)$.

Тоді маємо

$$\begin{aligned} f(\alpha, k, 1) = 2\alpha(2\alpha+1)k^2 \cdot B(\alpha+1, 2\alpha)\frac{1}{4\alpha+1} \\ - 2(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}} c_\alpha^{(2)} B\left(1-\alpha, \alpha\right) k \cdot \frac{1}{2\alpha+1} + 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Шукаємо точку мінімуму квадратного тричлена (2.5) від k:

$$k_{\min} = \frac{(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}} c_\alpha^{(2)} B\left(1-\alpha,\alpha\right)\cdot(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^2\cdot B(\alpha+1,2\alpha)}. \tag{2.6}$$

Отже, для $H\in[H_0,1)$, де $H_0\approx 0.849278$

$$\begin{aligned}\min_k \max_t f(\alpha,k,t) &= \frac{(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2 B\left(1-\alpha,\alpha\right)^2(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^3 B(\alpha+1,2\alpha)} \\ &\quad - \frac{(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2 B\left(1-\alpha,\alpha\right)^2\cdot(4\alpha+1)}{\alpha(2\alpha+1)^3\cdot B(\alpha+1,2\alpha)} + 1 \\ &= 1 - \frac{(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2 B\left(1-\alpha,\alpha\right)^2(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^3 B(\alpha+1,2\alpha)}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

У випадку, коли $D^{(0)}>0$, корені квадратного тричлена (2.3) мають вигляд

$$t_1 = \left(\frac{3\Gamma(3\alpha)}{2k\Gamma(2\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{(\Gamma(1-\alpha))^3}-\sqrt{\Gamma(1-2\alpha)\cdot\left(\frac{(\Gamma(1-\alpha))^3}{\Gamma(1-2\alpha)}-\frac{2\Gamma(2\alpha)}{3\Gamma(3\alpha)}\right)}}{\sqrt{\alpha(2\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}}\right)^{\frac{1}{2\alpha}},$$

$$t_2 = \left(\frac{3\Gamma(3\alpha)}{2k\Gamma(2\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{(\Gamma(1-\alpha))^3}+\sqrt{\Gamma(1-2\alpha)\cdot\left(\frac{(\Gamma(1-\alpha))^3}{\Gamma(1-2\alpha)}-\frac{2\Gamma(2\alpha)}{3\Gamma(3\alpha)}\right)}}{\sqrt{\alpha(2\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

При $k>0$ корені t_1 та t_2 додатні.

Дійсно, старший коефіцієнт та вільний член в (2.3) додатні, отже корені одного знаку. Більш того, коефіцієнт при $t^{2\alpha}$ від'ємний, отже корені додатні.

Тоді $\frac{\partial f(\alpha,k,t)}{\partial t}>0$ при $0<t<t_1$, $f(\alpha,k,t)$ — зростає; $\frac{\partial f(\alpha,k,t)}{\partial t}<0$ при $t_1<t<t_2$, $f(\alpha,k,t)$ — спадає; $\frac{\partial f(\alpha,k,t)}{\partial t}>0$ при $t>t_2$, $f(\alpha,k,t)$ — зростає.

Отже, маємо випадки:

а) якщо $t_1>1$, то $f(\alpha,k,t)$ зростає на $[0,1]$ та $\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t)=f(\alpha,k,1)$;

б) якщо $t_1<1$, то $\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t)=\max\{f(\alpha,k,1),f(\alpha,k,t_1)\}$;

в) якщо $t_1=1$, то $\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t)=f(\alpha,k,1)=f(\alpha,k,t_1)$.

Отже, при $H\in(\frac{1}{2},H_0)$, де $H_0\approx 0.849278$, маємо

$$\min_k \max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t) = \min_k \begin{cases}\max\{f(\alpha,k,1),f(\alpha,k,t_1)\}, & \text{при } t_1<1,\\ f(\alpha,k,1), & \text{при } t_1\ge 1.\end{cases} \tag{2.8}$$

Покажемо, що формулу (2.8) можна зробити менш громіздкою. Позначимо k_* те значення k, при якому досягається мінімум функції $\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t)$. Нагадаємо, що при $k=k_{\min}$ досягається мінімум функції $f(\alpha,k,1)$, див. (2.6). Нехай $t_1(k_{\min})$ та $t_1(k_*)$ позначають значення t_1 при $k=k_{\min}$ та, відповідно, $k=k_*$.

Можна перевірити, що $t_1(k_{\min})<1$:

$$(t_1(k_{\min}))^{2\alpha} < \frac{3\Gamma(3\alpha)}{2k_{\min}\Gamma(2\alpha)}\frac{\sqrt{(\Gamma(1-\alpha))^3}}{\sqrt{\alpha(2\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}} = \frac{2\alpha+1}{4\alpha+1} < 1.$$

Далі можна довести, що $t_1(k_*)\le 1$. (Справді, якщо $t_1(k_*)>1$, то в околі точки k_* виконуються нерівність $t_1(k)>1$ та рівність $\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t)=f(\alpha,k,1)$.) З необхідної умови мінімуму $\frac{\partial}{\partial k} f(\alpha,k,1)\big|_{k=k_*}$ отримуємо $k_*=k_{\min}$, $t_1(k_*)<1$ та приходимо до суперечності.)

З формул

$$\min_k \max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t) = \max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k_*,t) = \max\{f(\alpha,k_*,1), f(\alpha,k_*,t_1(k_*))\},$$

$$\max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t) \le \max\{f(\alpha,k,1), f(\alpha,k,t_1(k))\}$$

випливає

$$\min_k \max_{t\in[0,1]} f(\alpha,k,t) = \min_k \max\{f(\alpha,k,1), f(\alpha,k,t_1(k))\}.$$

Теорему доведено. □

Наслідок 2.2. *З* (2.7) *маємо нерівність для* $H \in [H_0, 1)$, *де* $H_0 \approx 0.849278$

$$\frac{(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2 B\,(1-\alpha,\alpha)^2\,(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^3 B(\alpha+1,2\alpha)} < 1. \tag{2.9}$$

Насправді нерівність (2.9) *виконується при всіх* $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, *бо*

$$1 - \frac{(1-2\alpha)\left(c_\alpha^{(2)}\right)^2 B\,(1-\alpha,\alpha)^2\,(4\alpha+1)}{2\alpha(2\alpha+1)^3 B(\alpha+1,2\alpha)} = \min_{k\in\mathbf{R}} f(\alpha,k,1) = f(\alpha,k_{\min},1) > 0,$$

де $k_{\min}$ *означено у формулі* (2.6). *Звідси одержуємо таку верхню оцінку для* $c_\alpha^{(2)}$ *при всіх* $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$c_\alpha^{(2)} < \sqrt{\frac{2\alpha(2\alpha+1)^3 B(\alpha+1,2\alpha)}{(1-2\alpha)(4\alpha+1)B\,(1-\alpha,\alpha)^2}} =: c_\alpha^{(3)}.$$

З рисунку 6, побудованого за допомогою програми Математика, видно, що дійсно оцінка $c_\alpha^{(2)} < c_\alpha^{(3)}$ виконується для всіх $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Це й підтверджує графік різниці $c_\alpha^{(3)} - c_\alpha^{(2)}$ на рисунку 7.

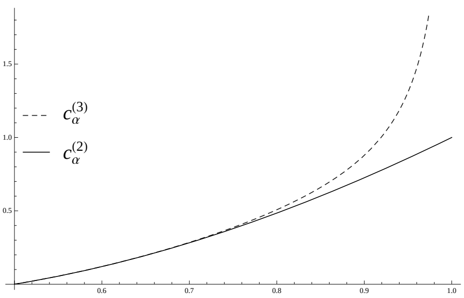

Рис. 6

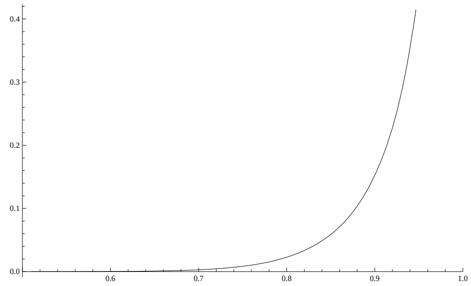

Рис. 7

Також, з нерівності (2.9) отримаємо таку оцінку для гамма-функцій при $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$\frac{(\Gamma(1-\alpha))^3}{\Gamma(1-2\alpha)} < \frac{2(2\alpha+1)^2\Gamma(2\alpha)}{3(4\alpha+1)\Gamma(3\alpha)}.$$

Література

1. Т. Андрощук, *Наближення стохастичного інтегралу по дробовому броунівському руху інтегралами по абсолютно неперервним процесам*, Теор. ймовір. та матем. статист. **73** (2005), 17–26.
2. О. Л. Банна, Ю. С. Мішура, *Найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху*, Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Математика і механіка **19** (2008), 38–43.

3. О. Л. Банна, Ю. С. Мішура, *Оцінка відстані між дробовим броунівським рухом і простором гауссових мартингалів на відрізку*, Теор. ймовір. та матем. статист. **83** (2010), 12–21.
4. В. В. Дорошенко, Ю. С. Мішура, О. Л. Банна, *Відстань дробового броунівського руху до підпростору мартингалів з "подібними" ядрами*, Теор. ймовір. та матем. статист. **87** (2012), 38–45.
5. Ю. С. Мішура, О. Л. Банна, В. В. Дорошенко, *Відстань дробового броунівського руху до підпросторів гауссівських мартингалів*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: фізико-математичні науки **1** (2013), 53–60.
6. Ю. С. Мішура, О. Л. Банна, *Наближення дробового броунівського руху вінерівськими інтегралами*, Теор. ймовір. та матем. статис. **79** (2008), 106–115.
7. T. Androshchuk and Y. S. Mishura, *Mixed Brownian–fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics*, Stochastics: An Int. J. Prob. Stoch. Proc. **78** (2006), 281–300.
8. O. Banna and Y. S. Mishura, *Approximation of fractional Brownian motion with associated Hurst index separated from 1 by stochastic integrals of linear power functions*, Theory of Stochastic Processes **14(30)** (2008), no. 3–4, 1–16.
9. A. Le Breton, *Filtering and parameter estimation in a simple linear system driven by a fractional Brownian motion*, Stat. Prob. Lett. **38** (1998), 263–274.
10. Yu. Mishura, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Lecture Notes in Math., vol. 1929, Springer, Berlin, 2008.
11. I. Norros, E. Valkeila, and J. Virtamo, *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, Bernoulli **5(4)** (1999), 571–587.
12. S. Shklyar, G. Shevchenko, Yu. Mishura, V. Doroshenko, and O. Banna, *The approximation of fractional Brownian motion by martingales*, Methodology and Computing in Applied Probability, Springer US (DOI 10.1007/s11009-012-9313-8), published online: November 2012.
13. T. H. Thao, *A note on fractional Brownian motion*, Vietnam J. Math. **31** (2003), no. 3, 255–260.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: bannaya@mail.univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: shklyar@univ.kiev.ua

Надійшла 16/03/2014