Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 52–63

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 52–63

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СУМІШІ ДВОХ СИМЕТРИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ ЗА ЗМІЩЕНОЮ ВИБІРКОЮ

УДК 519.21

Т. ГОРБАЧ

Анотація. У дослідженні розглядається зміщена вибірка з суміші двох симетричних розподілів, що відрізняються зсувом. Для оцінки невідомих параметрів використовується метод моментів та метод узагальнених оціночних рівнянь. За допомогою оцінок оптимальних оцінюючих функцій та оцінки методу моментів, побудовано адаптивні оцінки параметрів вибірки. Досліджена асимптотична поведінка оцінок методу узагальнених оціночних рівнянь та адаптивних оцінок.

Abstract. In this investigation the shifted sample from the mixture of two symmetric distributions is observed. For the estimation of the unknown parameters the moment method and GEE-method were used. Using the estimations of optimal estimating functions and moment estimators, the adaptive estimations were constructed. The asymptotic behavior of GEE-estimators and adaptive estimators is investigated.

Аннотация. В этом исследовании рассматривается смещенная выборка из смеси двух симметричных распределений, которые отличаются смещением. Для оценки неизвестных параметров используется метод моментов и метод обобщенных оценочных уравнений. При помощи оценок оптимальных оценивающих функций и оценки метода моментов построены адаптивные оценки параметров выборки. Исследовано асимптотическое поведение оценок метода обобщенных оценочных уравнений и адаптивных оценок.

1. Вступ

У даній роботі розглядається семіпараметричне оцінювання параметрів суміші двох симетричних розподілів за зміщеною вибіркою. Оцінюванню параметрів моделі суміші присвячено багато робіт, наприклад [1] та [2]. Випадок оцінювання параметрів суміші двох симетричних розподілів за незміщеною вибіркою розглянуто у [3] - [6]. У роботі [3] побудовані оцінки методом моментів для параметрів суміші за незміщеною вибіркою, отримані умови конзистентності та асимптотичної нормальності цих оцінок, знайдена їх асимптотична дисперсія. У праці [4] побудовані оцінки методу узагальнених оціночних рівнянь (далі — GEE-оцінки) параметрів суміші двох симетричних розподілів за незміщеною вибіркою, отримані умови їх асимптотичної нормальності, та знайдена точна нижня межа для коефіцієнтів їх розсіювання. У [5] побудовано адаптивні оцінки невідомих параметрів суміші двох розподілів за незміщеною вибіркою, досліджена їх асимптотична поведінка. Результати робіт [3] і [5] у даній роботі переносяться на випадок оцінювання за зміщеною вибіркою.

Оцінювання функцій розподілу за зміщеною однорідною вибіркою описано у [7, с. 286]. У даній роботі ми застосовуємо дещо інший підхід, що спирається на техніку оцінок Горвіца–Томпсона (див. [8, с. 196], [9, с. 31]), але при цьому використовуємо описану у [7] техніку асимптотичного аналізу GEE-оцінок.

Поняття зміщеної вибірки та формальна постановка задачі розглянуті у п. 2. У п. 3 і п. 4 відповідно розглянуті оцінки методу моментів та GEE-оцінки параметрів суміші за зміщеною вибіркою при використанні оціночних функцій вигляду $\sum \beta_i u_i$, де u_i — фіксовані базисні функції. У п.5 розглянуто умови асимптотичної нормальності GEE-оцінок та визначені оптимальні коефіцієнти β_i^*, при яких досягається мінімальне значення $\Sigma(\beta_i^*)$ асимптотичної матриці розсіювання GEE-оцінок. Оскільки значення оптимальних коефіцієнтів β_i^* залежать від значень невідомих параметрів суміші, у п.6 побудовано консистентні оцінки $\hat{\beta}_i$ для β_i^*.

У п. 7 за допомогою оцінок методу моментів параметрів суміші та оцінок $\hat{\beta}_i$ оптимальних коефіцієнтів для оцінюючих функцій, побудовані адаптивні оцінки, що мають асимпотичну матрицю розсіювання $\Sigma(\beta_i^*)$.

2. Постановка задачі

Нехай розглядається вибірка $X = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, отримана відбором деяких об'єктів O з (потенційно необмеженої) генеральної сукупності. Нас цікавить розподіл деякої вимірюваної характеристики $\eta(O)$ цих об'єктів генеральної сукупності. Вибірка є зміщеною, тобто ймовірність об'єкта потрапити до вибірки залежить від значення його спостережуваної характеристики $\eta(O)$. Ми розглядатимемо випадок, коли

$$\mathsf{P}(\text{об'єкт } O \text{ потрапив до вибірки} \mid \eta(O) = t) = w(t),$$

$w(t) \neq 0$ для всіх t, що належать носію розподілу F, де F — функція розподілу елементів $\eta(O)$ генеральної сукупності. У даній роботі ми вважатимемо, що F є сумішшю двох розподілів, що відрізняються лише зсувом та якій відповідає щільність:

$$\eta \sim pf(x - a_1) + (1 - p)f(x - a_2), \tag{1}$$

де $0 < p < \frac{1}{2}$ — концентрація першої компоненти суміші, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$; $a_1 \neq a_2$ — медіана i-ої компоненти суміші, f — симетрична щільність розподілу відхилення спостереження від медіани ($f(-x) = f(x)$). Вважатимемо, що f — невідома диференційована функція.

Згідно з прикладом 5.2 з [7], функція розподілу випадкових величин ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, дорівнює

$$G(t) = \mathsf{P}\{\eta(O) < t \mid O \text{ потрапив до вибірки}\} = \frac{\int_{-\infty}^{t} w(x)\, F(dx)}{\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, F(dx)}, \tag{2}$$

Таким чином, спостереження $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ являють собою вибірку з незалежних однаковово розподілений випадкових величин з функцією розподілу G, визначеною формулою (2) з F, що задано в (1).

Зазвичай при статистичних обстеженнях параметри p, a_1 та a_2 — невідомі, тому задача даної роботи полягає в оцінюванні невідомого параметра $\theta = (p, a_1, a_2)$ за вибіркою $X = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

По аналогії з оцінкою Горвіца–Томпсона (див. [9, п. 1.7]), для оцінювання математичного сподівання довільної функції $h(\eta)$, для якої існує $\mathsf{E}h(\eta)$, за зміщеною вибіркою $X = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ можна запропонувати:

$$\hat{h}_n(\eta) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w(\xi_j)}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w(\xi_j)} h(\xi_j). \tag{3}$$

3. Оцінки методу моментів для параметрів вибірки за зміщеною вибіркою

У роботі [3] описано побудову оцінок методу моментів для параметрів суміші за незміщеною вибіркою. У випадку зміщеної вибірки процедура залишається аналогічною, але для оцінки теоретичних моментів використовуються оцінки Горвіца-Томпсона за зміщеною вибіркою:

$$\hat{y}_k = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w(\xi_i)}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w(\xi_i)}\xi_i^k.$$

Якщо $\mathsf{E}(|\eta_1|^k) < \infty$, то $\hat{y}_k$ є консистентною оцінкою для $\mathsf{E}\,\eta^k$.

Оцінка методом моментів для параметрів p, a_1 та a_2 має вигляд:

$$\hat{p}_n = \hat{p}(C_n) = \begin{cases} P_1(C_n), & C_n > 432; \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, & C_n = 432; \\ P_2(C_n), & C_n < 432, \end{cases} \tag{4}$$

$$\hat{a}_{1,n} = \hat{y}_1 - \frac{\sqrt[3]{(1-3\hat{p}_n + 2\hat{p}_n^2)^2(3\hat{y}_1\hat{y}_2 - 2\hat{y}_1^3 - \hat{y}_3)}}{\sqrt[3]{\hat{p}_n}(1-2\hat{p}_n)}; \tag{5}$$

$$\hat{a}_{2,n} = \frac{1}{1-\hat{p}_n}(\hat{y}_1 - \hat{p}_n\hat{a}_{1,n}(\hat{p}_n)), \tag{6}$$

де

$$C_n = \frac{(24\hat{y}_1^5 - 60\hat{y}_1^3\hat{y}_2 + 30\hat{y}_1\hat{y}_2^2 + 20\hat{y}_1^2\hat{y}_3 - 10\hat{y}_2\hat{y}_3 - 5\hat{y}_1\hat{y}_4 + \hat{y}_5)^3}{(2\hat{y}_1^3 - 3\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_3)^5},$$

$$P_1(C) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{12}\sqrt{4 + \frac{2C(-\cos(B(C)) + \sqrt{3}\sin(B(C)))}{\sqrt{(-432+C)C}}},$$

$$P_2(C) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-(C+A(C))^2 + 432(C+2A(C))}}{2\sqrt{3}\sqrt{(432-C)A(C)}},$$

$$A(C) = \sqrt[3]{-(-432+C)^2C + 12\sqrt{3}\sqrt{(432-C)^3C^2}},$$

$$B(C) = 1/3\left(\pi - \arctan\left(\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{-432+C}}\right)\right).$$

Теорема 3.1. *Якщо*

1. $\mathsf{E}\,|\eta_1|^5 < \infty$;
2. $a_1 \neq a_2$;
3. $p \in (0, 1/2)$,

то оцінки (4)–(6) *є строго консистентними.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.2 з [3].

Зауваження 3.1. *Умови 2 і 3 теореми є умовами ідентифіковності. Якщо* $p = 1/2$, *або* $a_1 = a_2$, *задача оцінювання стає, взагалі кажучи, не ідентифіковною. Випадок* $p \in (\frac{1}{2}; 1)$ *перетворюється на розглянутий у теоремі, якщо поміняти місцями першу і другу компоненту. Накладаючи обмеження 3, ми визначаємо другу компоненту як таку, котра зустрічається у суміші частіше ніж інша.*

4. GEE-оцінки для параметрів суміші за зміщеною вибіркою

Для оцінки параметрів p, a_1, a_2 використаємо метод узагальнених оціночних рівнянь. Для випадку незміщеної вибірки цей метод описаний у [5].

Для побудови GEE-оцінок виберемо трійку довільних непарних функцій $g = g_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ таких, що для всіх $\alpha \in \mathbf{R}$ $\mathsf{E}\, g_i(\eta - \alpha) < \infty$. Тоді

$$\mathsf{E}\, g_i(\eta - \alpha) = p \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x) f(x + \alpha - a_1)\, dx + (1 - p) \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x) f(x + \alpha - a_2)\, dx$$

і,

$$\mathsf{E}[pg(\eta - a_1) + (1 - p)g(\eta - a_2)] = 0.$$

У даній роботі розглядатимемо оцінюючі функції вигляду

$$g_i(x) = \sum_{m=1}^{M} \beta_{im} u_m(x), \tag{7}$$

де $\{u_m(x)\}_{m=1}^{M}$ — деякий фіксований набір M непарних базисних функцій.

Статистика $\hat{\theta}_n = (\hat{p}_n, \hat{a}_{1,n}, \hat{a}_{2,n})$ називається GEE-оцінкою параметра $\theta = (p, a_1, a_2)$ з оціночною трійкою (g_1, g_2, g_3), якщо система рівнянь

$$\pi \hat{g}_i(\alpha_1) + (1 - \pi)\hat{g}_i(\alpha_2) = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

виконується майже напевно при підстановці $\pi = \hat{p}_n$, $\alpha_1 = \hat{a}_{1,n}$, $\alpha_2 = \hat{a}_{2,n}$.

Тут $\hat{g}_i$ - оцінка Горвіца-Томпсона для g_i за зміщеною вибіркою:

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w(\xi_j)}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w(\xi_j)} g(\xi_j - \alpha).$$

Підставивши оцінки для g у (8) отримаємо:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w(\xi_j)}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi g_i(\xi_j - \alpha_1) + (1 - \pi) g_i(\xi_j - \alpha_2)}{w(\xi_j)} = 0, \qquad i = 1, \dots, 3.$$

Спростивши, маємо:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi g_i(\xi_j - \alpha_1) + (1 - \pi) g_i(\xi_j - \alpha_2)}{w(\xi_j)} = 0, \dots i = 1, \dots, 3. \tag{9}$$

Це і є GEE-рівняння у випадку зміщеної вибірки.

Позначимо

$$\begin{gathered} \nu = (\pi, \alpha_1, \alpha_2), \\ \mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T, \\ \mathbf{h}(\xi_j, \nu) = \frac{\pi \mathbf{g}(\xi_j - \alpha_1) + (1 - \pi)\mathbf{g}(\xi_j - \alpha_2)}{w(\xi_j)}, \end{gathered} \tag{10}$$

Якщо справжнє значення $\theta = (p, a_1, a_2)$ є коренем рівняння

$$\mathsf{E}\, \mathbf{g}(\xi_j, \nu) = 0,$$

то відповідна GEE-оцінка $\hat{\theta}_n$ параметрів суміші є конзистентною. Прикладом конзистентної GEE-оцінки параметрів суміші є оцінка методу моментів.

5. Асимптотична нормальність GEE-оцінок

Асимптотична нормальність GEE-оцінок для незміщеної вибірки незалежних в сукупності випадкових величин розглянута в [7]. Асимптотична нормальність GEE-оцінок для параметрів суміші двох розподілів за незміщеною вибіркою розглянута у роботах [4] та [5]. Доведемо асимптотичну нормальність GEE-оцінок для параметрів суміші двох розподілів за зміщеною вибіркою.

Позначимо $V(\theta) = -\,\mathsf{E}\,\frac{\partial \mathbf{h}(\xi_j,\theta)}{\partial\theta}$, $Q(\theta) = \mathrm{Cov}(\mathbf{h}(\xi_j,\theta))$.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *Існують та є неперервними $f'(x)$ та $u'_m(x)$, $m = 1,\dots,M$;*
2. *$\hat\theta_n = (\hat p_n, \hat a_{1,n}, \hat a_{2,n})^T$ є консистентною оцінкою;*
3. *$\mathsf{E}\,\frac{u_m^2(\xi_1-a_k)}{w^2(\xi_1)} < \infty$; $m = 1,\dots,M$; $k = 1,2$;*
4. *Всі елементи матриці V є скінченними;* $\det V \neq 0$*;*
5. $$\exists\varepsilon>0,\delta>0:\quad \mathsf{E}\sup_{\alpha:\,|\alpha-a_k|<\varepsilon}\left|\frac{u_m(\xi_1-\alpha)}{w(\xi_1)}\right|^{1+\delta}<\infty;$$
$$\mathsf{E}\sup_{\alpha:\,|\alpha-a_k|<\varepsilon}\left|\frac{u'_m(\xi_1-\alpha)}{w(\xi_1)}\right|^{1+\delta}<\infty;\qquad m=1,\dots,M;\ k=1,2;$$
6. *$u_m(x+\delta)f(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ для будь-якого $\delta\in\mathbf{R}$;*
7. *$w(x)>0$, $x\in\mathrm{supp}(F)$.*

Тоді
$$\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta)\xrightarrow{d} N(0,\Sigma),$$
де $\Sigma = \Sigma(g_1,g_2,g_3) = V(\theta)^{-1}Q(\theta)(V(\theta)^{-1})^T$.

Дана теорема є наслідком теореми 5.14 з [7].

Знайдемо явний вигляд матриць V та Q. Для цього позначимо
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)f(x)\,dx.$$

Оскільки
$$\frac{\partial\,\mathsf{E}_t\,\mathbf{h}(\xi_1,t)}{\partial t} = 0,$$
то
$$\int_{-\infty}^{\infty} p\frac{g'(x-a_1)}{w(x)}w(x)\left[pf(x-a_1)+(1-p)f(x-a_2)\right]dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{pg(x-a_1)+(1-p)g(x-a_2)}{w(x)}\right]w(x)pf'(x-a_1)\,dx.$$
Аналогічно,
$$\int_{-\infty}^{\infty}(1-p)\frac{g'(x-a_2)}{w(x)}w(x)\left[pf(x-a_1)+(1-p)f(x-a_2)\right]dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left[pg(x-a_1)+(1-p)g(x-a_2)\right](1-p)f'(x-a_2)\,dx;$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x-a_1)-g(x-a_2)}{w(x)}w(x)[pf(x-a_1)+(1-p)f(x-a_2)]\,dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{pg(x-a_1)-(1-p)g(x-a_2)}{w(x)}w(x)[f(x-a_1)-f(x-a_2)]\,dx.$$

Використовуючі попередні співвідношення, легко показати, що матриця V має вигляд:

$$V = -\frac{1}{I}\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} g_1 b_1 & \int_{-\infty}^{\infty} g_1 b_2 & \int_{-\infty}^{\infty} g_1 b_3 \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_2 b_1 & \int_{-\infty}^{\infty} g_2 b_2 & \int_{-\infty}^{\infty} g_2 b_3 \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_3 b_1 & \int_{-\infty}^{\infty} g_3 b_2 & \int_{-\infty}^{\infty} g_3 b_3 \end{pmatrix},$$

де

$$b_1(x) = p^2 f'(x) + p(1-p) f'(x + a_2 - a_1),$$
$$b_2(x) = p(1-p) f'(x + a_1 - a_2) + (1-p)^2 f'(x),$$
$$b_3(x) = (2p-1) f(x) - p f(x + a_1 - a_2) + (1-p) f(x + a_2 - a_1).$$

$$\begin{aligned} Q &= \operatorname{Cov}(\mathbf{h}(\xi_j, \nu)) \\ &= \left(\mathsf{E}\left(\frac{p g_i(\xi_1 - a_1) + (1-p) g_i(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)} \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. \times \left(\frac{p g_j(\xi_1 - a_1) + (1-p) g_j(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)} \right) \right) \right)_{i,j=1}^{3}. \end{aligned}$$

Знайдемо явний вигляд функцій g_1, g_2, g_3, на яких досягається мінімальне значення матриці розсіювання Σ.

Розпишемо матриці V та Q враховуючи розклад по базису (7). Позначимо

$$b_k^+ = -\frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty} b_1(x) u_k(x)\, dx,$$
$$b_k^- = -\frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty} b_2(x) u_k(x)\, dx,$$
$$d_k = -\frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty} b_3(x) u_k(x)\, dx.$$

Матриці

$$V = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^M \beta_{1k} b_k^+ & \sum_{k=1}^M \beta_{1k} b_k^- & \sum_{k=1}^M \beta_{1k} d_k \\ \sum_{k=1}^M \beta_{2k} b_k^+ & \sum_{k=1}^M \beta_{2k} b_k^- & \sum_{k=1}^M \beta_{2k} d_k \\ \sum_{k=1}^M \beta_{3k} b_k^+ & \sum_{k=1}^M \beta_{3k} b_k^- & \sum_{k=1}^M \beta_{3k} d_k \end{pmatrix},$$

$$Q = \left(\sum_{k,l=1}^{M} c_{kl} \beta_{ik} \beta_{jl} \right)_{i,j=1}^{3},$$

де

$$\begin{aligned} c_{kl} = &\left(\mathsf{E}\left(\frac{p u_k(\xi_1 - a_1) + (1-p) u_k(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)} \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. \times \left(\frac{p u_l(\xi_1 - a_1) + (1-p) u_l(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)} \right) \right) \right)_{i,j=1}^{3}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$C = (c_{kl})_{k,l=1}^{M}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^+ & b_1^- & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_M^+ & b_M^- & d_M \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1M} & \beta_{2M} & \beta_{3M} \end{pmatrix}.$$

З теореми 3.2 роботи [5], мінімальне значення граничної дисперсійної матриці Σ досягається при $\beta^* = (B^T C^{-1} B)^{-1} C^{-1} B$ і дорівнює $\Sigma(\beta^*) = (B^T C^{-1} B)^{-1}$, тобто для всіх β

$$\Sigma(\beta) \geq \Sigma(\beta^*).$$

Зауваження 5.1. *Нерівність $\Sigma(\beta) \geq \Sigma(\beta^*)$ означає, що матриця $\Sigma(\beta) - \Sigma(\beta^*)$ є невід'ємновизначеною.*

6. Оцінки оптимальних коефіцієнтів β^*

Матриці B та C, а відповідно і асимптотична матриця розсіювання Σ залежать від невідомих параметрів p, a_1, a_2, тому виникає завдання побудови консистентних оцінок параметрів матриць B та C.

За побудовою матриці V,

$$b_k^+ = p\,\mathsf{E}\,\frac{u_k'(\xi_1 - a_1)}{w(\xi_1)}, \qquad b_k^- = (1-p)\,\mathsf{E}\,\frac{u_k'(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)},$$

$$d_k = \mathsf{E}\left[\frac{u_k(\xi_1 - a_2) - u_k(\xi_1 - a_1)}{w(\xi_1)}\right].$$

Побудуємо оцінки для цих коефіцієнтів, та визначимо умови їх консистентності.

$$\hat{b}_{k,n}^+ = \hat{p}_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)},$$

$$\hat{b}_{k,n}^- = \hat{p}_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - \hat{a}_{2,n})}{w(\xi_j)},$$

$$\hat{d}_{k,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n}) - u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)},$$

$$\hat{c}_{kl,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{\hat{p}_n u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) + (1-\hat{p}_n) u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n})}{w(\xi_j)} \times \frac{\hat{p}_n u_l(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) + (1-\hat{p}_n) u_l(\xi_j - \hat{a}_{2,n})}{w(\xi_j)},$$

де $\hat{p}_n$, $\hat{a}_{1,n}$, $\hat{a}_{2,n}$ — моментні оцінки параметрів суміші, що є консистентними.

Теорема 6.1. *Нехай існують околи нуля Θ_1, Θ_2 такі, що*

1. $\mathsf{E}\big(\sup_{\gamma\in\Theta_1} \frac{u_k'(\xi_1 - a_i + \gamma)}{w(\xi_1)}\big)^2 < \infty$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, M}$;
2. $\mathsf{E}\sup_{\gamma\in\Theta_2}\big|\frac{u_k''(\xi_1 - a_i + \gamma)}{w(\xi_1)}\big| < \infty$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, M}$;
3. $\mathsf{E}\big(\sup_{\gamma\in\Theta_1} \frac{u_k(\xi_1 - a_i + \gamma)}{w(\xi_1)}\big)^2 < \infty$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, M}$;
4. $w(x) > 0$, $x \in \operatorname{supp}(F)$.

Тоді оцінки $\hat{b}_{k,n}^+$, $\hat{b}_{k,n}^-$, $\hat{d}_{k,n}$, $\hat{c}_{kl,n}$ є консистентними.

Доведення. Розглянемо

$$\hat{b}_{k,n}^+ - b_k^+ = \hat{p}_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)} - p\,\mathsf{E}\,\frac{u_k'(\xi_1 - a_1)}{w(\xi_1)} = \varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{2,n} + \varepsilon_{3,n},$$

де

$$\varepsilon_{1,n} = (\hat{p}_n - p)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)} = (\hat{p}_n - p)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - a_1 + a_1 - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)},$$

$$\varepsilon_{2,n} = p\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) - u_k'(\xi_j - a_1)}{w(\xi_j)},$$

$$\varepsilon_{3,n} = p\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{u_k'(\xi_j - a_1)}{w(\xi_j)} - p\,\mathsf{E}\,\frac{u_k'(\xi_1 - a_1)}{w(\xi_1)}.$$

З консистентності моментної оцінки $\hat{p}_n$ випливає, що $\hat{p}_n - p \to 0$ за ймовірністю. Доведемо стохастичну обмеженість послідовності

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k'(\xi_j - a_1 + a_1 - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)},$$

тобто покажемо, що $\sup_n \mathsf{P}(|S_n| > C) \to 0$, $C \to \infty$.

$$\mathsf{P}(|S_n| > C) = \mathsf{P}(|S_n| > C, (a_1 - \hat{a}_{1,n}) \notin \Theta_1) + \mathsf{P}(|S_n| > C, (a_1 - \hat{a}_{1,n}) \in \Theta_1)$$

Перший доданок прямує до нуля, при $n \to \infty$, оскільки $\hat{a}_{1,n}$ — консистентна оцінка a_1.

Розглянемо окремо другий доданок. За теоремою Чебишева та умовою 1:

$$\mathsf{P}(|S_n| > C, (a_1 - \hat{a}_{1,n}) \in \Theta_1) < \mathsf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sup_{\gamma\in\Theta_1}\left|\frac{u_k'(\xi_j - a_i + \gamma)}{w(\xi_j)}\right| > C\right)$$
$$< \frac{\mathsf{E}\sup_{\gamma\in\Theta_1}\left|\frac{u_k'^2(\xi_1 - a_i+\gamma)}{w^2(\xi_1)}\right|}{C} \to 0, \qquad C \to \infty,$$

тому

$$\varepsilon_{1,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

За теоремою про середнє:

$$\varepsilon_{2,n} = p\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k'(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) - u_k'(\xi_j - a_1)}{w(\xi_j)}$$
$$= p(a_1 - \hat{a}_{1,n})\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k''(\xi_j - a_1 + \theta(a_1 - \hat{a}_{1,n}))}{w(\xi_j)}.$$

За виконання умови 2 теореми, аналогічно до випадку $\varepsilon_{1,n}$,

$$\varepsilon_{2,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

За ПЗВЧ та умовою 1 теореми

$$\varepsilon_{3,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Звідси, $\hat{b}^+_{k,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} b^+_k$, $n \to \infty$. Аналогічно, $\hat{b}^-_{k,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} b^-_k$, $n \to \infty$.
Розглянемо

$$\hat{d}_{k,n} - d_k = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n})}{w(\xi_j)} - \mathsf{E}\,\frac{u_k(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)}\right]$$
$$- \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n})}{w(\xi_j)} - \mathsf{E}\,\frac{u_k(\xi_1 - a_1)}{w(\xi_1)}\right] = \varepsilon_{4,n} - \varepsilon_{5,n},$$

$$\varepsilon_{4,n} = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n})}{w(\xi_j)} - \mathsf{E}\,\frac{u_k(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_1)}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n})}{w(\xi_j)} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_2)}{w(\xi_j)}\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_2)}{w(\xi_j)} - \mathsf{E}\,\frac{u_k(\xi_1 - a_2)}{w(\xi_j)}\right] \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Оскільки перший доданок прямує за ймовірністю до нуля за умовою 1 теореми, а другий доданок — за ПЗВЧ та умовою 3 теореми.

Аналогічно, $\varepsilon_{5,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, n \to \infty$, тому $\hat{d}_{k,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} d_k, n \to \infty$.

Доведемо консистентність оцінок $\hat{c}_{kl,n}$. Маємо $\hat{c}_{kl,n} - c_{kl} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, де

$$\delta_1 = \frac{\hat{p}_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n} u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) u_l(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) - p^2 \,\mathsf{E}\, u_k(\xi_j - a_1) u_l(\xi_j - a_1);$$

$$\delta_2 = \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n} \sum_{j=1}^{n} u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) u_l(\xi_j - \hat{a}_{2,n}) - p(1-p) \,\mathsf{E}\, u_k(\xi_j - a_1) u_l(\xi_j - a_2);$$

$$\delta_3 = \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n} \sum_{j=1}^{n} u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n}) u_l(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) - p(1-p) \,\mathsf{E}\, u_k(\xi_j - a_2) u_l(\xi_j - a_1);$$

$$\delta_4 = \frac{(1-\hat{p}_n)^2}{n} \sum_{j=1}^{n} u_k(\xi_j - \hat{a}_{2,n}) u_l(\xi_j - \hat{a}_{2,n}) - (1-p)^2 \,\mathsf{E}\, u_k(\xi_j - a_2) u_l(\xi_j - a_2).$$

Покажемо, що $\delta_1 \to 0$. Доведення $\delta_4 \to 0$ аналогічне.

$$\delta_1 = \varepsilon_{5,n} + \varepsilon_{6,n} + \varepsilon_{7,n},$$

де

$$\varepsilon_{5,n} = \frac{\hat{p}_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) u_l(\xi_j - \hat{a}_{1,n}) - u_k(\xi_j - a_1) u_l(\xi_j - a_1)}{w^2(\xi_j)};$$

$$\varepsilon_{6,n} = (\hat{p}_n^2 - p^2) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_1) u_l(\xi_j - a_1)}{w^2(\xi_j)};$$

$$\varepsilon_{7,n} = \frac{p^2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_1) u_l(\xi_j - a_1)}{w^2(\xi_j)} - p^2 \,\mathsf{E}\, \frac{u_k(\xi_1 - a_1) u_l(\xi_1 - a_1)}{w^2(\xi_1)}.$$

Внаслідок закону великих чисел

$$\varepsilon_{7,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{11}$$

Оскільки $\hat{p}_n^2 - p^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$, а послідовність

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_1) u_l(\xi_j - a_1)}{w^2(\xi_j)}$$

за виконання умови 3 стохастично обмежена, то

$$\varepsilon_{6,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{12}$$

Позначимо функцію $Z = u_k' u_l + u_k u_l'$.

Розглянемо тепер

$$\varepsilon_{5,n} = (a_1 - \hat{a}_{1,n}) \frac{\hat{p}_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{Z(\xi_j - a_1 + \theta(a_1 - \hat{a}_{1,n}))}{w^2(\xi_j)},$$

де $\theta \in [0,1]$. Оскільки

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(u_k' u_l + u_k u_l')}{w^2(\xi_j)} \le \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{u_k' u_l}{w^2(\xi_j)} \right)^2} + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{u_k u_l'}{w^2(\xi_j)} \right)^2},$$

то згідно з умовами 1 та 3 теореми ця послідовність стохастично обмежена, $\hat{p}_n^2$ теж, а $\hat{a}_{1,n} - a_1 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$. Тому

$$\varepsilon_{5,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{13}$$

З (11)-(13) випливає, що

$$\delta_1 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Доданок δ_4 аналогічний до δ_1, тому доведення $\delta_4 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$, проводиться аналогічно.

Розглянемо $\delta_2 = \varepsilon_{8,n} + \varepsilon_{9,n} + \varepsilon_{10,n}$, де

$$\varepsilon_{9,n} = \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n} \sum_{j=1}^{n} [\frac{u_k(\xi_j - \hat{a}_{1,n})u_l(\xi_j - \hat{a}_{2,n}) - u_k(\xi_j - a_1)u_l(\xi_j - a_2)}{w^2(\xi_j)};$$

$$\varepsilon_{10,n} = \frac{(\hat{p}_n - p)(1-\hat{p}_n - p)}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_1)u_l(\xi_j - a_2)}{w^2(\xi_j)};$$

$$\varepsilon_{11,n} = \frac{p(1-p)}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{u_k(\xi_j - a_1)u_l(\xi_j - a_2)}{w^2(\xi_j)} - \mathsf{E}\, \frac{u_k(\xi_1 - a_1)u_l(\xi_1 - a_2)}{w^2(\xi_1)} \right].$$

Внаслідок закону великих чисел

$$\varepsilon_{11,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

$\varepsilon_{10,n}$ — це добуток стохастично обмеженої послідовності і нескінченно малої за ймовірністю. Отже

$$\varepsilon_{10,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Аналогічно до $\varepsilon_{5,n}$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{9,n} = {} & \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}(a_2 - \hat{a}_{2,n})(a_1 - \hat{a}_{1,n}) \\ & \times \sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{u_k'(\xi_j - a_1 + \theta_1(a_1 - \hat{a}_{1,n}))u_l(\xi_j - a_2 + \theta_2(a_2 - \hat{a}_{2,n}))}{w^2(\xi_j)} \\ & + \frac{u_k(\xi_j - a_1 + \theta_1(a_1 - \hat{a}_{1,n}))u_l'(\xi_j - a_2 + \theta_2(a_2 - \hat{a}_{2,n}))}{w^2(\xi_j)} \Big],\end{aligned}$$

де $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ — випадкові величини.

З умов 1 та 3 теореми випливає

$$\varepsilon_{9,n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Звідси

$$\delta_2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Доведення $\delta_3 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$, цілком аналогічне.

Теорему доведено. □

Наслідок 6.1. *В умовах теореми 6.1, якщо* $\det C \neq 0$*, то*

$$\hat{\beta}_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \beta_i^*, \qquad i = 1, \ldots, 3,$$

де $\hat{\beta}_i$ *— стовпчики матриці* $(\hat{B}^T \hat{C}^{-1} \hat{B})^{-1} \hat{C}^{-1} \hat{B}$.

Доведення. З теореми випливає, що $\hat{B} \xrightarrow{\mathsf{P}} B$, $\hat{C} \xrightarrow{\mathsf{P}} C$ поелементно, тому

$$\hat{\beta}_n = (\hat{B}^T \hat{C}^{-1} \hat{B})^{-1} \hat{C}^{-1} \hat{B} \xrightarrow{\mathsf{P}} (B^T C^{-1} B)^{-1} C^{-1} B = \beta^*.$$ □

7. Адаптивні оцінки евклідових параметрів

Аналогічно до роботи [5], побудуємо адаптивні оцінки параметрів суміші, що мають мінімальну асимптотичну матрицю розсіювання.

Згідно з теоремою 6.1 про консистентність оцінок, ми можемо побудувати $\{\hat{\beta}_{im}\}$ - консистентні оцінки для оптимальних коефіцієнтів

$$\{\beta^*_{im}\}; \qquad i = 1, \dots, 3;\; m = 1, \dots, M.$$

Підставивши оцінки в (7), отримуємо оцінки для оптимальних оцінюючих функцій

$$\mathbf{g}_{\hat{\beta}_i}(x) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_{im} u_m(x). \tag{14}$$

Підставивши (14) у (8) отримуємо адаптивну систему рівнянь

$$\pi \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_i}(\alpha_1) + (1-\pi)\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_i}(\alpha_2) = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{15}$$

або, позначивши ліву частину системи (15)

$$\hat{\mathbf{h}}_{\hat{\beta}}(t) = \begin{pmatrix} \pi \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_1}(\alpha_1) + (1-\pi)\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_1}(\alpha_2) \\ \pi \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_2}(\alpha_1) + (1-\pi)\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_2}(\alpha_2) \\ \pi \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_3}(\alpha_1) + (1-\pi)\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\beta}_3}(\alpha_2) \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} \pi \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

маємо рівносильне векторне оцінююче рівняння

$$\hat{\mathbf{h}}(t) = 0. \tag{16}$$

Оскільки розв'язати таке рівняння досить складно, побудуємо наближення до його розвязку.

Візьмемо

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}$$

пілотну, $\sqrt{n}$-консистенту оцінку параметра $\theta = (p, a_1, a_2)^T$. Наприклад, це може бути оцінка методу моментів. Розкладемо ліву частину рівняння (16) за формулою Тейлора в точці $\tilde{\theta}_n$:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\hat{\beta}}(t) \approx \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\beta}}(\tilde{\theta}_n) + \hat{\mathbf{h}}'_{\hat{\beta}}(\tilde{\theta}_n)(t - \tilde{\theta}_n) = 0,$$

де $\hat{\mathbf{h}}'_{\hat{\beta}}(t)$ це матриця Якобі:

$$\hat{\mathbf{h}}'_{\hat{\beta}}(t) = \frac{D(h_{1,2}\,, h_3)}{D(\pi, \alpha_1, \alpha_2)}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно t і враховуючи, що за умовою нормування з теореми 3.2 з [5] $\hat{\mathbf{h}}'_{\hat{\beta}}(\theta) \approx E$, отримуємо наближену адаптивну оцінку невідомого параметра

$$\breve{\theta}_n = \tilde{\theta}_n - \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\beta}}(\tilde{\theta}_n). \tag{17}$$

Теорема 7.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *Існують та є неперервними $f'(x)$ та $u'_m(x)$, $m = 1, \dots, M$;*
2. *$\hat{\theta}_n = (\hat{p}_n, \hat{a}_{1,n}, \hat{a}_{2,n})^T$ є консистентною оцінкою;*
3. $\mathsf{E}\, \frac{u_m^2(\xi_1 - a_k)}{w^2(\xi_1)} < \infty$*; $m = 1, \dots, M$; $k = 1, 2$;*
4. *Всі елементи матриці V є скінченними;* $\det V \neq 0$*;*

5.
$$\exists \varepsilon > 0, \delta > 0\colon \quad \mathsf{E} \sup_{\alpha\colon |\alpha - a_k| < \varepsilon} \left| \frac{u_m(\xi_1 - \alpha)}{w(\xi_1)} \right|^{1+\delta} < \infty;$$
$$\mathsf{E} \sup_{\alpha\colon |\alpha - a_k| < \varepsilon} \left| \frac{u'_m(\xi_1 - \alpha)}{w(\xi_1)} \right|^{1+\delta} < \infty; \quad m = 1, \ldots, M; \quad k = 1, 2;$$

6. $u_m(x + \delta) f(x) \to 0$ *при* $x \to \pm\infty$ *для будь-якого* $\delta \in \mathbf{R}$*;*
7. $w(x) > 0$*,* $x \in \operatorname{supp}(F)$*.*

Тоді $\sqrt{n}(\breve{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma^*)$*,* $n \to \infty$*.*

Теорема доводиться аналогічно до теореми 5.1 роботи [5].

Подяка. Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику Р. Є. Майбороді за постановку задачі та обговорення результатів.

Література

1. D. M. Titterington, A. F. M. Smith, and U. E. Makov, *Statistical Analysis of Finite Mixture Distribution*, Wiley, New York, 1985.
2. G. J. McLachlan and D. Peel, *Finite Mixture Models*, Wiley-Interscience, 2000.
3. Р. Є. Майборода, *Оцінка середніх положень та концентрацій по спостереженнях двокомпонентної суміші симетричних розподілів*, Теор. ймовір. та матем. статист. **78** (2008), 133–141.
4. Р. Є. Майборода, О. Сугакова, *Оцінка евклідових параметрів у суміші двох симетричних розподілів*, Укр. мат. ж. **62** (2010), № 7, 945–953.
5. О. Сугакова, *Адаптивні оцінки параметрів суміші двох симетричних розподілів*, Теор. ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 146–155.
6. D. R. Hunter, S. Wang, and T. R. Hettmansperger, *Inference for mixtures of symmetric distributions*, Ann. Statist. **35** (2007), 224–251.
7. J. Shao, *Mathematical Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
8. S. L. Lohr, *Sampling: Design and Analysis*, Duxburry Press, 1999.
9. О. І. Василик, Т. О. Яковенко, *Лекції з теорії методів вибіркових обстежень*, ВПЦ “Київський університет”, Київ, 2010.
10. М. В. Карташов, *Імовірність, процеси, статистика*, Редакційно-видавничий центр Київського університету, 2007.

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

Надійшла 31/07/2013