Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 77–90

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 77–90

СТОХАСТИЧНИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

УДК 519.21

О. В. ІВАНОВ І К. К. МОСКВИЧОВА

Анотація. В роботі розглядається корелограмна оцінка коваріаційної функції стаціонарного гаусівського шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом, побудована за відхиленнями випадкового процесу, що спостерігається, від функції регресії, в яку замість невідомого значення параметра підставлено його оцінку найменших квадратів. Отримано стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції при необмеженому зростанні довжини інтервалу спостережень.

Abstract. In the paper a correlogram estimator is considered of stationary Gaussian noise covariance function in the time continuous nonlinear regression model built by the deviations of observed random process from regression function in which instead of unknown parameter value its least squares estimator is substituted. Stochastic asymptotic expansion of covariance function correlogram estimator in the case of unlimited increase of the observation interval length is obtained.

Аннотация. В работе рассматривается коррелограмная оценка ковариационной функции стационарного гауссовского шума в нелинейной модели регрессии с непрерывным временем, построенная по отклонениям наблюдаемого случайного процесса от функции регрессии, в которую вместо неизвестного значения параметра подставлена его оценка наименьших квадратов. Получено стохастическое асимптотическое разложение коррелограмной оценки ковариационной функции при неограниченном возрастании длины интервала наблюдений.

1. Вступ

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0,T],$$

де $g\colon [0,+\infty) \times \Theta_\gamma \to \mathbf{R}$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_q) \in \Theta \subset \mathbf{R}^q$, Θ — обмежена відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|\le 1} (\Theta + a\gamma)$, $\gamma > 0$ — деяке число; $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — випадковий шум, відносно якого припустимо, що

I. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — неперервний в середньому квадратичному сепарабельний вимірний стаціонарний гаусівський процес з нульовим середнім і абсолютно інтегровною коваріаційною функцією $B = B(t)$.

Якщо коваріаційна функція B невідома, то виникає задача статистичного оцінювання B за наявності заважаючого параметра θ.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50, 65B10, 60G15; Secondary 40A05.

Ключові слова і фрази. Нелінійна модель регресії з неперервним часом, стаціонарний гаусівський шум, коваріаційна функція, оцінка найменших квадратів, корелограмна оцінка, стохастичний асимптотичний розклад.

Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = \widehat{\theta}_T\,(X(t), t \in [0,T]) = (\widehat{\theta}_{1T}, \dots \widehat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ (Θ^c — замикання Θ), для якого

$$L_T(\widehat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} L_T(\tau), \qquad L_T(\tau) = \int_0^T \left[X(t) - g(t,\tau)\right]^2\, dt.$$

У якості оцінки B можна обрати корелограму, побудовану за відхиленнями спостережень $\widehat{X}(t) = X(t) - g(t, \widehat{\theta}_T)$, $t \in [0, T+H]$, а саме:

$$B_T(z, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} \int_0^T \widehat{X}(t+z)\widehat{X}(t)\, dt, \qquad z \in [0, H],$$

$H > 0$ — фіксоване число.

Зауважимо, що $B_T(0, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} L_T(\widehat{\theta}_T)$ є оцінкою найменших квадратів дисперсії $\sigma^2 = B(0)$ випадкового процесу ε, а

$$B_T(z, \theta) = B_T(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t+z)\varepsilon(t)\, dt$$

— корелограмою ε.

У книзі [1] для класичної нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими випадковими похибками спостережень знайдено стохастичний асимптотичний розклад нормованої залишкової суми квадратів як оцінки найменших квадратів невідомої дисперсії похибки спостережень (теорема 26, стр.173).

В нашій роботі отримано стохастичний асимптотичний розклад нормованої оцінки $B_T(z, \widehat{\theta}_T)$, яка, фактично, узагальнює для моделі з корельованими спостереженнями усереднену залишкову суму квадратів класичного регресійного аналізу [1,2]. Цей розклад є відправною точкою для вивчення тонких асимптотичних властивостей оцінки $B_T(z, \widehat{\theta}_T)$, зокрема, для знаходження важливих у застосуваннях асимптотик моментів оцінки $B_T(z, \widehat{\theta}_T)$.

2. Стохастичний асимптотичний розклад оцінки найменших квадратів

Першою частиною доведення основного результата роботи є теорема про стохастичний асимптотичний розклад самої оцінки найменших квадратів $\widehat{\theta}_T$. Для подальших формулювань необхідно ввести ряд позначень та припущень.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_q!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$, $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \dots u_q^{\alpha_q}$, $u = (u_1, \dots, u_q)$. Для гладкої функції $a(\tau)$ приймемо

$$a^{(\alpha)}(\tau) = \left(\partial^{|\alpha|} / \partial^{\alpha_1}\tau_1 \dots \partial^{\alpha_q}\tau_q\right) a(\tau),$$
$$a_{i_1 \dots i_r}(\tau) = \left(\partial^r / \partial\tau_{i_1} \dots \partial\tau_{i_r}\right) a(\tau), \qquad i_1, \dots, i_r = 1, \dots, q.$$

Припустимо, що у функції $g\,(t,\tau)$ існують і неперервні всі частинні похідні за змінними $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_q) \in \Theta_\gamma$ до порядку $k \geq 2$ включно для кожного $t > 0$, причому функції $g^{(\alpha)}\,(t,\tau)$, $|\alpha| = 1, \dots, k$, локально інтегровні з квадратом за t для довільного $\tau \in \Theta^c$. Позначимо $d_{iT}^2(\tau) = \int_0^T g_i^2(t,\tau)\, dt$, $i = 1, \dots, q$, $d_T^2(\alpha, \tau) = \int_0^T \left(g^{(\alpha)}(t,\tau)\right)^2 dt$, $|\alpha| = 1, \dots, k$.

Будемо вважати, що $\underline{\lim}_{T\to\infty}\, d_{iT}^2(\theta) > 0$, $i = 1, \dots, q$.

Позначимо також

$$\varphi_T(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T (g(t,\tau_1) - g(t,\tau_2))^2\, dt,$$

$$\Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T \left(g^{(\alpha)}(t,\tau_1) - g^{(\alpha)}(t,\tau_2)\right)^2\, dt,$$

$$I(\theta) = (I_{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = \left(T^{-1}\int_0^T g_i(t,\theta)g_j(t,\theta)\, dt\right)_{i,j=1}^q,$$

$$\Lambda(\theta) = \left(\Lambda^{ij}(\theta)\right)_{i,j=1}^q = I^{-1}(\theta), \qquad s^*(z) = T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t+z)\, dt.$$

Приймемо при $z \in [0, H]$

$$b_{i_1\ldots i_r}(z,\theta) = T^{-\frac12}\int_0^T [\varepsilon(t+z)g_{i_1\ldots i_r}(t,\theta) + \varepsilon(t)g_{i_1\ldots i_r}(t+z,\theta)]\, dt,$$

$$b_{i_1\ldots i_r}(\theta) = T^{-\frac12}\int_0^T \varepsilon(t)g_{i_1\ldots i_r}(t,\theta)\, dt = \frac12 b_{i_1\ldots i_r}(0,\theta),$$

$$b^{(\alpha)}(\theta) = T^{-\frac12}\int_0^T \varepsilon(t)g^{(\alpha)}(t,\theta)\, dt,$$

$$b_1^{(\alpha)}(z,\theta) = T^{-\frac12}\int_0^T \varepsilon(t+z)g^{(\alpha)}(t,\theta)\, dt,$$

$$b_2^{(\alpha)}(z,\theta) = T^{-\frac12}\int_0^T \varepsilon(t)g^{(\alpha)}(t+z,\theta)\, dt,$$

$$b^{(\alpha)}(z,\theta) = b_1^{(\alpha)}(z,\theta) + b_2^{(\alpha)}(z,\theta).$$

Нехай також

$$a_{i_1\ldots i_r}(z,\theta) = \mathsf{E}\, B_{T,i_1\ldots i_r}(z,\theta),$$

$$\Pi^{(\beta)(\gamma)}(z,\theta) = T^{-1}\int_0^T g^{(\beta)}(t+z,\theta)g^{(\gamma)}(t,\theta)\, dt,$$

$$\Pi_{(i)(j)}(z,\theta) = T^{-1}\int_0^T g_i(t+z,\theta)g_j(t,\theta)\, dt,$$

$$\Pi_{(i)(jk)}(z,\theta) = T^{-1}\int_0^T g_i(t+z,\theta)g_{jk}(t,\theta)\, dt,$$

$$\Pi_{(ij)(k)}(z,\theta) = T^{-1}\int_0^T g_{ij}(t+z,\theta)g_k(t,\theta)\, dt.$$

Тоді

$$a_{ij}(z,\theta) = \Pi_{(i)(j)}(z,\theta) + \Pi_{(j)(i)}(z,\theta); \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_{ijk}(z,\theta) = {}& \Pi_{(ij)(k)}(z,\theta) + \Pi_{(k)(ij)}(z,\theta) + \Pi_{(ik)(j)}(z,\theta) + \Pi_{(j)(ik)}(z,\theta) \\ & + \Pi_{(jk)(i)}(z,\theta) + \Pi_{(i)(jk)}(z,\theta); \end{aligned} \tag{2}$$

$$a_{ij}(\theta) = a_{ij}(0,\theta) = 2\Pi_{(i)(j)}(0,\theta) = 2I_{ij};$$

$$a_{ijk}(\theta) = a_{ijk}(0,\theta) = 2\left(\Pi_{(ij)(k)}(0,\theta) + \Pi_{(ik)(j)}(0,\theta) + \Pi_{(jk)(i)}(0,\theta)\right).$$

Літерами C_i, $i \geq 1$, будемо позначати додатні скінчені сталі. Присутність у будь-якому співвідношенні сталої C_i означає, що існує така стала C_i, що це співвідношення виконується.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

II.
$$\sup_{\tau\in\Theta^c} T^{-\frac{1}{2}} d_T\left(\alpha;\tau\right) \le C_1(\alpha), \qquad |\alpha| = 1,\dots,k; \tag{3}$$
$$\sup_{\tau_1,\tau_2\in\Theta^c} T^{-1}\Phi_T^{[\alpha]}\left(\tau_1,\tau_2\right)\|\tau_1-\tau_2\|^{-2} \le C_2(\alpha), \qquad |\alpha| = k. \tag{4}$$

Зауважимо, що умова (4) для мультиіндексів α, $0 \le |\alpha| \le k-1$, випливає із співвідношень (3), що виконуються для $\alpha+e_i$, $i = 1,\dots,q$, де $e_i \in \mathbf{R}^q$ — i-й одиничний орт, тобто вектор e_i має i-ту координату 1, а решту — нулі.

Нехай $\lambda_{\min}(A)$ і $\lambda_{\max}(A)$ — найменше і найбільше власні числа додатно визначеної матриці А.

III. Для деякого $\lambda_0 > 0$ для достатньо великих $T(T > T_0)$
$$\lambda_{\min}(I(\theta)) \ge \lambda_0.$$

Нижче ми вважаємо коректним диференціювання за змінними $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_q)$ під знаком інтеграла $B_T(z,\tau)$.

Наступна теорема є зручним для нас переформулюванням теореми 3.3.1 стор. 135 книги [3].

Теорема 2.1. *Нехай виконані умови **I**–**III**, а оцінка найменших квадратів $\widehat{\theta}_T$ консистентна в тому розумінні, що для будь-якого $\rho > 0$ і деякого цілого $m \ge 2$*
$$\mathsf{P}\left\{\|\widehat{\theta}_T-\theta\| \ge \rho\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right), \qquad T\to\infty. \tag{5}$$

Тоді
$$T^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\theta}_T-\theta\right) = \sum_{\nu=0}^{k-2} h_\nu\left(\theta\right)T^{-\frac{\nu}{2}} + \xi_{k-1}(\theta)T^{-\frac{k-1}{2}}, \tag{6}$$
де випадковий вектор $\xi_{k-1}(\theta)$ має властивість
$$\mathsf{P}\left\{\|\xi_{k-1}(\theta)\| \ge C_3\ln^{\frac{k}{2}}T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right),$$
$h_\nu(\theta) = (h_{\nu i}(\theta))_{i=1}^q$, $\nu = 0,\dots,k-2$, — однорідні векторні поліноми степеня $\nu+1$ від випадкових змінних $b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1,\dots,\nu+1$, з рівномірно за T обмеженими коефіцієнтами.

Для запису перших поліномів стохастичного асимптотичного розкладу приймемо тензорну угоду, а саме: якщо в добутку двох або більшого числа множників деякий індекс зустрічається двічі, це означає підсумовування за цим індексом від 1 до q. Тоді маємо, пропускаючи в запису формул залежність від θ,
$$h_0 = \left(\Lambda^{ii_1}b_{i_1}\right)_{i=1}^q, \tag{7}$$
$$h_1 = \left(\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2i_3}\left(b_{i_1i_2}b_{i_3} - \frac{1}{4}\Lambda^{i_4i_5}a_{i_1i_2i_4}b_{i_3}b_{i_5}\right)\right)_{i=1}^q, \tag{8}$$
Достатні умови виконання (5) містяться в [3], див. також [1].

3. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки

Нехай виконуються умови **I**–**III**. Розглянемо вираз
$$T^{\frac{1}{2}}\left(B_T(z,\widehat{\theta}_T)-B(z)\right) = T^{\frac{1}{2}}\left(B_T(z)-B(z)\right) + T^{-\frac{1}{2}}I_{2T} - T^{-\frac{1}{2}}I_{3T} - T^{-\frac{1}{2}}I_{4T},$$
де
$$I_{2T} = \int_0^T\left(g\left(t+z,\widehat{\theta}_T\right)-g\left(t+z,\theta\right)\right)\left(g\left(t,\widehat{\theta}_T\right)-g\left(t,\theta\right)\right)dt,$$

$$I_{3T} = \int_0^T \varepsilon(t+z)\left(g\left(t,\widehat{\theta}_T\right) - g(t,\theta)\right) dt,$$

$$I_{4T} = \int_0^T \varepsilon(t)\left(g\left(t+z,\widehat{\theta}_T\right) - g(t+z,\theta)\right) dt.$$

Розглянемо спочатку I_{2T}. Зробимо заміну змінних $u = T^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)$, тобто

$$\widehat{\theta}_T = \theta + T^{-\frac{1}{2}}u \equiv H(u),$$

і запишемо розклад Тейлора за $u = (u_1, \dots, u_q)$:

$$\begin{aligned}
T^{-\frac{1}{2}} I_{2T} &= T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \left(g(t+z,H(u)) - g(t+z,\theta)\right)\left(g(t,H(u)) - g(t,\theta)\right) dt \\
&= T^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=2}^{k-1} \frac{1}{\alpha!}\Bigg[\int_0^T \big[(g(t+z,H(u)) - g(t+z,\theta)) \\
&\qquad \times (g(t,H(u)) - g(t,\theta))\big]^{(\alpha)}\Big|_{u=0} dt\Bigg] u^\alpha \\
&\quad + T^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!}\Bigg[\int_0^T \big[(g(t+z,H(u)) - g(t+z,\theta)) \\
&\qquad \times (g(t,H(u)) - g(t,\theta))\big]^{(\alpha)}\Big|_{u=u^*} dt \\
&\qquad - \int_0^T \big[(g(t+z,H(u)) - g(t+z,\theta)) \\
&\qquad \times (g(t,H(u)) - g(t,\theta))\big]^{(\alpha)}\Big|_{u=0} dt\Bigg] u^\alpha, \\
&\qquad \|u^*\| \le \|u\|.
\end{aligned} \tag{9}$$

При $|\alpha| \ge 2$ маємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[(g(t+z,H(u)) - g(t+z,\theta))(g(t,H(u)) - g(t,\theta))\right]^{(\alpha)} dt \\
&\quad = T^{-\frac{|\alpha|}{2}}\Bigg[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta,\gamma)\int_0^T g^{(\beta)}(t+z,H(u))\, g^{(\gamma)}(t,H(u))\, dt \\
&\qquad + \int_0^T g^{(\alpha)}(t+z,H(u))\left(g(t,H(u)) - g(t,\theta)\right) dt \\
&\qquad + \int_0^T \left(g(t+z,H(u)) - g(t+z,\theta)\right) g^{(\alpha)}(t,H(u))\, dt\Bigg],
\end{aligned}$$

де мультиіндекси $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ та $C(\beta,\gamma)$ — константи. Завдяки цьому, залишковий член у розкладі (9) можна записати у вигляді

$$R_{k-1}^{(1)}(\theta) = T^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} S(\alpha) u^\alpha, \tag{10}$$

де

$$S(\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta,\gamma) \int_0^T \left[g^{(\beta)}\left(t+z, H(u^*)\right) g^{(\gamma)}\left(t, H(u^*)\right) - g^{(\beta)}\left(t+z,\theta\right) g^{(\gamma)}\left(t,\theta\right)\right] dt$$
$$+ \int_0^T g^{(\alpha)}\left(t+z, H(u^*)\right)\left(g\left(t, H(u^*)\right) - g(t,\theta)\right) dt$$
$$+ \int_0^T g^{(\alpha)}\left(t, H(u^*)\right)\left(g\left(t+z, H(u^*)\right) - g(t+z,\theta)\right) dt$$

За умови (3) при $T > T_0$

$$T^{-\frac{1}{2}} \left| \int_0^T g^{(\alpha)}\left(t+z, H(u^*)\right)\left(g\left(t, H(u^*)\right) - g(t,\theta)\right) dt \right|$$
$$\le T^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left(g^{(\alpha)}\left(t+z, H(u^*)\right)\right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \varphi_T^{\frac{1}{2}}\left(H(u^*),\theta\right) \le C_4 \|u\|. \tag{11}$$

Аналогічно

$$T^{-\frac{1}{2}} \left| \int_0^T g^{(\alpha)}\left(t, H(u^*)\right)\left(g\left(t+z, H(u^*)\right) - g(t+z,\theta)\right) dt \right| \le C_5 \|u\|, \tag{12}$$

$$T^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta,\gamma) \left(\Pi^{(\beta)(\gamma)}\left(z, H(u^*)\right) - \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z,\theta)\right) \right|$$
$$\le T^{-\frac{1}{2}} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta,\gamma)$$
$$\times \left[\left| \int_0^T \left(g^{(\beta)}\left(t+z, H(u^*)\right) - g^{(\beta)}(t+z,\theta)\right) g^{(\gamma)}\left(t, H(u^*)\right) dt \right| \right. \tag{13}$$
$$\left. + \left| \int_0^T g^{(\beta)}\left(t+z, H(u^*)\right) \left(g^{(\gamma)}\left(t, H(u^*)\right) - g^{(\gamma)}(t,\theta)\right) dt \right| \right]$$
$$\le C_6 \|u\|.$$

Оскільки $|u^\alpha| \le \|u\|^{|\alpha|}$, із (10)–(13) одержуємо

$$\left| R_{k-1}^{(1)}(\theta) \right| \le C_7 T^{-\frac{k-1}{2}} \|u\|^k. \tag{14}$$

Лема 3.1. *Якщо виконані умови* ***I–III*** *та* (5), *то*

$$\mathsf{P}\left\{ T^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\theta}_T - \theta\| \ge C_8 \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right). \tag{15}$$

Доведення. Застосуємо співвідношення (6) при $k = 2$:

$$\mathsf{P}\left\{ T^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\theta}_T - \theta\| \ge C_8 \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} \le \mathsf{P}\left\{ \|T^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right) - h_0(\theta)\| + \|h_0(\theta)\| \ge C_8 \ln^{\frac{1}{2}} T \right\}$$
$$\le \mathsf{P}\left\{ \left\| T^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right) - h_0(\theta) \right\| \ge C_3 T^{-\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} T \right\}$$
$$+ \mathsf{P}\left\{ \|h_0(\theta)\| \ge C_8 \ln^{\frac{1}{2}} T - C_3 T^{-\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} T \right\}$$
$$= P_1 + P_2.$$

За (6) $P_1 = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right)$. З нерівностей

$$\|h_0(\theta)\| \le \lambda_{\max}(\Lambda)\|B(\theta)\| \le \lambda_0^{-1}\|B(\theta)\|,$$
$$B(\theta) = \left(b_1(\theta), \ldots, b_q(\theta)\right),$$

отримуємо

$$P_2 \le \mathsf{P}\left\{\|B(\theta)\| \ge \lambda_0 C_8' \ln^{\frac{1}{2}} T\right\} \le \sum_{i=1}^{q} \mathsf{P}\left\{|b_i(\theta)| \ge \lambda_0 q^{-\frac{1}{2}} C_8' \ln^{\frac{1}{2}} T\right\},$$

де $C_8' < C_8$. Скористаємося нерівністю (див., наприклад, [3, стор. 154])

$$\int_\delta^\infty e^{-t^2/2}\,dt \le \delta^{-1} e^{-\delta^2/2}, \qquad \delta > 0.$$

Випадкова величина

$$b_i(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(\theta) g_i(t,\theta)\,dt$$

є нормальною з нульовим середнім та дисперсією

$$\sigma_{iT}^2 = \mathsf{E}\,b_i^2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left(T^{-1} \left| \int_0^T e^{i\lambda t} g_i(t,\theta) dt \right|^2 \right) d\lambda \le 2\pi \sup_{\lambda\in\mathbf{R}} f(\lambda) T^{-1} d_{iT}^2(\theta) \le C_9,$$

$f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, — спектральна щільність процесу $\varepsilon(t)$. Тоді для $C_{10} = \lambda_0 q^{-\frac{1}{2}} C_8' C_9^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left\{\frac{|b_i(\theta)|}{\sigma_{iT}} \ge \frac{\lambda_0 q^{-\frac{1}{2}} C_8'}{\sigma_{iT}} \ln^{\frac{1}{2}} T\right\} &\le \mathsf{P}\left\{\frac{|b_i(\theta)|}{\sigma_{iT}} \ge C_{10} \ln^{\frac{1}{2}} T\right\} \\ &\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{C_{10}\ln^{\frac{1}{2}} T}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{C_{10} \ln^{1/2} T} \exp\left\{-\frac{C_{10}^2 \ln T}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Візьмемо $C_{10}^2 = \lambda_0^2 q^{-1} C'^2_8 C_9^{-1} = m$, або $C_8 > \lambda_0^{1/2} (mqC_9)^{1/2}$. Для таких начень C_8 $P_2 = o\left(T^{-\frac{m}{2}}\right)$. $\square$

З (14), (15) при $u = T^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)$ отримуємо

$$R_{k-1}^{(1)}(\theta) = T^{-\frac{k-1}{2}} \eta_{k-1}^{(1)}(\theta),$$

причому

$$\mathsf{P}\left\{\left|\eta_{k-1}^{(1)}(\theta)\right| \ge C_{11} \ln^{\frac{k}{2}} T\right\} \le O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right). \tag{16}$$

Отже,

$$\begin{aligned} T^{-\frac{1}{2}} I_{2T} = \sum_{\nu=1}^{k-2} \sum_{|\alpha|=\nu+1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta,\gamma) \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z,\theta) \left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)\right)^\alpha T^{-\frac{\nu}{2}} \\ + \eta_{k-1}^{(1)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}. \end{aligned}$$

Маємо далі

$$T^{-\frac{1}{2}} I_{3T} = \sum_{|\alpha|=1}^{k-2} \frac{1}{\alpha!} b_1^{(\alpha)}(z,\theta) u^\alpha T^{-\frac{|\alpha|}{2}} + R_{k-1}^{(2)}(\theta) + R_{k-1}^{(3)}(\theta), \tag{17}$$

де

$$R_{k-1}^{(2)}(\theta) = \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} b_1^{(\alpha)}(z,\theta) u^\alpha T^{-\frac{k-1}{2}},$$

$$R_{k-1}^{(3)}(\theta) = \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} \left(b_1^{(\alpha)}(z,\theta + T^{-1/2}u^*) - b_1^{(\alpha)}(z,\theta)\right) u^\alpha T^{-\frac{k-1}{2}}.$$

При фіксованому α, $|\alpha| = k-1$, за лемою 3.1

$$\mathsf{P}\left\{\left|b_1^{(\alpha)}(z,\theta)\right|\cdot\|u\|^{k-1}\geq C_{12}^2\ln^{\frac{k}{2}}T\right\}$$
$$\leq \mathsf{P}\left\{\left|b_1^{(\alpha)}(z,\theta)\right|\geq C_{12}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\}+\mathsf{P}\left\{\|u\|\geq C_{12}^{\frac{1}{k-1}}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Це означає, що

$$R_{k-1}^{(2)}(\theta)=\eta_{k-1}^{(2)}(\theta)T^{-\frac{k-1}{2}}, \tag{18}$$

де випадкова величина $\eta_{k-1}^{(2)}(\theta)$ має властивість (16) з константою C_{13}.

З іншого боку,

$$\left|\left(b_1^{(\alpha)}(z,\theta+T^{-1/2}u^*)-b_1^{(\alpha)}(z,\theta)\right)\right|\leq (s^*(z))^{1/2}\left(\Phi_T^{[\alpha]}\left(T^{-1/2}u^*,0\right)\right)^{1/2}, \tag{19}$$

де $s^*(z)$ введено у розділі 2. Із (3) випливає, що для фіксованого α, $|\alpha|=k-1$,

$$\left(\Phi_T^{[\alpha]}\left(T^{-1/2}u^*,0\right)\right)^{1/2}\leq C_{14}\|u\|. \tag{20}$$

Розглянемо сепарабельний випадковий процес $\varepsilon_z(t)=\varepsilon(t+z)$, $t\in\mathbf{R}$. Тоді величина $s^*(z)$ є значенням корелограми процесу ε_z в нулі, і ми можемо застосувати до неї першу з нерівностей (3.3) стор. 205 книги [4]:

$$]pr\left\{s^*(z)-\sigma^2>\sqrt{\mathbf{D}\,s^*(z)x}\right\}\leq K(x),$$
$$K(x)=\left(1+\sqrt{2}x\right)^{1/2}\exp\left\{-x/\sqrt{2}\right\},\qquad x>0.$$

За формулою Ісерліса ([5], стор. 34)

$$\mathbf{D}\,s^*(z)=\frac{2}{T}B_T^2,\qquad B_T^2=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T B^2(t-s)\,dt\,ds\underset{T\to\infty}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^{\infty}B^2(t)\,dt<\infty.$$

Візьмемо $x=\frac{T^{1/2}}{\sqrt{2}B_T}$, тоді для будь-якого $m>0$

$$\mathsf{P}\left\{s^*(z)>\sigma^2+1\right\}\leq\left(1+\frac{T^{1/2}}{B_T}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{T^{1/2}}{2B_T}\right\}=O(T^{-\frac{m}{2}}). \tag{21}$$

Покладемо

$$\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)=\sum_{|\alpha|=k-1}\frac{1}{\alpha!}\left(T^{-1/2}\int_0^T\varepsilon(t+z)\left(g^{(\alpha)}\left(t,\theta+T^{-1/2}u^*\right)-g^{(\alpha)}\left(t,\theta\right)\right)dt\right)u^\alpha.$$

Із (19), (20) випливає, що

$$|\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)|\leq C_{15}\left(s^*(z)\right)^{1/2}\|u\|^k.$$

Маємо

$$\mathsf{P}\left\{\left|\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)\right|\geq C_{16}\ln^{\frac{k}{2}}T\right\}=\mathsf{P}\left\{\left|\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)\right|\geq C_{16}\ln^{\frac{k}{2}}T, s^*(z)\leq\sigma^2+1\right\}$$
$$+\mathsf{P}\left\{\left|\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)\right|\geq C_{16}\ln^{\frac{k}{2}}T, s^*(z)>\sigma^2+1\right\}$$
$$=P_3+P_4.$$

За (21) $P_4=o\left(T^{-\frac{m}{2}}\right)$. Далі отримуємо

$$P_3\leq\mathsf{P}\left\{C_{15}(\sigma^2+1)^{1/2}\|u\|^k\geq C_{16}\ln^{\frac{k}{2}}T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right),$$

тобто

$$R_{k-1}^{(3)}(\theta)=\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)T^{-\frac{k-1}{2}}, \tag{22}$$

де випадкова величина $\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)$ має властивість (16) з константою C_{16}.

Із (17), (18), (22) випливає, що

$$T^{-1/2} I_{3T} = \sum_{|\alpha|=1}^{k-2} \frac{1}{\alpha!} b_1^{(\alpha)}(z,\theta) \left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)\right)^{\alpha} T^{-\frac{\alpha}{2}} + \eta_{k-1}^{(4)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}},$$

причому випадкова величина $\eta_{k-1}^{(4)}$ задовольняє (16) зі сталою C_{17}.

Так само можна довести, що

$$T^{-1/2} I_{4T} = \sum_{|\alpha|=1}^{k-2} \frac{1}{\alpha!} b_2^{(\alpha)}(z,\theta) \left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)\right)^{\alpha} T^{-\frac{\alpha}{2}} + \eta_{k-1}^{(5)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}},$$

де випадкова величина $\eta_{k-1}^{(5)}$ має властивість (16) з константою C_{18}.

Ми довели таке твердження.

Лема 3.2. *В умовах теореми 2.1*

$$\begin{aligned} T^{1/2} & \left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right) \\ &= T^{1/2}\left(B_T(z,) - B(z)\right) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{k-2}\left(\sum_{|\alpha|=\nu+1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta,\gamma)\Pi^{(\beta)(\gamma)}(z,\theta)\left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_T-\theta\right)\right)^{\alpha}\right. \\ &\qquad \left. - \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{1}{\alpha!} b^{(\alpha)}(z,\theta)\left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_T-\theta\right)\right)^{\alpha}\right) \\ &\quad + \eta_{k-1}^{(6)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \end{aligned} \tag{23}$$

де випадкова величина $\eta_{k-1}^{(6)}(\theta)$ задовольняє співвідношення (16) зі сталою C_{19}.

Для формулювання наступної леми введемо деякі позначення.

Нехай $r = (r_1, \ldots, r_q)$ — мультиіндекс, $|r| = s \geq 1$. Розглянемо множину мультиіндексів

$$a_{ls} = \left((i_0, \ldots, i_l)\colon \sum_{\nu=0}^{l} i_\nu = s; \sum_{\nu=0}^{l} \nu i_\nu = l\right)$$

та сукупність $(l+1) \times q$ матриць з невід'ємними цілими елементами

$$A_{ls}(r) = \left\{(d_{\nu j})\colon \sum_{j=1}^{q} d_{\nu j} = i_\nu, \nu = 0, \ldots, l, (i_0, \ldots, i_l) \in a_{ls}; \sum_{\nu=0}^{l} d_{\nu j} = r_j, j = 1, \ldots, q\right\}.$$

Для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbf{R}^q$ позначимо

$$\langle h_\nu(\theta), \lambda\rangle = h_\nu\langle\lambda\rangle, \qquad \nu = 0, \ldots, k-2,$$

$$\langle \xi_{k-1}(\theta), \lambda\rangle = \xi_{k-1}\langle\lambda\rangle, \qquad \left\langle T^{1/2}(\widehat{\theta}_T - \theta), \lambda\right\rangle = \theta_T\langle\lambda\rangle.$$

Лема 3.3. *Нехай виконані умови теореми 2.1 та s — натуральне число. Тоді*

(i)
$$\theta_T^s\langle\lambda\rangle = \sum_{l=0}^{k-2} \tilde{h}_{ls}\langle\lambda\rangle T^{-l/2} + \tilde{h}_{k-1,s}\langle\lambda\rangle T^{-k-l/2},$$

$$\tilde{h}_{ls}\langle\lambda\rangle = \sum_{a_{ls}} s! \prod_{\nu=0}^{l} \frac{1}{i_\nu!} h_\nu^{i_\nu}\langle\lambda\rangle, \qquad l = 0, \ldots, k-2,$$

де $\sum_{a_{ls}}$ є сумою за множиною мультиіндексів a_{ls};

(ii) коефіцієнти $\tilde{h}_{l,r}(\theta)$, $|r|=s$, полінома $\tilde{h}_{ls}\langle\lambda\rangle$ при степені $\lambda^r=\lambda_1^{r_1}\dots\lambda_q^{r_q}$ мають вигляд

$$\tilde{h}_{l,r}(\theta)=\sum_{A_{ls}(r)} s!\prod_{\nu=0}^{l}\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{d_{\nu j}!}h_{\nu j}^{d_{\nu j}}(\theta),\qquad l=0,\dots,k-2,$$

де $\sum_{A_{ls}(r)}$ є сумою за множиною матричних індексів $A_{ls}(r)$.

(iii) коефіцієнти $\tilde{h}_{k-1,r}(\theta)$, $|r|=s$, полінома $\tilde{h}_{k-1,s}\langle\lambda\rangle$ мають наступну властивість:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\tilde{h}_{k-1,r}(\theta)\right|\ge C_{20}(r)\ln^{(k+s-1)/2}T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Доведення. Доведення (i) очевидно. Для доведення (iii) зауважимо, що коефіцієнти $\tilde{h}_{k-1,r}(\theta)$, $|r|=s$, полінома $\tilde{h}_{k-1,s}\langle\lambda\rangle$ можуть бути сумами добутків трьох типів.

1) Добуток Π_1 містить $s-1$ множників $b_i(\theta)$ та $\xi_{k-1,j}(\theta)$. В цьому випадку

$$\mathsf{P}\left\{|\Pi_1|\ge C_{21}\ln^{(k+s-1)/2}T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right). \tag{24}$$

2) Добуток Π_2 містить степені координат $h_{\nu i}^{i_\nu}(\theta)$ векторів $h_\nu(\theta)$, $\nu=0,\dots,k-2$, причому

$$\sum_{\nu=0}^{k-2}i_\nu=s,\qquad \sum_{\nu=0}^{k-2}\nu i_\nu=k-1.$$

Оскільки $h_{\nu i}^{i_\nu}(\theta)$ є однорідними поліномами степеня $\nu+1$ від величин $b^\alpha(\theta)$, то Π_2 складається з суми добутків величин $b^{(\alpha)}(\theta)$ степеня

$$\sum_{\nu=0}^{k-2}(\nu+1)i_\nu=k+s-1.$$

Таким чином, Π_2 має властивість (24) з константою C_{22}.

3) Добуток Π_3 містить величини $b^{(\alpha)}(\theta)$, $\xi_{k-1,j}(\theta)$ у невід'ємних степенях і додатну степінь $T^{-1/2}$. У цьому випадку Π_3 має властивість (24) з константою C_{23}.

Твердження (ii) випливає з рівності

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ls}\langle\lambda\rangle&=\sum_{a_{ls}}s!\prod_{\nu=0}^{l}\frac{1}{i_\nu!}\sum_{d_{\nu_1}+\dots+d_{\nu_q}=i_\nu}i_\nu!\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{d_{\nu j}!}\left(h_\nu^j\right)^{d_{\nu j}}\lambda_j^{d_{\nu j}}\\&=\sum_{a_{ls}}\sum_{B_l}s!\prod_{\nu=0}^{l}\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{d_{\nu j}!}h_{\nu j}^{d_{\nu j}}\lambda_j^{d_{\nu j}},\end{aligned}$$

де $\sum_{B_l}$ — сума за множиною матриць

$$B_l=\left\{(d_{\nu j})\colon\ \sum_{j=1}^{q}d_{\nu j}=i_\nu,\nu=0,\dots,l\right\}.\qquad\square$$

Підставимо в формулу (23) замість величин $\left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}-\theta\right)\right)^\alpha$ їх стохастичні асимптотичні розклади, отримані в лемі 3.3. Для цього візьмемо $r=\alpha$ та $s=\nu,\nu+1$. Тоді для $|\alpha|=\nu$

$$\left(T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_T-\theta\right)\right)^\alpha=\sum_{l=0}^{k-2}\nu!\sum_{A_{l\nu}}\prod_{\mu=0}^{l}\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{d_{\mu j}!}h_{\mu j}^{d_{\mu j}}T^{-\frac{l}{2}}+\tilde{h}_{k-1,\alpha}(\theta)T^{-\frac{k-1}{2}}. \tag{25}$$

Для $s=\nu+1$ отримуємо аналогічний вираз.

Підставимо в стохастичний асимптотичний розклад (23) вирази (25). Тоді після очевидних перетворень приходимо до наступного результату.

Лема 3.4. *В умовах теореми 2.1 справедливий стохастичний асимптотичний розклад*

$$\begin{aligned}
&T^{1/2}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)\\
&\quad=T^{1/2}\left(B_T(z)-B(z)\right)\\
&\quad+\sum_{\rho=1}^{k-2}\Biggl(\sum_{\substack{l+\nu=\rho,\\0\le l\le k-2,\\1\le\nu\le k-2}}\Biggl(\sum_{|\alpha|=\nu+1}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\beta+\gamma=\alpha}C(\beta,\gamma)\Pi^{(\beta)(\gamma)}(z,\theta)(\nu+1)!\\
&\qquad\times\sum_{A_{l,\nu+1}(\alpha)}\prod_{\mu=0}^{l}\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{d_{\mu j}!}h_{\mu j}^{d_{\mu j}}(\theta)\\
&\qquad-\sum_{|\alpha|=\nu}\frac{1}{\alpha!}b^{(\alpha)}(z,\theta)\nu!\sum_{A_{l\nu}(\alpha)}\prod_{\mu=0}^{l}\prod_{j=1}^{q}h_{\mu j}^{d_{\mu j}}(\theta)\Biggr)\Biggr)T^{-\rho/2}\\
&\quad+\zeta_{k-1}(\theta)T^{-(k-1)/2},
\end{aligned}\tag{26}$$

де випадкова величина $\zeta_{k-1}(\theta)$ має властивість (16) *зі сталою C_{24}.*

Стохастичний асимптотичний розклад (26) визначає порядок спадання залишкового члена, але він занадто складний, щоб ним користуватись. Зосередимо зусилля на приданні формулі (26) прийнятного вигляду. Позначимо

$$P_0(z,\theta)=T^{1/2}\left(B_T(z)-B(z)\right)=T^{-1/2}\int_0^T\left(\varepsilon(t+z)\varepsilon(t)-B(z)\right)dt.\tag{27}$$

Позначимо також $P_\rho(\theta)$ поліноми від випадкової величини $b_{i_1\dots i_r}(z,\theta)$, що є коефіцієнтами при степенях $T^{-\rho/2}$, $\rho\ge 1$, в формулі (26). Припускаючи, що функції $g(t,\tau)$ нескінченно диференційовні за τ і знов використовуючи тензорну угоду, формально знаходимо

$$\begin{aligned}
&T^{1/2}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)\\
&\quad=P_0(z,\theta)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(a_{i_1\dots i_r}(z,\theta)T^{-(r-1)/2}-b_{i_1\dots i_r}(z,\theta)T^{-r/2}\right)u_{i_1}\dots u_{i_r}.
\end{aligned}\tag{28}$$

Підставимо в (28) формальний розклад

$$u_{i_n}=T^{1/2}\left(\widehat{\theta}_{i_nT}-\theta_{i_nT}\right)=\textstyle\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}h_{\alpha_n,i_n}(\theta)T^{-\alpha_n/2},\qquad n=1,\dots,r.$$

Тоді знаходимо

$$\begin{aligned}
&T^{1/2}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)\\
&\quad=P_0(z,\theta)\\
&\quad+\sum_{\nu=1}^{\infty}\Biggl(\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1}\frac{1}{r!}a_{i_1\dots i_r}(z,\theta)h_{\alpha_1,i_1}(\theta)\dots h_{\alpha_r,i_r}(\theta)\\
&\qquad-\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu}\frac{1}{r!}b_{i_1\dots i_r}(z,\theta)h_{\alpha_1,i_1}(\theta)\dots h_{\alpha_r,i_r}(\theta)\Biggr)T^{-\nu/2}.
\end{aligned}$$

Підсумовування в $\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu}$ ведеться за r-вимірними мультиіндексами $\alpha(r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Для $\nu \geq 1$ позначимо

$$A_\nu(z,\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} \frac{1}{r!} a_{i_1\dots i_r}(z,\theta) h_{\alpha_1,i_1}(\theta)\dots h_{\alpha_r,i_r}(\theta), \tag{29}$$

$$B_\nu(z,\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} \frac{1}{r!} b_{i_1\dots i_r}(z,\theta) h_{\alpha_1,i_1}(\theta)\dots h_{\alpha_r,i_r}(\theta), \tag{30}$$

$$P_\nu(z,\theta) = A_\nu(z,\theta) - B_\nu(z,\theta). \tag{31}$$

Теорема 3.1. *В умовах теореми 2.1*

$$T^{1/2}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right) = \textstyle\sum_{\nu=0}^{k-2} P_\nu(z,\theta) T^{-\nu/2} + \zeta_{k-1}(\theta) T^{-(k-1)/2}, \tag{32}$$

де поліноми $P_\nu(z,\theta)$, *визначено співвідношеннями* (27), (29)–(31), *а* $\zeta_{k-1}(\theta)$ *міститься в залишковому члені формули* (26).

Очевидно, теорема 3.1 є зручним переформулюванням леми 3.4.

Наслідок 3.1. *В умовах теореми 2.1 при* $k = 4$

$$T^{1/2}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right) = \sum_{\nu=0}^{2} P_\nu(z,\theta) T^{-\nu/2} + \zeta_3(\theta) T^{-3/2}, \tag{33}$$

$$\mathsf{P}\left\{|\zeta_3(\theta)| \geq C_{24} \ln^2 T\right\} = O\left(T^{-m/2}\right). \tag{34}$$

Формули (29)–(31) дозволяють знайти в явному вигляді поліноми стохастичного асимптотичного розкладу (33). В наступних формулах не будемо вказувати залежність від θ. Маємо при $\nu = 1$

$$A_1(z) = \frac{1}{2!} a_{i_1 i_2}(z) h_{0i_1} h_{0i_2} = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2},$$

$$B_1(z) = b_{i_1}(z) h_{0i_1} = \Lambda^{i_1 j_1} b_{i_1}(z) b_{j_1},$$

$$P_1(z) = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2} - \Lambda^{i_1 j_1} b_{i_1}(z) b_{j_1}. \tag{35}$$

Нехай тепер $\nu = 2$. Знайдемо $A_2(z)$. При $r = 2$ доданок суми (29), з урахуванням (8), має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} a_{i_1 i_2}(z)\left(h_{1i_1} h_{0i_2} + h_{0i_1} h_{1i_2}\right) &= a_{i_1 i_2}(z) h_{1i_1} h_{0i_2} \\ &= \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{j_3 j_4} a_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2 j_3} b_{j_4} \\ &\quad - \frac{1}{4} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{j_3 j_4} \Lambda^{j_5 j_6} a_{i_1 i_2}(z) a_{j_2 j_3 j_5} b_{j_1} b_{j_4} b_{j_6}. \end{aligned} \tag{36}$$

При $r = 3$ та $\alpha(3) = (0,0,0)$ доданок суми (29), з огляду на (2), дорівнює

$$\frac{1}{3!} a_{i_1 i_2 i_3}(z) h_{0i_1} h_{0i_2} h_{0i_3} = \frac{1}{2} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3}(z) b_{j_1} b_{j_2} b_{j_3}, \tag{37}$$

де

$$\tilde{a}_{i_1 i_2 i_3}(z) = \Pi_{(i_1 i_2)(i_3)}(z) + \Pi_{(i_3)(i_1 i_2)}(z).$$

Підрахуємо $B_2(z)$. При $r = 1$ доданок суми (30) запишемо у вигляді

$$b_{i_i}(z) h_{1i_1} = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{j_2 j_3} b_{i_1}(z) b_{j_1 j_2} b_{j_3} - \frac{1}{4} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{j_2 j_3} \Lambda^{j_4 j_5} a_{j_1 j_2 j_4} b_{i_1}(z) b_{j_3} b_{j_5}. \tag{38}$$

Нехай $r = 2$, тоді $\alpha(2) = (0,0)$, і відповідний доданок має вигляд

$$\frac{1}{2} b_{i_i i_2}(z) h_{0i_1} h_{0i_2} = \frac{1}{2} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} b_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2}. \tag{39}$$

З урахуванням формул (36)–(39), знаходимо

$$\begin{aligned} P_2(z) = {} & \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{j_3j_4}a_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2j_3}b_{j_4} \\ & - \frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{j_3j_4}\Lambda^{j_5j_6}a_{i_1i_2}(z)a_{j_2j_3j_5}b_{j_1}b_{j_4}b_{j_6} \\ & + \frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\tilde{a}_{i_1i_2i_3}(z)b_{j_1}b_{j_2}b_{j_3} - \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}b_{i_1}(z)b_{j_1j_2}b_{j_3} \\ & + \frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}\Lambda^{j_4j_5}a_{j_1j_2j_4}b_{i_1}(z)b_{j_3}b_{j_5} - \frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}b_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2}. \end{aligned} \tag{40}$$

4. Приклад

Припустимо, що $g\,(t,\tau) = g\,(y(t),\tau)$, де $y(\cdot)\colon [0,\infty) \to Y$ — борелева функція, $g\,(y,\tau)$ — функція неперервна за сукупністю змінних $(y,\tau) \in Y \times \Theta_\gamma$, $Y \subset \mathbf{R}^m$ — компактна область планування регресійного експерименту. Нехай $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин Y.

Розглянемо сім'ю мір

$$\mu_T(A) = T^{-1}\lambda\left(\{t \in [0,T]\colon y(t) \in A\}\right), \qquad A \in \mathfrak{B},$$

λ — міра Лебега на $[0,+\infty)$. Припустимо, що виконується умова

IV. Міра μ_T слабко збігається при $T \to \infty$ до деякої міри μ: $\mu_T \Longrightarrow \mu$.

Наведемо простий приклад виконання цієї умови при $m = 1$. Нехай $\{y_i, i \geq 1\} \subset Y$ деяка послідовність та $y(t) = y_i$, $t \in [i-1,i)$, $i \geq 1$. Введемо міру

$$\mu_T = T^{-1}\sum_{i=1}^{[T]}\delta_{y_i} + T^{-1}\{T\}\,\delta_{y_{[T]+1}},$$

де $[T]$ та $\{T\}$ — ціла та дробова частини T відповідно. Тоді, якщо $n^{-1}\sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \Longrightarrow \mu$ при $n \to \infty$, то $\mu_T \Longrightarrow \mu$, при $T \to \infty$. Припустимо, що у функції $g\,(y,\tau)$ для кожного $y \in Y$ існують всі частинні похідні за змінними $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_q) \in \Theta_\gamma$ до порядку $k+1$, $k \geq 2$, включно, причому функції $g^{(\alpha)}\,(y,\tau)$, $|\alpha| = 1,\ldots,k+1$, неперервні за сукупністю змінних $(y,\tau) \in Y \times \Theta^c$. Тоді виконується умова **II**.

За формулою заміни міри в інтегралі Лебега

$$T^{-1}d_{iT}^2(\theta) = \int_Y g_i^2(y,\theta)\,\mu_T(dy) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int_Y g_i^2(y,\theta)\,\mu(dy),$$

і умова $\underline{\lim}_{T\to\infty} T^{-1}d_{iT}^2(\theta) > 0$, $i = 1,\ldots,q$, перетворюється на умову

$$\mu\,\{y \in Y\colon g_i(y,\theta) \neq 0\} > 0, \qquad i = 1,\ldots,q.$$

З іншого боку,

$$I_T(\theta) = \left(\int_Y g_i(y,\theta)g_j(y,\theta)\,\mu_T(dy)\right)_{i,j=1}^q \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int_Y g_i(y,\theta)g_j(y,\theta)\,\mu(dy)\right)_{i,j=1}^q = I(\theta),$$

і умова **III** виконується, якщо матриця $I(\theta)$ додатно визначена.

Зауважимо також, що достатні умови консистентності (5) оцінки найменших квадратів $\widehat{\theta}_T$ (теорема 3.2.1, стор. 126, книги [3]) не вступають в протиріччя з умовою **IV**.

5. Висновки

В роботі отримано стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції стаціонарного гаусівського шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом. Такий розклад, тобто представлення оцінки у вигляді суми поліномів від стандартних інтегралів від випадкового шуму, зважених похідними функції регресії, і стохастично малого залишкового члена, описує тонку структуру оцінки $B_T\big(z,\widehat{\theta}_T\big)$ і надає можливість отримати асимптотичний розклад її моментів.

У застосуваннях, у випадку скалярних оцінок, найважливішими є розклади їх зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії. Саме отримання таких результатів щодо корелограмної оцінки планується надалі.

Література

1. A. V. Ivanov, *Asymtotic Theory of Nonlinear Regression*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht–Boston–London, 1997.
2. О. В. Іванов, І. К. Мацак, *Граничні теореми для екстрмальних залишків у лінійній та нелінійній моделях регресії*, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 81–91.
3. Н. Н. Леоненко, А. В. Иванов, *Статистический анализ случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1986.
4. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВіМС", Киев, 1998.
5. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1965.

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: kamok@ua.fm

Надійшла 31/07/2013