Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 107–120

Teor. Ǐmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 107–120

ПРО ЛІЧИЛЬНИЙ ПРОЦЕС У СХЕМІ МАКСИМУМУ

УДК 519.21

І. К. МАЦАК

Анотація. У роботі досліджується асимптотика лічильного процесу у схемі максимуму незалежних випадкових величин.

Abstract. In the paper exact asymptotic of the counting process in the max-scheme is obtained.

Аннотация. В работе исследуется асимптотика считающего процесса в схеме максимума независимых случайных величин.

1. Вступ

Розглянемо послідовність (ξ_n), $n \geq 1$, — незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу $F(t) = \mathsf{P}(\xi_n < t)$. І нехай

$$z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i, \qquad N(t) = \min(n \geq 1 \colon z_n \geq t). \tag{1}$$

Процес $N(t)$ будемо називати лічильним процесом для послідовності (z_n).

Зрозуміло, що процес $N(t)$ можна задати і наступним еквівалентним чином

$$N(t) = \min(n \geq 1 \colon \xi_n \geq t),$$

тобто $N(t)$ — це також момент першого попадання послідовності (ξ_n) в область $[t, \infty)$.

Нас буде цікавити асимптотична поведінка процесу $N(t)$ майже напевне (м.н.). І для наших цілей означення (1) більш зручне, бо поведінка процесу $N(t)$ тісно пов'язана з поведінкою послідовності (z_n).

Наступні міркування показують, що перенесення результатів, відомих для (z_n) на процес $N(t)$ далеко не завжди буде тривіальним.

Відомо, що в кожній точці t $N(t)$ геометрично розподілена в.в.

$$\mathsf{P}(N(t) = k) = q(1-q)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad q = 1 - F(t).$$

Звідси вже можна одержати наступну слабку збіжність :
при $t \to \infty$

$$(1 - F(t))N(t) \xrightarrow{D} \tau^e,$$

де в.в. τ^e має стандартний експоненційний розподіл, $\mathsf{P}(\tau^e < x) = 1 - \exp(-x)$.

Але останнє співвідношення означає, що не існує невипадкової функції $a(t)$, для якої може виконуватись підсилений закон великих чисел

$$\frac{N(t)}{a(t)} \longrightarrow 1 \quad \text{м.н.}$$

(див. [1, с. 42–43]). З іншої сторони відомо ([2, с. 200]), що при $n \to \infty$

$$\frac{z_n^e}{\ln n} \longrightarrow 1 \quad \text{м.н.},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G70 .

Ключові слова і фрази. Максимум незалежних випадкових величин, лічильний процес, асимптотика майже напевне.

у роботі всюди будемо позначати через $N^e(t)$ та (z_n^e) відповідно лічильний процес та послідовність максимумів, побудованих по (τ_k^e), незалежних копіях τ^e.

Дослідження асимптотики (z_n) проводились багатьма авторами ([3]–[8]). Звичайно лічильний процес $N(t)$ також вивчався (див. [9]–[10], де можна знайти посилання на більш ранні роботи).

Відзначимо також книжку [1], яка містить досить повний огляд загальних результатів про так звані узагальнені процеси відновлення (в нашій термінології - лічильні процеси).

Наведемо один із основних результатів про асимптотику лічильного процесу у схемі максимуму [9].

Покладемо

$$R(t) = -\ln(1 - F(t)) \quad \text{або} \quad F(t) = 1 - \exp(-R(t)),$$

Теорема A. *Нехай функція розподілу $F(t)$ неперервна, строго монотонно зростаюча і $F(t) < 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді м.н.*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - R(t)}{\ln\ln R(t)} = 1 \tag{2}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - R(t)}{\ln R(t)} = -1. \tag{3}$$

Як виявилось у дискретному випадку рівності типу (2)–(3) вірні лише при додаткових умовах на швидкість зростання $R(t)$, але ці рівності виконуються для таких важливих розподілів, як геометричний та пуассонівський [10].

Зрозуміло, що коли замість $\ln N(t)$ розглянути процес $N(t)$, то задача значно ускладнюється і рівності типу законів повторного логарифму (2)–(3) отримати вже не вдається.

У даній роботі будуть одержані деякі результати про верхню та нижню границю для нормованого відповідним чином процесу $N(t)$.

2. Асимптотика лічильного процесу для неперервних розподілів

Теорема 1. *Нехай функція розподілу $F(t)$ неперервна, строго монотонно зростаюча і $F(t) < 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N(t)}{\exp(R(t))\ln R(t)} = 1 \quad \textit{м.н.} \tag{4}$$

При доведенні теореми 1 будуть використані кілька допоміжних лем.

Лема 1. *Нехай в.в. ν має геометричний розподіл з параметром q:*

$$\mathsf{P}(\nu = k) = p_k = q(1-q)^{k-1}, \qquad k \geq 1,\ 0 < q < 1.$$

Тоді при $\quad x > 0$

$$\mathsf{P}(q\nu > x) \leq \frac{1}{1-q}\exp(-x).$$

Доведення леми 1 просто випливає із елементарної нерівності

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^y \leq \exp(-1) \quad \text{при } y \geq 1. \tag{5}$$

Дійсно

$$\mathsf{P}(q\nu > x) = (1-q)^{[x/q]} \leq \frac{1}{1-q}(1-q)^{x/q} \leq \frac{1}{1-q}\exp(-x).$$

Лема 2. *Нехай* (ξ_i) — *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) з ф.р.* $F(x)$. *Нехай* (u_n) *така неспадна послідовність дійсних чисел, що послідовність* $n\,[1 - F(u_n)]$ *також є неспадною. Крім того, припустимо, що функція* $F(x)$ *неперервна. Тоді при* $u_n < \omega(F)$, *де* $\omega(F) = \sup(x\colon F(x) < 1)$, *ймовірність*

$$\mathsf{P}\,(z_n \le u_n \ \textit{н.ч.})$$

дорівнює нулю або одиниці у відповідності з тим, збігається чи розбігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [1 - F(u_n)] \exp\{-n\,[1 - F(u_n)]\} \tag{6}$$

де н.ч. — нескінчено часто.

Це твердження відоме (див. [2, теорема 4.3.1, с. 190–198], [6]).

Лема 3. *Вірна рівність*

$$\mathsf{P}(z_n^e \le \ln n - \ln\ln\ln n \ \textit{н.ч.}) = 1. \tag{7}$$

Доведення леми 3. Розглянемо ряд (6) при $u_n = \ln n - \ln\ln\ln n$, $F(t) = 1 - \exp(-t)$. Маємо

$$\sum_{n=3}^{\infty} \exp\{-\ln n + \ln\ln\ln n\} \exp\{-n \exp\{-\ln n + \ln\ln\ln n\}\} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)}{n \ln n} = \infty.$$

Оскільки ряд (6) розбігається, то звідси та леми 2 одержуємо рівність (7). □

Доведення теореми 1. Добре відомо (див., наприклад, [5]), що в умовах теореми 1 в.в. $\tau_i^e = R(\xi_i)$, $i \ge 1$, мають стандартний експоненційний розподіл. Якщо (z_n^e) та $N^e(t)$ відповідні послідовність максимумів та лічильний процес, то

$$\begin{aligned} N(t) &= \min(n \ge 1\colon z_n \ge t) = \min(n \ge 1\colon R(z_n) \ge R(t)) \\ &= \min(n \ge 1\colon z_n^e \ge R(t)) = N^e(R(t)). \end{aligned} \tag{8}$$

Звідси зрозуміло, що досить розглянути випадок стандартного експоненційного розподілу $F(t) = 1 - \exp(-t)$, $R(t) = t$ і установити рівність

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N^e(t)}{\exp(t)\ln t} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Спочатку покажемо, що $\forall \varepsilon > 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N^e(t)}{\exp(t)\ln t} \le 1 + \varepsilon \quad \text{м.н.} \tag{10}$$

Оскільки $N^e(t)$ має геометричний розподіл з параметром $q = 1 - F(t) = \exp(-t)$, то за лемою 1 маємо оцінку

$$\mathsf{P}(\exp(-t)N^e(t) > x) \le \frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-t)}. \tag{11}$$

Далі виберемо довільне мале $\delta > 0$ і покладемо $t_k = k\delta$, $k = 1, 2, \ldots$. Із нерівності (11) при $x = (1 + \varepsilon/2)\ln t_k$, $t = t_k$ отримаємо

$$\mathsf{P}(N^e(t_k) > (1 + \varepsilon/2)(\ln t_k)\exp(t_k)) \le \frac{(k\delta)^{-(1+\varepsilon/2)}}{1 - \exp(-k\delta)}.$$

Звідси ясно, що збігається ряд

$$\sum_{k\ge1} \mathsf{P}\big(N^e(t_k) > (1 + \varepsilon/2)(\ln t_k)\exp(t_k)\big).$$

Тому за лемою Бореля–Кантеллі

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N^e(t_k)}{\exp(t_k)\ln t_k} \le 1+\varepsilon/2 \quad \text{м.н.} \tag{12}$$

Якщо $t_k < t \le t_{k+1}$, то

$$\frac{N^e(t)}{\exp(t)\ln t} \le \frac{N^e(t_{k+1})}{\exp(t_k)\ln t_k} = \frac{N^e(t_{k+1})}{\exp(t_{k+1})\ln t_{k+1}} \frac{\exp(\delta)\ln \delta k}{\ln \delta(k+1)}.$$

Оскільки при $k \to \infty$

$$\frac{\ln \delta k}{\ln \delta(k+1)} \to 1,$$

то, враховуючи (12), маємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N^e(t)}{\exp(t)\ln t} \le (1+\varepsilon/2)\exp(\delta) \quad \text{м.н.}$$

Але δ можна вибрати як завгодно мале, це і означає, що співвідношення (10) вірне.

Таким чином залишається довести, що $\forall \varepsilon > 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N^e(t)}{\exp(t)\ln t} \ge (1-\varepsilon) \quad \text{м.н.}, \tag{13}$$

Тут скористаємось лемою 3. Із рівності (7) випливає існування послідовності цілих чисел $r_n = r_n(\omega)$ такої, що

$$\forall n \ge 1 \qquad z^e_{r_n} \le \ln r_n - \ln\ln\ln r_n \quad \text{м.н.} \tag{14}$$

Далі відзначаємо, що функція $[(1-\varepsilon)\exp(t)\ln t]+1$ коли t змінюється від 1 до ∞ пробігає усі цілі додатні числа. Тому для фіксованого ε існує послідовність $t_n = t_n(\omega)$ така, що

$$r_n = [(1-\varepsilon)\exp(t_n)\ln t_n] + 1.$$

Елементарні обчислення дають

$$\ln r_n = t_n + \ln\ln t_n + \ln(1-\varepsilon) + o(1)$$

і

$$\ln\ln\ln r_n = \ln\ln t_n + o(1).$$

Останні рівності разом із (14) дозволяють записати

$$\forall n \ge 1 \qquad z^e_{r_n} \le t_n + \ln(1-\varepsilon) + o(1) \quad \text{м.н.}$$

Але $\ln(1-\varepsilon) < 0$, тому маємо

$$\exists n_0,\ \forall n > n_0 \qquad z^e_{r_n} \le t_n \quad \text{м.н.}$$

Звідси та рівності

$$(N^e(t_n) \ge r_n) = (z^e_{r_n} \le t_n) \quad \text{м.н.} \tag{15}$$

одержуємо

$$\exists n_0,\ \forall n > n_0 \qquad N^e(t_n) \ge (1-\varepsilon)\exp(t_n)\ln t_n \quad \text{м.н.}$$

Це і означає, що співвідношення (13) вірно.

Разом нерівності (10), (13) дають (9). □

Теорема 2. *Нехай функція розподілу $F(t)$ неперервна, строго монотонно зростаюча і для всіх $t \in \mathbb{R}$ $F(t) < 1$, $\psi(t)$ — неперервна монотонно зростаюча функція при $t > t_0$.*

(i) *Якщо ряд*

$$\sum_{n>1} \frac{1}{n\psi(n)} \tag{16}$$

збігається, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)\psi(\exp(R(t)))}{\exp(R(t))} = \infty \quad \text{м.н.} \tag{17}$$

(ii) *Якщо* $\psi(t)$ *повільно змінюється на нескінченості, ряд* (16) *розбігається і при* $t \to \infty$

$$\frac{\psi(t/\psi(t))}{\psi(t)} \to 1, \tag{18}$$

то

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)\psi(\exp(R(t)))}{\exp(R(t))} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{19}$$

Зауваження 1. Типова функція, яка задовольняє умови пункта (ii) теореми 2, при досить великих t задається рівностями :

$$\psi(t) = \prod_{k=1}^{m} L_k(t),$$
$$L_1(t) = \ln t, \qquad L_2(t) = \ln L_1(t),$$
$$L_m(t) = \ln L_{m-1}(t).$$

Звідси маємо наступне твердження.

Наслідок 1. *В умовах теореми 2 для будь-якого* $m \geq 1$, $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)R(t)\prod_{k=1}^{m} L_k(R(t))}{\exp(R(t))} = 0 \quad \text{м.н.},$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)R(t)\prod_{k=1}^{m-1} L_k(R(t))L_m^{1+\varepsilon}(R(t))}{\exp(R(t))} = \infty \quad \text{м.н.}.$$

Доведення теореми 2. (i) Із міркувань теореми 1 зрозуміло, що досить розглянути випадок стандартного експоненційного розподілу. При цьому співвідношення (17) запишеться наступним чином

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N^e(t)\psi(\exp(t))}{\exp(t)} = \infty \quad \text{м.н.} \tag{20}$$

Виберемо довільне $C > 0$, мале $\delta > 0$ та покладемо

$$u_k = \frac{C\exp(t_k)}{\psi(\exp(t_k))}, \qquad t_k = k\delta, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\psi(t) = o(t)$ та $u_k \to \infty$ при $k \to \infty$ (в противному випадку оцінка (20) очевидна).

В.в. $N^e(t)$ має геометричний розподіл з параметром $q = \exp(-t)$. Тому

$$\mathsf{P}(N(t) \leq u_k) = 1 - (1-q)^{[u_k]}. \tag{21}$$

Далі скористаємось відомими елементарними оцінками:

$$1 - \exp(-x) = x + O\left(x^2\right) \quad \text{при малих } x > 0,$$

та

$$0 \leq \exp(-x) - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2\exp(-x)}{2(n-1)}, \qquad n > 1,\ 0 < x \leq n,$$

(див. [12, гл. 2, §4, с. 50]).

Із яких та (21) отримаємо

$$\mathsf{P}(N(t_k) \le u_k) = x + O\left(x^2\right) \sim \frac{C}{\psi\left(s^k\right)}, \tag{22}$$

де $s = \exp(\delta)$, $x = C/\psi(\exp(t_k))$, позначення $g_1(t) \sim g_2(t)$ означає, що при $t \to \infty$ $g_1(t)/g_2(t) \to 1$.

В аналізі добре відомо([11, теорема Коші, с. 288–289]), що для монотонної спадної функції $H(t)$ і довільного $s > 1$ ряди

$$\sum_{n\ge1} H(n) \quad \text{та} \quad \sum_{k\ge1} s^k H\left(s^k\right)$$

збігаються та розбігаються одночасно. Тому вибираючи $H(t) = 1/(t\psi(t))$ із збіжності ряду (16) маємо

$$\sum_{k\ge1} \frac{1}{\psi(s^k)} < \infty.$$

Остання оцінка разом із співвідношенням (22) та лемою Бореля–Кантеллі дають

$$\mathsf{P}(\exists k_0, \forall k \ge k_0 \colon N(t_k) \ge u_k) = 1$$

або

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N(t_k)\psi(\exp(t_k))}{\exp(t_k)} \ge C \quad \text{м.н.}$$

C довільне додатнє число, а отже

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(t_k)\psi(\exp(t_k))}{\exp(t_k)} = \infty \quad \text{м.н.}$$

Нехай довільне $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тоді при $k \to \infty$

$$\frac{N(t)\psi(\exp(t))}{\exp(t)} \ge \frac{N(t_k)\psi(\exp(t_k))}{\exp(t_k)} \exp(-\delta) \to \infty \quad \text{м.н.},$$

тобто (20) установлено.

(ii) Спочатку нагадаємо один результат для правильно змінних у сенсі Карамата функцій.

Нехай $g(t) = tL(t)$, $L(t)$ — повільно змінюється при $t \to \infty$ і $g(t)$ не спадає на $[A, \infty)$. Відомо ([13, розд. 1, леми 1.8, 1.10, с. 27–32]), що

$$g^{-1}(y) = \inf(t \colon g(t) \ge y, t \in [A, \infty)) = yL^*(y), \tag{23}$$

де $L^*(t)$ так звана спряжена функція до $L(t)$, $L^*(t)$ повільно змінюється при $t \to \infty$ і

$$L(L^*(t)) \sim t, \qquad L^*(L(t)) \sim t.$$

Окрім того, якщо функція $L(t)$ задовольняє умову (18), то

$$L^*(t) \sim \frac{1}{L(t)}. \tag{24}$$

Далі виберемо в.в. $\widetilde{\xi}$ з функцією розподілу $\widetilde{F}(t) = 1 - 1/t$, $t \ge 1$ та $\widetilde{R}(t) = \ln t$. Перевіримо для неї рівність (19).

Нехай $(\widetilde{z}_n)$ та $(\widetilde{N}(t))$ відповідно послідовність максимумів та лічильний процес, побудовані за $(\widetilde{\xi}_k)$, $\widetilde{\xi}_k$ — незалежні копії в.в. $\widetilde{\xi}$. Якщо ряд (16) розбігається, то (див. [2, приклад 4.3.4, с. 200–201])

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\widetilde{z}_n}{n\psi(n)} = \infty \quad \text{м.н.}$$

Нехай $C > 0$ довільне число. Тоді

$$\mathsf{P}(\widetilde{z}_n \ge Cn\psi(n) \text{ н.ч.}) = 1.$$

Звідси та рівності типу (15) одержуємо

$$\mathsf{P}(\widetilde{N}\big(Cn\psi(n)\big) \le n \text{ н.ч.}) = 1 \tag{25}$$

Позначимо $\varphi(t) = t\psi(t)$, $t_n = Cn\psi(n)$ і фіксуємо $\varepsilon > 0$. Згідно (25) та (23) можна записати рівності

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{N}(t_n) \le \varphi^{-1}\left(\frac{t_n}{C}\right) \text{ н.ч.}\right) = \mathsf{P}\left(\widetilde{N}(t_n) \le (1+\varepsilon)\frac{t_n}{C}\psi^*\left(\frac{t_n}{C}\right) \text{ н.ч.}\right) = 1.$$

Оскільки $\psi^*(t)$ повільно змінюється, то звідси випливає оцінка

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\widetilde{N}}{(t_n)\psi^*((t_n))} \le \frac{1+2\varepsilon}{C} \quad \text{м.н.}$$

Але C довільне число, що разом з (24) дає

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\widetilde{N}(t)}{t\psi^*(t)} = \liminf_{t\to\infty} \frac{\widetilde{N}(t)\psi(t)}{t} = 0 \quad \text{м.н.}, \tag{26}$$

тобто рівність (19) для розподілу $\widetilde{F}$ установлена.

Далі скористаємось рівністю (8) при $\widetilde{R}(t) = \ln t$ та (26)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N^e(t)\psi(\exp(t))}{\exp(t)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

В загальному випадку, підставляючи сюди $t = R(z)$ і ще раз застосовуючи (8), приходимо до рівності (19). □

Зауваження 2. Із наведеного вище доведення зрозуміло, що при виконанні умов пункта (ii) теореми 2 окрім умови (18), будемо мати

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{\exp(R(t))\psi^*(\exp(R(t)))} = 0 \quad \text{м.н.},$$

де $\psi^*(t)$ спряжена до $\psi(t)$.

3. Асимптотика лічильного процесу. Дискретний випадок

У цьому розділі через ξ позначаємо дискретну в.в. з розподілом (k, p_k), $k \ge 1$, тобто

$$\mathsf{P}(\xi = k) = p_k > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

$$R(k) = -\ln\Bigg(\sum_{i\ge k} p_i\Bigg), \qquad r(k) = R(k) - R(k-1).$$

І нехай ξ_i, $i \ge 1$, -незалежні копії ξ, z_n та $N(t)$ визначені рівністю (1). Безпосередньо із означення випливає, що м.н.

$$N(t) = N(k+1) \quad \text{при } k < t \le k+1.$$

Тому достатньо розглядати процес $N(t)$ лише для значень $t = k$, $k \ge 1$.

Наведені нижче результати показують, що в дискретному випадку аналоги теорем 1, 2 мають місце лише за певних умов на швидкість зростання функції $R(t)$.

Теорема 3. *Якщо ξ дискретна в.в. з розподілом (k, p_k), то*

(i)

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N(k)}{\exp(R(k))\ln R(k)} \le 1 \quad \textit{м.н.} \tag{27}$$

(ii) *якщо при* $k \to \infty$

$$r(k) \to 0, \tag{28}$$

то

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N(k)}{\exp(R(k))\ln R(k)} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{29}$$

(iii) *якщо при* $k \to \infty$

$$\exp(-r(k))\ln R(k) \to 0, \tag{30}$$

і для $0 < b < 1$

$$\sum_{k>1} R(k)^{-b} < \infty, \tag{31}$$

то

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N(k)}{\exp(R(k))\ln R(k)} \le b \quad \text{м.н.} \tag{32}$$

Доведення теореми 3. (i) Далі будуть використані деякі зображення дискретних в.в. із роботи [10].

Побудуємо в.в. ξ^c з неперервною функцією розподілу $F^c(t)$ наступним чином. Покладемо

$$F^c(1) = 0, \qquad F^c(k) = \sum_{i<k} p_i \quad \text{при } k > 1,$$

$$F^c(t) = F^c(k) + (t-k)p_k \quad \text{при } k \le t < k+1,$$

і

$$R^c(t) = -\ln\left(1 - F^c(t)\right).$$

Очевидно, що

$$R^c(k) = -\ln\left(\sum_{i\ge k} p_i\right) = R(k). \tag{33}$$

Через $[t]$ будемо позначати цілу частину числа t.

Розглянемо в.в. $\xi^d = [\xi^c]$. Ясно, що

$$\mathsf{P}(\xi^d = k) = \mathsf{P}\left(\xi^c \in [k, k+1)\right) = F^c(k+1) - F^c(k) = p_k.$$

Таким чином, в.в. ξ^d та ξ однаково розподілені. Тому надалі, без обмеження загальності, будемо вважати, що $\xi = \xi^d = [\xi^c]$.

Нехай ξ_i^c незалежні копії ξ^c,

$$z_n^c = \max_{1\le i\le n} \xi_i^c, \qquad N^c(t) = \min\left(n \ge 1\colon z_n^c \ge t\right).$$

За побудовою функція розподілу $F^c(t)$ неперервна, строго монотонно зростаюча і для всіх $t \in \mathbb{R}$ $F^c(t) < 1$. Тому, згідно з теоремою 1 маємо:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N^c(t)}{\exp(R^c(t))\ln R^c(t)} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{34}$$

Звідси зрозуміло, що

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N^c(k)}{\exp\left(R^c(k)\right)\ln R^c(k)} \le 1 \quad \text{м.н.}, \tag{35}$$

Якщо врахувати просту рівність

$$\{x \ge k\} = \{[x] \ge k\},$$

то одержимо

$$N(k) = N^c(k) \quad \text{м.н.} \tag{36}$$

Із співвідношень (33), (35), (36) вже безпосередньо випливає нерівність (27).

(ii) Нехай $\varepsilon > 0$ довільне число. Рівність (34) означає, що існує послідовність $(t_n = t_n(\omega))$ така, що

$$\limsup_{t_n\to\infty} \frac{N^c(t_n)}{\exp(R^c(t_n))\ln R^c(t_n)} \geq 1-\varepsilon \quad \text{м.н.} \tag{37}$$

Покладемо $k_n = [t_n]$. Тоді очевидно

$$N^c((k_n+1)) \geq N^c(t_n), \qquad R^c(k_n) \leq R^c(t_n).$$

Звідси та (37) одержуємо

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N^c(k_n+1)}{\exp(R^c(k_n))\ln R^c(k_n)} \geq 1-\varepsilon \quad \text{м.н.}$$

А якщо сюди ще додати рівності (33) та (36), то будемо мати

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(k_n+1)}{\exp(R(k_n))\ln R(k_n)} \geq 1-\varepsilon \quad \text{м.н.}$$

За умовою (28) при $k\to\infty$

$$\frac{\exp(R((k+1))}{\exp(R(k))} \to 1.$$

Тому

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(k_n)}{\exp(R(k_n))\ln R(k_n)} \geq 1-\varepsilon \quad \text{м.н.}$$

Але ε довільне додатнє число, тому остання оцінка та (27) і дають (29).

(iii) Припустимо, що нерівність (32) не вірна. Тоді існує $b^{'} > b$ таке, що

$$\mathsf{P}(N(k) \geq h(k) \text{ н.ч.}) = 1,$$

де $h(k) = [b' \exp(R(k))\ln R(k)]$.

Звідси та рівності типу (15) одержуємо

$$\mathsf{P}(z_{h(k)} \leq k \text{ н.ч.}) = 1. \tag{38}$$

Позначимо $X_k = \max_{h(k-1)<i\leq h(k)} \xi_i$. Наступна рівність — це безпосередній наслідок (38)

$$\mathsf{P}(X_k \leq k \text{ н.ч.}) = 1.$$

Оскільки X_k незалежні в.в., то за лемою Бореля–Кантеллі ряд

$$\sum_{k>1} \mathsf{P}(X_k \leq k) \tag{39}$$

розбігається.

Далі оцінимо зверху доданки ряду (39). Враховуючи оцінку (5) та умову (30) маємо

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_k \leq k) &= (1-\exp(-R(k)))^{h(k)-h(k-1)} \\ &\leq \exp(-b^{'}(\ln R(k) - \exp(-r(k)\ln R(k-1)) + o(1)) \\ &\leq \frac{C}{R(k)^{b^{'}}}. \end{aligned}$$

В силу умови (31) із останньої оцінки випливає збіжність ряду (39), що приводить до суперечності. $\square$

Теорема 4. *Нехай ξ дискретна в.в. з розподілом (k, p_k), $\psi(t)$ — неперервна монотонно зростаюча функція при $t > t_0$ і*

$$r(k) = R(k) - R(k-1) \leq C < \infty. \tag{40}$$

(i) *Якщо ряд* (16) *збігається, то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(k)\psi(\exp(R(k)))}{\exp(R(k))} = \infty \quad \textit{м.н.}$$

(ii) *Якщо* $\psi(t)$ *повільно змінюється на нескінченості, ряд* (16) *розбігається і виконується умова* (18), *то*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N(k)\psi(\exp(R(k)))}{\exp(R(k))} = 0 \quad \textit{м.н.}$$

Доведення теореми 4 опускається. Воно просто випливає із теореми 2 та наведених вище міркувань із доведення теореми 3.

Наступний результат певною мірою прояснює труднощі, які виникають при аналізі схеми максимуму у дискретному випадку.

Позначимо $a_n = \max\bigl(k\colon \sum_{i\ge k} p_i \ge 1/n\bigr)$.

Теорема 5. *Нехай* ξ *дискретна в.в. з розподілом* (k, p_k), *функція* $r(k)$ *зростає і задовольняє умову*

$$\sum_{k\ge 1} r(k+1)\exp(-r(k)) < \infty. \tag{41}$$

Тоді

$$\mathsf{P}(\exists n_0, \forall n \ge n_0\colon A_n) = 1, \tag{42}$$

де

$$A_n = \{z_n = a_n\} \cup \{z_n = a_n - 1\} \cup \{z_n = a_n + 1\}.$$

Зауваження 3. Типові приклади виконання умови (41) такі:

$$\begin{gathered} p_k \sim \exp(-Ck\ln k + O(k)), \qquad C > 1, \\ p_k \sim \exp(-Ck^\alpha), \qquad \alpha > 1,\ C > 0, \\ p_k \sim \exp(-\exp(Ck^\alpha)), \qquad \alpha > 0,\ C > 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Пуассонівський та геометричний розподіли не задовольняють ці умови (для пуассонівського розподілу умова (43) вірна лише при $C = 1$, що не достатньо для виконання (41)).

Доведення теореми 5. Покладемо

$$\begin{gathered} R^c(t) = R(k) + (t-k)r(k+1) \quad \text{при } t \in [k, k+1),\ k \ge 1, \\ r^c(t) = r(k+1) \quad \text{при } t \in [k, k+1),\ k \ge 1. \end{gathered}$$

Ясно, що

$$R^c(t) = \int_1^t r^c(s)\,ds. \tag{44}$$

Задамо функцію розподілу

$$\begin{gathered} F^c(t) = 1 - \exp(-R^c(t)), \qquad t \ge 1, \\ F^c(1) = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

І нехай ξ^c в.в. з функцією розподілу $F^c(t)$, $\xi^d = [\xi^c]$. Тоді для будь-якого $k \ge 1$

$$\mathsf{P}\left(\xi^d = k\right) = F^c(k+1) - F^c(k) = \exp(-R(k)) - \exp(-R(k+1)) = p_k,$$

тобто в.в. ξ^d однаково розподілена з ξ. Таким чином, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\xi_i \equiv \xi_i^d$, ξ_i^d — незалежні копії ξ^d.

Далі ми установимо в умовах теореми 5 нерівність: $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_1^\infty \frac{dF^c(t)}{1 - F^c(t-\varepsilon)} < \infty. \tag{46}$$

Оцінка (46) (див. [3]) забезпечує асимптотичну стійкість екстремальних значень: при $n \to \infty$

$$z_n^c - a_n^c \to 0 \quad \text{м.н.}, \tag{47}$$

де z_n^c побудовані по н.о.р.в.в. з функцією розподілу $F^c(t)$,

$$a_n^c = \inf\left(y\colon F^c(y) \ge 1 - 1/n\right).$$

Функція $F^c(t)$ неперервна і строго зростаюча, тому

$$F^c(a_n^c) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Звідси маємо

$$a_n^c = k + \frac{\ln n - R(k)}{r(k+1)} \quad \text{при } \ln n \in [R(k), R(k+1)), \tag{48}$$

$$[a_n^c] = k \quad \text{при } \ln n \in [R(k), R(k+1))$$

або

$$[a_n^c] = \max(k\colon \ln n \ge R(k)) = \max\biggl(k\colon \sum_{i \ge k} p_i \ge \frac{1}{n}\biggr) = a_n.$$

Остання рівність та співвідношення (47) приводять до висновку, що при досить великих n можливі лише такі випадки:

або $[z_n^c] = a_n$,
або $[z_n^c] = a_n - 1$,
або $[z_n^c] = a_n + 1$.

Оскільки для будь-якого n

$$[z_n^c] = z_n^d = z_n \quad \text{м.н.},$$

то це і означає рівність (42).

Залишається установити оцінку (46). Скориставшись рівностями (44), (45) маємо при досить малому $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \frac{dF^c(t)}{1 - F^c(t-\varepsilon)} &= r(k+1)\int_k^{k+1} \frac{\exp(-R^c(t))\,dt}{\exp(-R^c(t-\varepsilon))}\\ &= r(k+1)\int_k^{k+1} \exp\biggl(-\int_{t-\varepsilon}^{t} r^c(s)\,ds\biggr)\,dt\\ &\le r(k+1)((1-\varepsilon)\exp(-r(k+1)) + \varepsilon\exp(-r(k)).\end{aligned} \tag{49}$$

Із оцінок (49) зрозуміло, що нерівність (46) випливає із умови (41). □

Безпосередньо із міркувань теореми 5 отримаємо таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай* a_n^c *визначене рівністю* (48) *і існує підпослідовність* (n_k) *така, що*

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}^c - a_{n_k}) = \alpha > 0,$$

то

$$\mathsf{P}(\exists k_0, \forall k \ge k_0\colon z_{n_k} = a_{n_k}) = 1.$$

4. Приклади

Розглянемо приклади застосувань отриманих результатів до деяких розподілів. Далі всюди будемо припускати, що (ξ_n) — послідовність незалежних копій в.в. ξ, а лічильний процес $N(t)$ задається рівністю (1).

Приклад 1 (Стандартний нормальний розподіл)**.** Нехай $\xi = \gamma$, γ — нормальна в.в. з ф.р. $\Phi(t)$,

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds, \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right).$$

Далі скористаємось добре відомим співвідношенням для хвоста функції $\Phi(t)$ (див. [12, с. 25]): при $t \to \infty$

$$1 - \Phi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}(1 + o(1)).$$

Із якого неважко отримати рівність

$$R(t) = \frac{t^2}{2} + \ln t + \ln\sqrt{2\pi} + o(1). \tag{50}$$

Тому згідно з теоремою 1 маємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N(t)}{\exp(t^2/2)\, t \ln t} = 2\sqrt{2\pi} \quad \text{м.н.}$$

Якщо $\psi(t)$ монотонно повільно зростає і задовольняє умову (18), то за теоремою 2

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)\psi(t\exp(t^2/2))}{t\exp(t^2/2)} = \infty \quad \text{або} \quad = 0 \quad \text{м.н.}$$

в залежності від того збігається чи ні ряд (16).

Приклад 2. Нехай $\xi = [\gamma]$, де γ — нормальна в.в. з прикладу 1. Ясно, що

$$\mathsf{P}(\xi \ge k) = \mathsf{P}(\gamma \ge k) = \exp(-R(k)),$$

де $R(t)$ задається рівністю (50) і

$$r(k) = R(k) - R(k-1) = k - \frac{1}{2} + o(1).$$

Зрозуміло, що умови (30), (31) теореми 3 при $b > \frac{1}{2}$ виконуються, а отже

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N(k)}{\exp(k^2/2)\, k \ln k} \le \sqrt{2\pi} \quad \text{м.н.}$$

Якщо (γ_i) послідовність незалежних копій (γ), $z_n^\gamma = \max_{1\le i\le n} \gamma_i$, то при $n \to \infty$

$$z_n^\gamma - \sqrt{2\ln n} \to 0 \quad \text{м.н.}$$

([2, §4.4, с. 203]).

Неважко побачити, що умова (41) також виконується. Окрім того $z_n = [z_n^\gamma]$. Тому за теоремою 5 виконується рівність (42) з $a_n = [\sqrt{2\ln n}]$.

Цікавим здається наступне зауваження.

Покладемо $(x_n = \sqrt{2\ln n} - [\sqrt{2\ln n}])$. Відомо [14, гл. 4, задача 183], що послідовність (x_n) задовольняє співвідношенню:

$$\forall\, 0 \le \alpha \le 1,\ \exists\, (n_k = n_k(\alpha)){:} \quad x_{n_k} \to \alpha, \quad k \to \infty. \tag{51}$$

Тоді, якщо послідовність (n_k) задовольняє (51) з $0 < \alpha < 1$, то за наслідком 2

$$\mathsf{P}\left(\exists\, k_0 \forall\, k \ge k_0 \colon z_{n_k} = [\sqrt{2\ln n_k}]\right) = 1.$$

Приклад 3. Нехай $L(x)$ повільно змінна функція на нескінченості, $\beta > 1$,

$$\mathsf{P}(\xi = k) = p_k = \frac{C}{k^\beta L(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$C = \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\beta L(k)} \right)^{-1}.$$

Відомо ([10]), що

$$R(k) = -\ln \sum_{i \geq k} p_i = -\ln C + \ln(\beta - 1) + (\beta - 1) \ln k + \ln L(k) + o(1)$$

і

$$R(k+1) - R(k) = (\beta - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \ln \frac{L(k+1)}{L(k)} + o(1) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Таким чином умова (28) теореми 3 виконуються, а отже

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{N(k)}{k^{\beta - 1} L(k) \ln \ln k} = \frac{\beta - 1}{C} \quad \text{м.н.}$$

Зрозуміло, що умова (40) теореми 4 також виконується. Тому якщо $\psi(t)$ монотонно повільно зростає і задовольняє умову (18) теореми 2, то

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{N(k) \psi(k^{\beta - 1} L(k))}{k^{\beta - 1} L(k)} = \infty \quad \text{або} \quad = 0 \quad \text{м.н.}$$

в залежності від того збігається чи ні ряд (16).

Приклад 4 (Геометричний розподіл)**.** Нехай

$$\mathsf{P}(\xi = k) = p_k = q(1 - q)^{k-1}, \qquad k \geq 1,\ 0 < q < 1.$$

Тут

$$R(k) = -\ln \sum_{i \geq k} q(1 - q)^{k-1} = (k - 1) \ln \frac{1}{1 - q},$$

$$r(k) = R(k) - R(k - 1) = \ln \frac{1}{1 - q}.$$

Очевидно, що умова (28) теореми 3 не виконується, а (40) теореми 4 виконується. Тому

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{N(k)(1 - q)^{k-1}}{\ln k} \leq 1 \quad \text{м.н.} \tag{52}$$

Якщо $\psi(t)$ така сама, як і у прикладі 3, то

$$\liminf_{k \to \infty} N(k)(1 - q)^{k-1} \psi\left((1 - q)^{-k+1}\right) = \infty \quad \text{або} \quad = 0 \quad \text{м.н.}$$

в залежності від того збігається чи ні ряд (16).

Чи можна в (52) замінити нерівність на рівність нам не відомо.

В.в. з геометричним розподілом можна зобразити наступним чином. Нехай τ^e стандартна експоненційна в.в., а (z_n^e) відповідна послідовність максимумів. Розглянемо в.в. $\xi = [\tau^e / \lambda]$, $\lambda > 0$. Тоді

$$\mathsf{P}(\xi = k) = \mathsf{P}(\tau^e / \lambda \in [k - 1, k)) = (1 - q)^{k-1} q,$$

де $q = 1 - \exp(-\lambda)$, тобто ξ має геометричний розподіл.

Звідси маємо

$$z_n^e / \lambda = z_n + \theta, \qquad |\theta| \leq 1.$$

Згідно з результатами [5, 8]

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n^e - \ln n}{\ln\ln n} = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n^e - \ln n}{\ln\ln\ln n} = -1 \quad \text{м.н.}$$

Збираючи разом останні рівності одержуємо ЗПЛ для геометричного розподілу

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n \ln \frac{1}{1-q} - \ln n}{\ln\ln n} = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n \ln \frac{1}{1-q} - \ln n}{\ln\ln\ln n} = -1 \quad \text{м.н.}$$

Література

1. В. В. Булдигін, К. Х. Індлекофер, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах, *Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення*, “ТВіМС”, Київ, 2012.
2. Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, “Наука”, Москва, 1984.
3. Ole Barndorff-Nielsen, *On the limit behaviour of extreme order statistics*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), no. 3, 992–1002.
4. J. Pickands, *An iterated logarithm law for the maximum in a stationary Gaussian sequence*, Zeitschrift fur Warhschein. verw. Geb. **12** (1969), no. 3, 344–355.
5. L. de Haan and A. Hordijk, *The rate of growth of sample maxima*, Ann. Math. Statist. **43** (1972), 1185–1196.
6. M. J. Klass, *The Robbins–Siegmund criterion for partial maxima*, Ann. Probab. **13** (1985), 1369–1370.
7. L. de Haan and A. Ferreira, *Extreme Values Theory: An Introduction*, Springer, Berlin, 2006.
8. К. С. Акбаш, І. К. Мацак, *Одне уточнення закону повторного логарифму для схеми максимуму*, Укр. мат. ж. **64** (2012), №8, 1132–1137.
9. І. К. Мацак, *Асимптотична поведінка лічильного процесу у схемі максимуму*, Укр. мат. ж. **65** (2013), №11, 1575–1579.
10. I. Matsak and I. Rozora, *Asymptotic behaviour of counting process in the max-scheme. Discrete case*, Georg. Math. J. (to appear)
11. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, “Наука”, Москва, 1969.
12. М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен, *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*, “Мир”, Москва, 1989.
13. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, “Наука”, Москва, 1985.
14. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, т. 1, “Наука”, Москва, 1973.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127

Адреса електронної пошти: ivanmatsak@univ.kiev.ua

Надійшла 06/08/2014